1 時間追跡（等加速度運動，単振動），衝突

【メモ】

・等加速度運動，単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動である．問(1)では単振動のエネルギー[*1]，問(2)では単振動の時間追跡，問(3)は等加速度運動の時間追跡である．・衝突は以下の 2 式を連立．

$$\begin{cases} \text{外力のない方向成分の運動量保存則} \\ \text{問題文で指示された条件} \end{cases}$$

本問のような固定面との衝突の場合，物体と固定面からなる系において衝突の際面を固定させるために衝突方向に外力から力積を受けるため，物体と固定面からなる系の運動量の衝突方向成分は保存しない．

【解答】

問(1) (a) 公式より，

$$E = \frac{1}{2}kd^2 .$$

(b) 物体とばねからなる系の力学的エネルギー保存則より[*2]

$$\frac{1}{2}M{V_0}^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2 = \frac{1}{2}M \cdot 0^2 + \frac{1}{2}kd^2 \qquad \therefore V_0 = d\sqrt{\frac{k}{M}} .$$

また，衝突後の速さは，衝突の条件（はね返り係数の式）より[*3]，

$$V - 0 = -e(V_0 - 0) \qquad \therefore V_1 = |V| = ed\sqrt{\frac{k}{M}} .$$

(c) 単振動の周期は $2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ であるから，

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = \pi\sqrt{\frac{M}{k}} .$$

問(2) (a) 静止摩擦力の大きさを R とする．運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = -R , \\ Ma = -kx + R \end{cases} \qquad \therefore a = -\frac{k}{M+m}x , \quad R = \frac{m}{M+m}kx .$$

[*1] 時間追跡でもよいが手間である．

[*2] 物体のエネルギー収支：$\frac{1}{2}M{V_0}^2 - \frac{1}{2}M \cdot 0^2 = \int_d^0 (-kx)\,dx$.

[*3] 物体と壁からなる系には壁を固定するための外力がはたらくため運動量は保存しない．

よって，x が最大値を取るとき R も最大値を取り，R が最大値を取るときに最大摩擦を超えていなければ滑りは生じないため[*4]，

$$\frac{m}{M+m}kd < \mu N = \mu mg \qquad \therefore \mu > \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{kd}{(M+m)g}}\,(=\mu_{\mathrm{c}})\,.$$

(b)　台車上の物体が台車から受ける垂直抗力の大きさは mg ゆえ，各物体の運動方程式は[*5]，

$$\begin{cases} \underset{\sim\sim\sim}{ma = \mu' mg}\,, \\ \underset{\sim\sim\sim}{Ma' = -kx - \mu' mg}\,. \end{cases}$$

(c)　運動方程式より，

$$a' = -\frac{k}{M}\left(x + \frac{\mu' mg}{k}\right)$$

であり，振動中心 $x_0 = -\underset{\sim\sim}{\frac{\mu' mg}{k}}$，角振動数 $\omega = \underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{k}{M}}}$ の単振動を行う．

問(3)　(a)　運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = \mu' mg\,, \\ MA = -\mu' mg \end{cases} \qquad \therefore a = \mu' g\,,\quad A = -\mu'\frac{m}{M}g\,.$$

$t=0$（1 回目の衝突時）で $X(0)=0$，$V(0)=ev_0$，$v(0)=-v_0$ ゆえ，

$$\begin{cases} \underset{\sim\sim\sim}{V = ev_0 - \mu'\frac{m}{M}gt}\,, \\ \underset{\sim\sim\sim}{v = -v_0 + \mu' gt}\,. \end{cases}$$

(b)　時刻 t における台車の位置 X は，

$$X = ev_0 t - \frac{1}{2}\frac{\mu' mg}{M}t^2\,.$$

$X=0$ を解いて，

$$ev_0 t - \frac{1}{2}\frac{\mu' mg}{M}t^2 = 0 \qquad \therefore t = \underset{\sim\sim}{\frac{2Mev_0}{\mu' mg}}\,(=T')\,.$$

(c)　$0 < t < T'$ で常に $v < V$ であればよく[*6]，

$$-v_0 + \mu' gt < ev_0 - \mu'\frac{m}{M}gt \qquad \therefore (0<)\,t < (1+e)\frac{M}{M+m}\frac{v_0}{\mu' g}\,(=T^*)\,.$$

[*4] 台車上の物体の鉛直方向の運動方程式より垂直抗力の大きさは mg である．
[*5] 接触面に対し，台車は右へ，物体は左へ滑る．
[*6] v，V はともに速度であることに注意．

$0 < t < T^*$ の中に $0 < t < T'$ がすっぽり収まるように取れば $0 < t < T'$ で常に $v < V$ が成り立つ．よって，$T' < T^*$ を解いて，

$$\frac{2Mev_0}{\mu' mg} < (1+e)\frac{M}{M+m}\frac{v_0}{\mu' g} \qquad \therefore e < \frac{m}{2M+m}\,.$$

(d)　2〜3 回目：2 回目衝突直前の速度は

$$V = ev_0 - \mu' \frac{m}{M} g \cdot \frac{2Me}{\mu' mg} v_0 = -ev_0$$

より，衝突直後の速度は $e^2 v_0$ である[*7]．よって，衝突 2〜3 回目の時間 t_2 は，

$$t_2 = eT' \, (= et_1)\,.$$

以上より，n 回目から $n+1$ 回目の衝突時間間隔 t_n は，

$$t_n = et_{n-1} = e^{n-1} T'$$

であり，

$$T'' = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n-1} T' = \frac{1}{1-e} T'\,.$$

[*7] $X = 0$ を解けばよい（が，初速が e 倍であることから時間間隔も e 倍となる）．

2 電気回路（抵抗，コンデンサ），コンデンサの中身

【メモ】

・電気回路の状態は，キルヒホッフ則，電荷保存則，素子の性質によって一意に決まる．

・問(1)，問(2)はコンデンサと抵抗のみの電気回路の問題．

・問(3)は誘電体の挿入を考えるコンデンサと抵抗のみの電気回路の問題．

・ジュール熱 J の計算は以下のように行う．

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I\ \text{一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I\ \text{一定でないとき}). \end{cases}$$

【解答】

問(1) (a) 十分時間経過ゆえコンデンサに流れ込む電流は 0 である．キルヒホッフ則より，

$$V - ri - \frac{q_1}{C_\mathrm{A}} = 0 \qquad \therefore q_1 = C_\mathrm{A} V_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\varepsilon_0 \ell^2 V_0}{d}}.$$

また，電池のした仕事は公式より，

$$W_1 = q_1 V_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\varepsilon_0 \ell^2 {V_0}^2}{d}}.$$

(b) キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{q_\mathrm{A}}{C_\mathrm{A}} - ri_1 - \dfrac{q_\mathrm{B}}{C_\mathrm{B}} = 0, \\ q_\mathrm{A} + q_\mathrm{B} = C_\mathrm{A} V_0. \end{cases}$$

直後 $q_\mathrm{A} = C_\mathrm{A} V_0$，$q_\mathrm{B} = 0$ より，

$$i_1 = \underset{\sim}{\frac{V_0}{r}}.$$

なお，十分時間経過後の帯電量は $i_1 = 0$ より，

$$q_\mathrm{A} = \frac{{C_\mathrm{A}}^2}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}, \quad q_\mathrm{B} = \frac{C_\mathrm{A} C_\mathrm{B}}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}}.$$

(c) 回路のエネルギー収支より，

$$\begin{aligned} h_1 = -\varDelta U &= -\left\{ \frac{1}{2C_\mathrm{A}} \left(\frac{{C_\mathrm{A}}^2}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} \right)^2 - \frac{(C_\mathrm{A} V_0)^2}{2C_\mathrm{A}} \right\} - \left\{ \frac{1}{2C_\mathrm{A}} \left(\frac{C_\mathrm{A} C_\mathrm{B}}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} \right)^2 - 0 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{C_\mathrm{A} C_\mathrm{B}}{C_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}} {V_0}^2 \\ &= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\varepsilon_0 \ell^2 {V_0}^2}{4d}}. \end{aligned}$$

問(2)　$t=0$ で $q_{\mathrm{A}}=\dfrac{\varepsilon_0\ell^2V_0}{d}$，$q_{\mathrm{B}}=\dfrac{\varepsilon\ell^2V_0}{d}$ であり，キルヒホッフ則は，

$$\begin{cases} V(t)-ri_1-\dfrac{q_{\mathrm{A}}}{C_{\mathrm{A}}}=0\,, \\ V(t)-ri_1-ri_2-\dfrac{q_{\mathrm{B}}}{C_{\mathrm{B}}}=0\,. \end{cases}$$

(a)　キルヒホッフ則より，$V_1(t)=\dfrac{q_{\mathrm{A}}}{C_{\mathrm{A}}}$，$V_2(t)=\dfrac{q_{\mathrm{B}}}{C_{\mathrm{B}}}$ ゆえ，

$$V_1(t)=\underline{V(t)-ri_1(t)}\,,\quad V_2(t)=\underline{V(t)-r(i_1(t)+i_2(t))}\,.$$

(b)　$\dfrac{dq_{\mathrm{A}}}{dt}=i_1-i_2$，$\dfrac{dq_{\mathrm{B}}}{dt}=i_2$ より，

$$\begin{cases} V(t)-ri_1-\dfrac{q_{\mathrm{A}}}{C_{\mathrm{A}}}=0\,, \\ V(t)-ri_1-ri_2-\dfrac{q_{\mathrm{B}}}{C_{\mathrm{B}}}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{\Delta V(t)}{\Delta t}}_{=\alpha}-0-\dfrac{1}{C_{\mathrm{A}}}\dfrac{\Delta q_{\mathrm{A}}}{\Delta t}=0\,, \\ \dfrac{\Delta V(t)}{\Delta t}-0-0-\dfrac{1}{C_{\mathrm{B}}}\dfrac{\Delta q_{\mathrm{B}}}{\Delta t}=0 \end{cases}\qquad \therefore\ \Delta q_{\mathrm{A}}=\underline{\dfrac{\alpha\varepsilon_0\ell^2}{d}\Delta t}\,,\quad \Delta q_{\mathrm{B}}=\underline{\dfrac{\alpha\varepsilon\ell^2}{d}\Delta t}\,.$$

(c)　電流の定義から $\dfrac{dq_{\mathrm{A}}}{dt}=i_1-i_2$，$\dfrac{dq_{\mathrm{B}}}{dt}=i_2$ より，

$$\begin{cases} \dfrac{dq_{\mathrm{A}}}{dt}=I_1-I_2=\dfrac{\alpha\varepsilon_0\ell^2}{d}\,, \\ \dfrac{dq_{\mathrm{B}}}{dt}=I_2=\dfrac{\alpha\varepsilon\ell^2}{d} \end{cases}\qquad \therefore\ I_1=\underline{\dfrac{\alpha(\varepsilon_0+\varepsilon)\ell^2}{d}}\,,\quad I_2=\underline{\dfrac{\alpha\varepsilon\ell^2}{d}}\,.$$

問(3) (a)　挿入長を x とすると，

$$C_{\mathrm{B}}=\varepsilon_0\frac{(\ell-x)\ell}{d}+\varepsilon\frac{\ell x}{d}$$
$$\therefore\ \frac{\Delta C_{\mathrm{B}}}{\Delta t}=\underline{(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{\ell}{d}}\,v_{=b}\,.$$

(b)　題意より各抵抗に流れる電流は一定値を取る．キルヒホッフ則，および電流の定義より，

$$\begin{cases} V_0-rI_3-\dfrac{q_{\mathrm{A}}}{C_{\mathrm{A}}}=0\,, \\ V_0-rI_3-rI_4-\dfrac{q_{\mathrm{B}}}{C_{\mathrm{B}}}=0\,, \\ \dfrac{dq_{\mathrm{A}}}{dt}=I_3-I_4\,, \\ \dfrac{dq_{\mathrm{B}}}{dt}=I_4\,. \end{cases}$$

ここで，$\dfrac{dC_{\mathrm{A}}}{dt}=0$，$\dfrac{dC_{\mathrm{B}}}{dt}=b$ を用いて，

$$\begin{cases} I_3-I_4=\dfrac{dq_{\mathrm{A}}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\{C_{\mathrm{A}}(V_0-rI_3)\}=0\,, \\ I_4=\dfrac{dq_{\mathrm{B}}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\{C_{\mathrm{B}}(V_0-rI_3-rI_4)\}=b(V_0-rI_3-rI_4) \end{cases}$$

$$\therefore I_3=I_4=\underbrace{\frac{b}{1+2br}V_0}_{\text{(c)}}\ .$$

よって，$I_4>0$ から (い).

(c)　前問に示した.

(d)　系のエネルギー収支（エネルギーの時間変化率）より，

$$P_{\text{電池}}+P_{\text{外力}}=rI_3{}^2+rI_4{}^2+\frac{dU_{\mathrm{A}}}{dt}+\frac{dU_{\mathrm{B}}}{dt}$$

$$\frac{b}{1+2br}V_0{}^2+Fv=2r\left(\frac{b}{1+2br}V_0\right)^2+\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q_{\mathrm{A}}{}^2}{C_{\mathrm{A}}}\right)}_{=0}+\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q_{\mathrm{B}}{}^2}{C_{\mathrm{B}}}\right)}_{=\frac{q_{\mathrm{B}}}{C_{\mathrm{B}}}I_4-\frac{1}{2}\left(\frac{q_{\mathrm{B}}}{C_{\mathrm{B}}}\right)^2\frac{dC_{\mathrm{B}}}{dt}}$$

$$\therefore F=-\frac{bV_0{}^2}{2v}\left(\frac{1}{1+2br}\right)^2\ \text{（右向き）}.$$

【補足】問(3)の微分方程式を解くことについて

微分方程式を解く方法は多岐にわたるが，結果としては解が見つかればそれでよいのである．今回の場合，解くべき微分方程式は，

$$\begin{cases} V_0-ri_1-\dfrac{q_{\mathrm{A}}}{C_{\mathrm{A}}}=0\,, \\ V_0-ri_1-ri_2-\dfrac{q_{\mathrm{B}}}{C_{\mathrm{B}}}=0\,, \\ \dfrac{dq_{\mathrm{A}}}{dt}=i_1-i_2\,, \\ \dfrac{dq_{\mathrm{B}}}{dt}=i_2 \end{cases}$$

であり．ここで，$\dfrac{dC_{\mathrm{A}}}{dt}=0$，$\dfrac{dC_{\mathrm{B}}}{dt}=b$ である．

さて，この微分方程式の解として $q_{\mathrm{A}}=\alpha\,(=\mathrm{const})$，$q_{\mathrm{B}}=\beta t+\gamma$ を仮定してみよう．すると，$\dfrac{dq_{\mathrm{A}}}{dt}=0$，$\dfrac{dq_{\mathrm{B}}}{dt}=\beta$ より下 2 式から，

$$i_1=i_2=\beta$$

を得て，第 1 式

$$\frac{dq_{\mathrm{A}}}{dt}=\frac{d}{dt}\{C_{\mathrm{A}}(V_0-r\underbrace{i_1}_{=\beta})\}=0$$

と矛盾しない．また，第 2 式からは，

$$\frac{dq_{\mathrm{B}}}{dt} = \frac{d}{dt}\{C_{\mathrm{B}}(V_0 - r\underbrace{i_1}_{=\beta} - r\underbrace{i_2}_{=\beta})\} = \underbrace{\frac{dC_{\mathrm{B}}}{dt}}_{=b}(V_0 - 2r\beta) = \beta \qquad \therefore \beta = \frac{b}{1+2br}V_0$$

となり定数 β が決定できる．$t=0$ において $q_{\mathrm{A}} = C_{\mathrm{A}}V_0\,(=\alpha)$，$q_{\mathrm{B}} = 0\,(=\gamma)$ より，

$$q_{\mathrm{A}} = C_{\mathrm{A}}V_0\,, \quad q_{\mathrm{B}} = \beta t = \frac{b}{1+2br}V_0 t$$

が求まり，以上の計算過程を見てわかる通り，これは始めに挙げた 4 つの微分方程式に矛盾しない解となっている．

3 固有振動，ドップラー効果・公式使用，ドップラー効果・公式導出（時系列）

【メモ】

・固有振動は状況を図示して状況をそのまま立式すればよい．一般の n に対する倍振動については，$n=1,2$ の規則から考えればよい．

・ドップラー効果は，大きく分けて公式導出問題と公式を使い問題に分類でき，この問題は両方に問題に属する．公式導出は時系列を考える方法である．

【解答】

問(1) (a) 管長が $\frac{5}{4}$ 波長と等しく，

$$\frac{5}{4}\frac{V}{f}=L \qquad \therefore f=\underset{\sim\sim}{\frac{5}{4}\frac{V}{L}}.$$

また，ドップラー効果の公式より，

$$f=\frac{V}{V+v_1}f_{\mathrm{s}} \qquad \therefore f_{\mathrm{s}}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{5}{4}\left(1+\frac{v_1}{V}\right)\frac{V}{L}}.$$

(b) 管長が $\frac{n}{2}$ 波長と等しく，

$$\frac{n}{2}\frac{V}{f}=L \qquad \therefore f=\frac{n}{2}\frac{V}{L}.$$

よって，ドップラー効果の公式より，

$$\frac{n}{2}\frac{V}{L}=\frac{V}{V-v_1}f_{\mathrm{s}} \qquad \therefore f_{\mathrm{s}}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{n}{2}\left(1-\frac{v_1}{V}\right)\frac{V}{L}}.$$

(c) (a)，(b) より，

$$\frac{5}{4}\left(1+\frac{v_1}{V}\right)\frac{V}{L}=\frac{n}{2}\left(1-\frac{v_1}{V}\right)\frac{V}{L} \qquad \therefore v_1=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{2n-5}{2n+5}V}.$$

(d) $0<v_1\leq\frac{2}{13}V$ より，

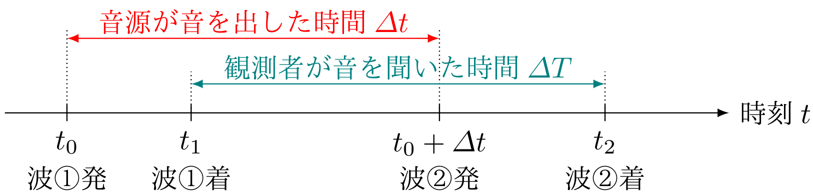
$$0<\frac{2n-5}{2n+5}\leq\frac{2}{13}$$

$$\therefore\begin{cases}0<2n-5\,,\\ 2n-5\leq\dfrac{2}{13}(2n+5)\end{cases} \qquad \therefore 2+\frac{1}{2}<n\leq 3+\frac{9}{22}$$

となり，

$$n=\underset{\sim}{3},\quad f_n=\underset{\sim\sim}{\frac{3}{2}\frac{V}{L}},\quad f_{\mathrm{s}}=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{15}{11}\frac{V}{L}}.$$

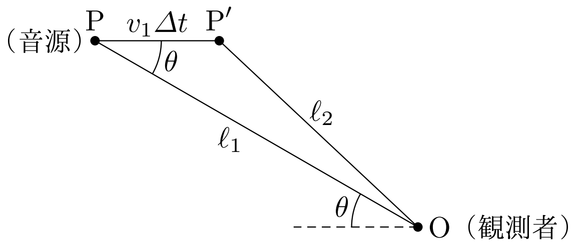
問(2) (a) 時系列は以下の図のようになっている．



状況を整理して，

$$\begin{cases} V(t_1-t_0)=\ell_1\,, \\ V\{t_2-(t_0+\Delta t)\}=\ell_2 \end{cases} \qquad \therefore t_2-t_1=\Delta t+\frac{\ell_2-\ell_1}{V}=(\Delta T)\,.$$

(b) 状況を整理すると以下の図のようになる．



図より，

$$\ell_2=\sqrt{{\ell_1}^2+(v_1\Delta t)^2-2\ell_1 v_1\Delta t\cos\theta}\,.$$

(c) ℓ_2 を近似して，

$$\begin{aligned}
\ell_2&=\sqrt{{\ell_1}^2+(v_1\Delta t)^2-2\ell_1 v_1\Delta t\cos\theta}\\
&=\ell_1\sqrt{1+\left(\frac{v_1\Delta t}{\ell_1}\right)^2-\frac{2v_1\cos\theta}{\ell_1}\Delta t}\\
&\fallingdotseq \ell_1\sqrt{1-\frac{2v_1\cos\theta}{\ell_1}\Delta t}\\
&\fallingdotseq \ell_1\left(1-\frac{1}{2}\frac{2v_1\cos\theta}{\ell_1}\Delta t\right)\\
&=\ell_1-v_1\Delta t\cos\theta\,.
\end{aligned}$$

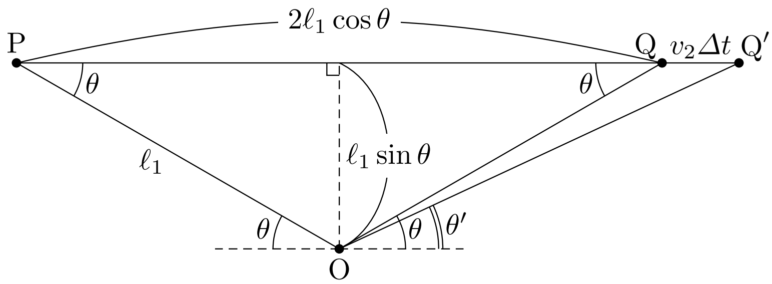
よって，

$$\Delta T=\Delta t+\frac{(\ell_1-v_1\Delta t\cos\theta)-\ell_1}{V}=\left(1-\frac{v_1}{V}\cos\theta\right)\Delta t\,.$$

(d) 波の個数不変より，

$$f_{\mathrm{P}}\Delta T=f_{\mathrm{s}}\Delta t \qquad \therefore f_{\mathrm{P}}=\frac{V}{V-v_1\cos\theta}f_{\mathrm{s}}\,.$$

問(3) (a) 状況を整理すると以下の図のようになる．



図より，

$$\begin{cases} V\mathit{\Delta} t = 2\ell_1\cos\theta + v_2\mathit{\Delta} t\,, \\ \tan\theta' = \dfrac{\ell_1\sin\theta}{\ell_1\cos\theta + v_2\mathit{\Delta} t} \end{cases} \qquad \therefore \tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \dfrac{2v_2}{V-v_2}\cos\theta} = \underline{\frac{V-v_2}{V+v_2}\tan\theta}\,.$$

(b) 公式より，

$$f_{\mathrm{Q}} = \underline{\frac{V}{V+v_2\cos\theta'}\frac{V-v_2}{V-v_1}f_{\mathrm{s}}}\,.$$

(c) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ より，

$$f_{\mathrm{Q}} = \frac{V}{V+v_2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}\frac{V-v_2}{V}f_{\mathrm{s}} = \frac{V-v_2}{V+v_2/2}f_{\mathrm{s}}\,.$$

よって，$f_{\mathrm{Q}} < f_{\mathrm{s}}$ よりうなりの振動数を計算して，

$$f_{\mathrm{s}} - \frac{V-v_2}{V+v_2/2}f_{\mathrm{s}} = N \qquad \therefore v_2 = \underline{\frac{2N}{3f_{\mathrm{s}}-N}V}\,.$$