3
電磁気前半

第 3 部電磁気前半では，電磁気分野のうち電気分野を扱う．第 1 章では，新しく導入した電場，電位に関する設定として，クーロン力を含む力学，電場の決定，導体表面に帯電する電荷の決定を行う．後者 2 つは完全に新しい内容となる．第 2 章では，回路素子の中身を論じる．特に平行平板コンデンサの中身について重点的に扱う（第 1 章でも軽く扱っている）．第 3 章では，電池，抵抗，コンデンサ，例外素子（電球，ダイオード）からなる直流回路について扱う．なお，コイルを含む回路（こちらは授業内では扱う），交流回路については第 7 部電磁気後半で扱うが，いずれもキルヒホッフの法則，電荷保存則，素子の性質により回路の状態が一意に決まることを見る（つまり，それ以外のことを考える必要はない）．

§3.1 静電場

この章では，荷電粒子の運動，電場・電位の計算，および金属板表面の帯電量の計算（コンデンサの内部構造の簡単な話）を扱う．新しく覚える公式が半分，これまでの力学の知識が半分といった内容である．

■簡単なまとめ

- 電場の決定：
  ❶ 点電荷　→　公式 $E = k\dfrac{Q}{r^2}$
  ❷ 形状をもつ物体　→　ガウス則
  ❸ 等電位線（面）から計算
- 平行一様電場：
$$V = Ed$$
  V は電位差の大きさ，E は電場の大きさ，d は距離を表し，電場の向きに電位が下がる．
- 導体の電荷分布：以下の 3 式で一意に決まる．
$$\begin{cases} \text{静電誘導} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{電位差の関係（キルヒホッフ則）} \end{cases}$$
- 金属板の作る電場：$E = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$
  ε_0 は真空の誘電率，S は極板の面積，Q は極板に帯電する電荷．
- 誘電体内部の電場 $E_{\text{内部}}$：$E_{\text{内部}} = \dfrac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}E$
  E は真空中の電場，$\varepsilon_\mathrm{r} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ は比誘電率（ε_0：真空の誘電率，ε：誘電率）．
- コンデンサの容量決定：以下の決定手順を覚える．
$$\begin{cases} \text{ガウス則（}E\text{ と }Q\text{ の対応）} \\ \text{キルヒホッフ則（}E\text{ と }V\text{ の対応）} \end{cases}$$
  →Q と V の関係式を作り，その比例定数を読み取る．

  平行平板コンデンサについては，公式 $C = \varepsilon\dfrac{S}{d}$ を覚える．

1. 点電荷の電場・電位の計算

クーロンの比例定数を k_0，電位の基準点を無限遠点とする．

(1)　固定された電荷 $Q\,(>0)$ の点電荷から距離 r 離れた地点での電場の大きさ（強さ）E，および電位 ϕ を求めよ．

(2)　xy 平面上で，点 $(0,\,L)\,(L>0)$，点 $(0,\,-L)$ にそれぞれ電荷 $Q\,(>0)$ を固定する．x 軸上の点 $(\sqrt{3}\,L,\,0)$ における電場の x 成分 E_x，y 成分 E_y，および電位 ϕ を求めよ．

(3)　xy 平面上で，点 $(0,\,L)\,(L>0)$ に電荷 $+Q\,(Q>0)$，点 $(0,\,-L)$ に電荷 $-Q$ を固定する．x 軸上の点 $(x,\,0)$ における電場の x 成分 E_x，y 成分 E_y，および電位 ϕ を求めよ．

【解答】

(1)　公式より[*1]，

$$E = \underset{\sim\sim}{k_0\frac{Q}{r^2}}\,,\quad \phi = \underset{\sim\sim}{k_0\frac{Q}{r}}\,.$$

(2)　公式・図（各自）より，

$$E_x = k_0\frac{Q}{(2L)^2}\cos 30^\circ\times 2 = \underset{\sim\sim}{\frac{\sqrt{3}\,k_0Q}{4L^2}}\,,\quad E_y = \underset{\sim}{0}\,,\quad \phi = k_0\frac{Q}{2L}+k_0\frac{Q}{2L} = \underset{\sim\sim}{k_0\frac{Q}{L}}\,.$$

(3)　公式・図（各自）より，

$$E_x = \underset{\sim}{0}\,,\quad E_y = -k_0\frac{Q}{x^2+L^2}\sin\theta\times 2 = \underset{\sim\sim}{\frac{2k_0QL}{(L^2+x^2)^{3/2}}}\,,$$

$$\phi = k_0\frac{Q}{\sqrt{L^2+x^2}}+k_0\frac{-Q}{\sqrt{L^2+x^2}} = \underset{\sim}{0}\,.$$

[*1] 電場は，単位電荷（1〔C〕）を想定し，単位電荷が受ける力を，電位は，単位電荷によって生じる位置エネルギーを考えればよい．

2. 点電荷の運動①

水平右向きに x 軸を定める．位置 $x=0$ に点電荷 A（質量 m，電荷 $-Q\,(<0)$）に固定した．クーロンの比例定数を k_0，電位の基準点を無限遠点とする．

(1)　点電荷 A が位置 x に作る電場 E，およびこのとき生じる電位 ϕ を，それぞれ位置 x の関数として表せ．

(2)　点電荷 B（質量 m，電荷 Q）を位置 $x=a\,(>0)$ に固定した．点電荷 B を固定するのに必要な外力の大きさ F_{ex} を求めよ．

(3)　点電荷 B の固定を外し，x 正方向に大きさ v_0 の初速度を与えた．点電荷 B が点電荷 A から最も遠ざかる位置 x_1 を，k_0，Q，a，v_0，m を用いて表せ．

(4)　点電荷 B の固定を外し，x 正方向に初速度を与えた．初速度の大きさが $v_0>v_2$ を満たすとき，点電荷 B は無限遠に達した．v_2 を，k_0，Q，a，m を用いて表せ．

(5)　点電荷 B に外力を加え，位置 $x=a$ から位置 $x=2a$ までゆっくり運んだ．この間に，外力のした仕事 W_{ex} を，k_0，Q，a を用いて表せ．

【メモ】

時間追跡ができないため，エネルギー保存則を利用する．エネルギー保存則を利用する際は，どこまでを系と見るか，特に注意する．

【解答】

(1)　公式より，

$$E = -k_0 \frac{Q}{x^2}\,, \quad \phi = -k_0 \frac{Q}{x}\,.$$

(2)　B の力のつりあいより，

$$m \cdot 0 = F_{\mathrm{ex}} - k_0 \frac{Q^2}{x^2}\,, \quad F_{\mathrm{ex}} = k_0 \frac{Q^2}{x^2}\,.$$

(3)　力学的エネルギー保存則[*2]より，

$$\frac{1}{2} m \cdot 0^2 + k_0 \frac{Q \cdot (-Q)}{x_1} = \frac{1}{2} m {v_0}^2 + k_0 \frac{Q \cdot (-Q)}{a}\,, \qquad \therefore x_1 = \frac{2k_0 Q^2}{2k_0 Q^2 - m{v_0}^2 a} a\,.$$

(4)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2} m \cdot {v_\infty}^2 + 0 = \frac{1}{2} m {v_0}^2 + k_0 \frac{Q \cdot (-Q)}{a}\,.$$

ここで，無限遠に到達するためには $\frac{1}{2} m {v_\infty}^2 > 0$ が必要．したがって，

$$\frac{1}{2} m {v_0}^2 + k_0 \frac{Q \cdot (-Q)}{a} > 0\,, \qquad \therefore v_2 = \sqrt{\frac{2k_0 Q^2}{ma}}\,.$$

(5)　B と電場を合わせて 1 つの系と見て，エネルギー収支の式[*3]より[*4]，

$$\left\{ \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + k_0 \frac{Q \cdot (-Q)}{2a} \right\} - \left\{ \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + k_0 \frac{Q \cdot (-Q)}{a} \right\} = W_{\mathrm{ex}}\,, \qquad \therefore W_{\mathrm{ex}} = k_0 \frac{Q^2}{2a}\,.$$

[*2] B，電場を合わせて 1 つの系と見ている．

[*3]（系のエネルギー変化）=（された仕事）．

[*4] B のみを 1 つの系と見て，エネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2} m \cdot 0^2 - \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = \int_a^{2a} \left(-k_0 \frac{Q^2}{x} + F_{\mathrm{ex}} \right) dx\,, \qquad \therefore W_{\mathrm{ex}} = k_0 \frac{Q^2}{2a}\,.$$

3. 点電荷の運動②

鉛直上向きに x 軸を定める．位置 $x=0$ に点電荷 A（電荷 $Q\,(>0)$）に固定した．x 軸上には，もうひとつの点電荷 B（質量 m，電荷 $q\,(>0)$）があり，x 軸上のみを自由に動くできるものとする．重力加速度の大きさを g，クーロンの比例定数を k_0，電位の基準点を無限遠点とし，$x>0$ の領域ので B の運動について考える．

(1)　B に働く重力とクーロン力がつりあう位置 $x=x_0$ を求めよ．

(2)　B を $\dfrac{1}{2}x_0$ の位置で静かに放したところ，B は $\dfrac{1}{2}x_0 \leq x \leq \beta x_0$ の範囲で往復運動を行った．β を求めよ．

【解答】

(1)　B のつりあいより，

$$m\cdot 0 = k_0\frac{Qq}{{x_0}^2} - mg\,,\qquad \therefore x_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{k_0 Qq}{mg}}}\,.$$

(2)　位置 x での B の速度を v とする．B，重力場，電場を系と見て，力学的エネルギー保存則より[*5]，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx + k_0\frac{Qq}{x} = mg\frac{x_0}{2} + k_0\frac{Qq}{x_0/2}\,.$$

$x=\beta x_0$ の位置で $v=0$ となって引き返すので[*6]，

$$mg\cdot\beta x_0 + k_0\frac{Qq}{\beta x_0} = mg\frac{x_0}{2} + k_0\frac{Qq}{x_0/2}\,,\qquad \therefore \beta = \underset{\sim}{2}\,.$$

[*5] B のみを 1 つの系と見て，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \int_{x_0/2}^{x}\left(k_0\frac{Qq}{x^2} - mg\right)dx\,.$$

[*6] $\beta \neq \dfrac{1}{2}$ である．

4. 点電荷の運動③

水平右向きに x 軸を定める．位置 $x=0$ に点電荷 A（質量 m，電荷 $q\,(>0)$）を，位置 $x=a$ に点電荷 B（質量 M，電荷 $Q\,(>0)$）を静かに置いたところ，両点電荷は運動を始めた．点電荷 A の速度を v，点電荷 B の速度を V，このときの 2 つの点電荷間の距離を r とする．クーロンの比例定数を k_0，電位の基準点を無限遠点とする．

(1)　全体を 1 つの系と見たとき，この系には外力が働かないことから x 方向の運動量は保存する．系の運動量保存則を表す式を記せ．

(2)　全体を 1 つの系と見たとき，この系の力学的エネルギーは保存する．系の力学的エネルギー保存則を表す式を記せ．

(3)　v，V を，k_0，Q，q，M，m，r を用いて表せ．

【メモ】

多体系の取り扱いは，運動量・力学的エネルギー保存則の連立が基本である．

【解答】

(1)　運動量保存則より，

$$mv+MV=0$$

(2)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2+k_0\frac{Qq}{r}=\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}M\cdot 0^2+k_0\frac{Qq}{a}\,.$$

(3)　以上 2 式より，

$$v=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-\sqrt{\frac{2k_0Qq}{M+m}\frac{M}{m}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)}},\quad V=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2k_0Qq}{M+m}\frac{m}{M}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)}}\,.$$

5. 平行一様電場

真空中に定めた x 軸に沿って，x 軸の負の向きに大きさ E の平行一様電場がかけてある．この電場中における点電荷（質量 m，電荷 q）の x 軸に沿った運動を考えよう．ただし，$E>0$，$q>0$ とし，クーロン力以外の力は考えない．

原点において，点電荷に x 軸の正の向きに初速 v_0 を与えた．

(1)　点電荷が位置 x に達したときの速度を v とする．そのときの速さ $|v|$ を，x の関数として表せ．

(2)　x の最大値を求めよ．

(3)　位置 x の電位 $\phi(x)$ を求めよ．ただし，$x=x_0$ の位置を電位の基準点とする[*7]．

[*7] この問題は，これまで説明を避けてきた位置エネルギーの不定性について言及する位置付けで入れてある．位置 x における電荷 q の位置エネルギーは公式 $U=q\phi$ より，適当な定数 U_0 を用いて，

$$U(x)=qEx+U_0$$

と書ける．基準の位置 $x=x_0$ で $U(x_0)=0$ より

$$U_0=-qEx_0$$

と定まる．電位 ϕ は単位電荷の位置エネルギーを考えればよく，

$$\phi(x)=\frac{1}{q}U(x)=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{E(x-x_0)}\,.$$

なお，この計算から（わかる人はわかる通り）エネルギーとは「その差」が本質である．ただ解答するには解答のようにしてよい．

【メモ】

平行一様電場では，〔電位差（電圧）〕=〔電場の強さ〕×〔電場に沿った距離〕が成り立つ[*8]．平行一様電場はコンデンサで繰り返し現れるため，一旦整理しておきたい．

【解答】

(1)　力学的エネルギー保存則より[*9][*10]，

$$\frac{1}{2}mv^2 + qEx = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,, \qquad \therefore |v| = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{{v_0}^2 - \frac{2qE}{m}x}}\,.$$

(2)　x が最大となるとき $v = 0$ ゆえ，

$$x_{\max} = \underset{\sim\sim}{\frac{m{v_0}^2}{2qE}}\,.$$

(3)　$\phi = E \times$（距離）より，

$$\phi(x) = Ex + \bullet$$

と書ける．$x = x_0$ で $\phi = 0$ より，

$$\phi(x_0) = Ex_0 + \bullet = 0\,, \qquad \therefore \bullet = -Ex_0\,.$$

よって，

$$\phi(x) = \underset{\sim\sim\sim}{E(x - x_0)}\,.$$

---

*8 平行一様電場以外では，微小部分に対し近似的に成り立つ．

*9 運動方程式より，

$$ma = -qE\,, \qquad \therefore a = -\frac{qE}{m}\,.$$

加速度一定より，等加速度運動の位置・速度は，

$$\begin{cases} x(t) = 0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{qE}{m}\right)t^2\,, \\ v(t) = v_0 + \left(-\dfrac{qE}{m}\right)t\,, \end{cases}$$

と表され，この 2 式から t を消去すれば同じ結果を得る．

*10 物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \int_0^x (-qE)\,dx = -qEx\,.$$

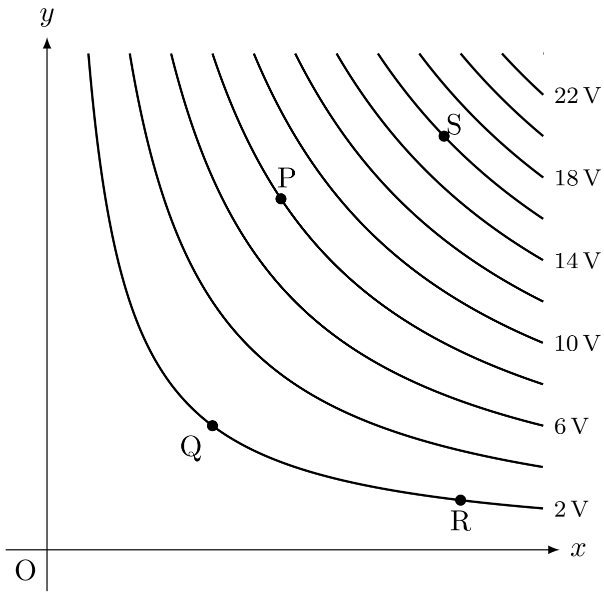
6. 等電位線

xy 平面上の電位分布を測定し，2 V 間隔で等電位線を描いたところ，図のようになった．等電位線の横に添えた数値は，等電位線上での電位の値である．原点において，点電荷に x 軸の正の向きに初速 v_0 を与えた．

(1)　$e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ の電荷を，クーロン力に逆らってゆっくりと運ぶとする．点 P から点 Q へと運ぶのに必要な仕事 W_{PQ}，点 Q から点 R へと運ぶのに必要な仕事 W_{QR}，点 R から点 S へと運ぶのに必要な仕事 W_{RS} をそれぞれ求めよ．

(2)　点 P を通る電気力線の概略を描け．

(3)　点 P 付近に図示してある等電位線の間隔は大体 0.25 m 程度である．このことから，点 P における電場の強さ E_{P} の近似値を求めよ．



【メモ】

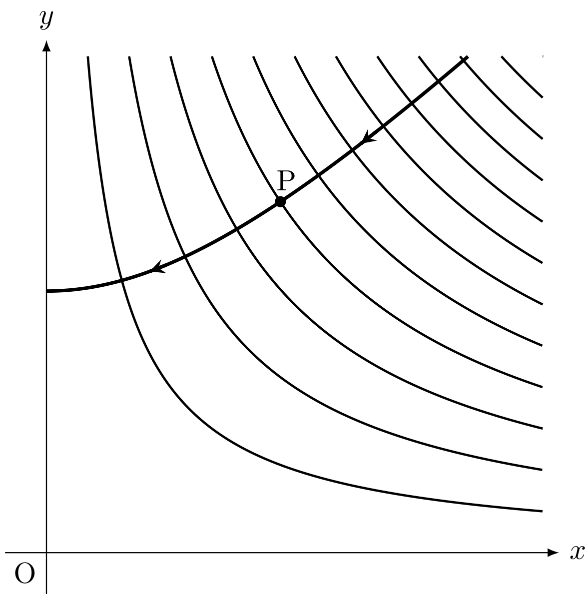
等電位線（面）と電気力線の性質の確認．また，力が先に在り，それに対して仕事や位置エネルギーが定義される．電気分野ではエネルギーありきで，力を逆算することも多く，等電位線はその典型的な例である．

【解答】

(1)　運ぶ際の電位の変化を $\varDelta\phi$ とすれば，電荷の位置エネルギーの変化 $e\varDelta\phi$ に等しい仕事が必要である[*11]．

$$W_{\mathrm{PQ}} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times(2-8)\,\mathrm{V} = \underline{-9.6\times10^{-19}\,\mathrm{J}}\,,$$
$$W_{\mathrm{QR}} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times(2-2)\,\mathrm{V} = \underline{0\,\mathrm{J}}\,,$$
$$W_{\mathrm{RS}} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times(16-2)\,\mathrm{V} \fallingdotseq \underline{2.2\times10^{-18}\,\mathrm{J}}\,.$$

(2)　電気力線は等電位線に直交し，高電位から低電位へ向かう向きである．



(3)　電場は電位の空間勾配に等しいので，

$$E_{\mathrm{P}} \fallingdotseq \frac{2.0\,\mathrm{V}}{0.25\,\mathrm{m}} = \underline{8.0\,\mathrm{V/m}}$$

*11 電荷の運動エネルギーに変化はないので，位置エネルギー変化が外力のする仕事と等しくなる．

7. ガウスの法則

空間に拡がる電場の様子は，次のような性質を満たす「電気力線」を用いて表すことができる．

① 接線の向きが，電場の向きを表す．

② 垂直な面を単位面積あたりに貫く本数が，電場の強さを表す．

(1) 電荷 $Q\,(>0)$ を持つ点電荷の周囲の電場について考えよう．この点電荷を中心とした半径 r の球面を貫く電気力線の本数を求めよ．ただし，クーロンの法則の比例定数を k_0 とする．

この結果を一般化して，

③ 電荷 Q から $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ 本の電気力線が湧き出す《ガウスの法則》

と言ってよいことがわかっている．ここで，ε_0 は真空の誘電率である．

(2) k_0 を，ε_0 を用いて表せ．

さらに，電気力線には，

④ 弛まず，同じ向きの電気力線同士は互いに反発する

という性質がある．

(3) 真空中において，十分に長い長さ ℓ の直線状に一様に電荷が分布していて，その電荷の総量は Q である．この場合，直線に十分近い点では，電気力線は直線に垂直に一様に出ていると見なせる．このことから，直線から距離 r の地点における電場の強さ $E(r)$ を求めよ．

(4) 真空中において，十分に広い面積 S の平面上に一様に電荷が分布していて，その電荷の総量は Q である．この場合，平面に十分近い点では，電気力線は平面に垂直に一様に出ていると見なせる．このことから，周囲の電場の強さ E を求めよ．

【メモ】

等電位線（面）と電気力線の性質の確認．また，力学が先に在り，それに対して仕事や位置エネルギーが定義される．電気分野ではエネルギーありきで，力を逆算することも多く，等電位線はその典型的な例である．

ガウス則に関して，一様に帯電した球の作る電場は授業内で扱ったものを参照．電位の計算や球殻コンデンサの容量などは，後期の補講で扱う．

【解答】

(1)　半径 r の球面上における電場は，球面に垂直に $E(r) = k_0\dfrac{Q}{r^2}$ ゆえ，貫く電気力線の本数は，

$$4\pi r^2 \times E(r) = 4\pi k_0 Q\,.$$

(2)　$4\pi k_0 Q = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ より，

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,.$$

(3)　この直線を中心軸として内部に含む円柱（半径 r，高さ ℓ）を考える．側面を貫く電気力線の本数を単位面積あたりに直すことにより，

$$E(r) = \frac{Q/\varepsilon_0}{2\pi\ell r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\ell}\frac{1}{r} = \frac{2k_0Q}{\ell}\frac{1}{r}\,.$$

(4)　電気力線が両面合わせて $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ 湧き出すことから，両面の面積 $S+S$ に注意して，

$$E = \frac{Q/\varepsilon_0}{2S} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{2\pi k_0 Q}{S}\,.$$

【補足】ガウスの法則の別の言い回し

ガウスの法則は，本文のように電気力線の本数によって導入し，それにより連続的な電荷分布の作る電場を計算するが，その計算結果は次のようにも解釈される[*12]：

$$（閉曲面上における電場の強さ）\times（閉曲面の面積）= \frac{（閉曲面内にある電荷の総量）}{（物質の誘電率）}$$

[*12] 物理の専門書では，「電気力線の本数」のような直接的な表現を持ち出さず，むしろこの【補足】によってガウスの法則が説明されることが多い．

8. 電荷分布の計算①

真空中において，等しい面積 S で動径の 2 枚の金属極板 A，B を平行に狭い間隔 d で向き合わせて固定してある．一般に，極板の各表面に分布する電荷を，A の上面は q_1，A の下面は q_2，B の上面は q_3，B の下面は q_4 とする．また，真空の誘電率を ε_0 とし，端の効果は無視する．

I　静電誘導によって，q_1，q_2，q_3，q_4 の間に成り立つべき関係式を求めよ．また，A の上方，A と B の間，および B の下方の電場の大きさを，それぞれ q_1，もしくは q_2 を用いて表せ．

金属板 A には電荷 Q_{A} を，金属板 B には電荷 Q_{B} を与えて，安定するまで待った．

II　$Q_{\mathrm{A}} = +Q$，$Q_{\mathrm{B}} = -Q$ のとき，q_1，q_2，q_3，q_4 を決定せよ．また，このときの AB 間の電場の大きさ E_{in}，および電位差（電圧）V_{AB} を求めよ．さらに，この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）C を求めよ．

III　続いて，AB 間のちょうど半分を比誘電率 ε_{r} の誘電体で満たした（図 1）．

(1)　A の真空の側に帯電している電荷を Q' とする．真空側に生じる AB 間の電場の大きさ E を求めよ．

(2)　Q' を求めよ．

(3) おまけ：このコンデンサの電気容量 C を求めよ．

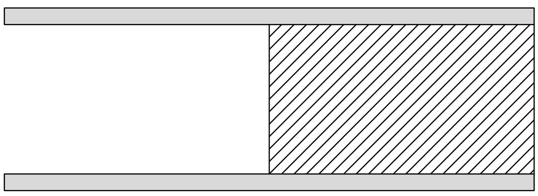


図 1

【メモ】

導体の電荷分布は，

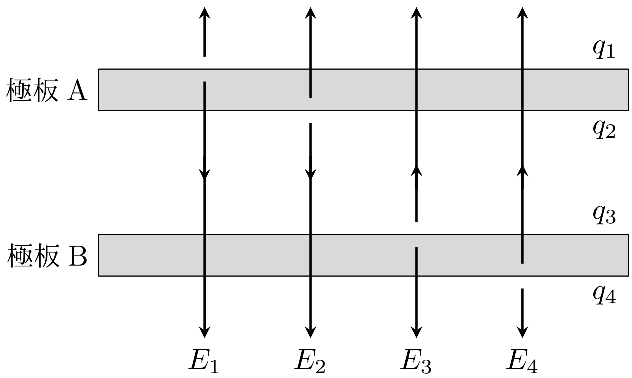
- 静電誘導
- 電荷保存則
- 電位差の関係（キルヒホッフ則）

に対応する条件式を必要なだけ立てれば一意に定まる．

コンデンサの容量は，電荷が極板間の電位差に比例する式を作ったときの比例定数から読み取る[*13]．ただし，コンデンサの容量のうち，平行平板コンデンサの容量はほとんど公式として暗記する．

【解答】

I　各電荷 q_i がつくる電場 $E_i = \dfrac{q_i}{2\varepsilon_0 S}$ の向きは下図のようになる．



静電誘導により，金属板 A，B 内の電場がゼロになるためには，

$$\begin{cases} \mathrm{A} : 0 = E_1 - E_2 - E_3 - E_4 = \dfrac{1}{2\varepsilon_0 S}(q_1 - q_2 - q_3 - q_4)\,, \\ \mathrm{B} : 0 = E_1 + E_2 + E_3 - E_4 = \dfrac{1}{2\varepsilon_0 S}(q_1 + q_2 + q_3 - q_4)\,. \end{cases}$$

これらから，

$$q_1 = q_4\,,\quad q_2 = -q_3\,.$$

II　$4\pi k_0 Q = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ より，

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,.$$

[*13] ガウスの法則より電場と電荷の対応が取れ，キルヒホッフの法則（電場と電位の関係）より，電場と電位差の対応が取れる．この 2 式から電荷と電位差の対応関係が得られる．

III　電荷保存則より，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: q_1 + q_2 = +Q\,, \\ \mathrm{B}: q_3 + q_4 = -Q\,. \end{cases}$$

したがって，

$$q_1 = \underset{\sim}{0}\,,\quad q_2 = \underset{\sim\sim}{+Q}\,,\quad q_3 = \underset{\sim\sim}{-Q}\,,\quad q_4 = \underset{\sim}{0}\,.$$

このとき，

$$E_{\mathrm{in}} = E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = \frac{q_2 - q_3}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon S}$$

となり，

$$V_{\mathrm{AB}} = E_{\mathrm{in}} d = \frac{Qd}{\varepsilon S}\,.$$

したがって，

$$Q = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \times V_{\mathrm{AB}}\,, \qquad \therefore C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\,.$$

IV (1)　ガウスの法則から，

$$E = \frac{2Q'}{\varepsilon_0 S}\,.$$

(2)　誘電体側に生じている電場の大きさ E' はガウスの法則から，

$$E' = \frac{2(Q - Q')}{\varepsilon_{\mathrm{r}} \varepsilon_0 S}\,.$$

ここで電荷保存則を用いた．

電場と電位の関係から，

$$V_{\mathrm{AB}} = \frac{2Q'd}{\varepsilon_0 S} = \frac{2(Q - Q')d}{\varepsilon_{\mathrm{r}} \varepsilon_0 S}\,.$$

したがって，

$$Q' = \frac{1}{1 + \varepsilon_{\mathrm{r}}} Q\,.$$

(3)　(2) より，

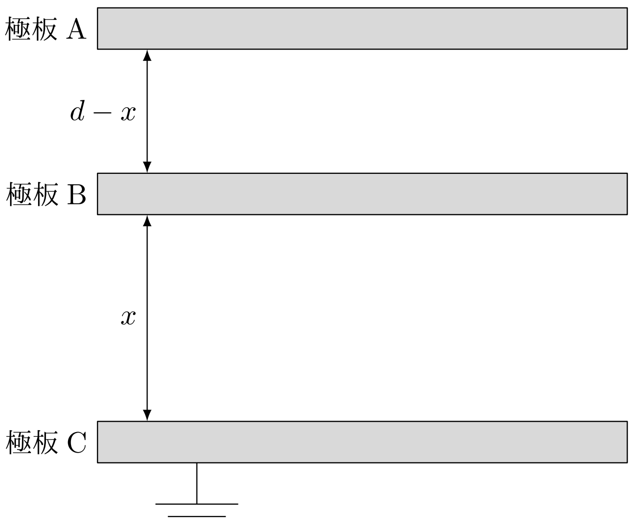
$$C_3 = \frac{Q}{V_{\mathrm{BA}}} = \varepsilon_0 (1 + \varepsilon_{\mathrm{r}}) \frac{S}{2d}\,.$$

9. 電荷分布の決定②

図のように，真空中において，等しい面積 S で動径の 3 枚の金属極板 A，B，C を平行に狭い間隔で向き合わせてある．極板 A と極板 B の間隔は $d-x$，極板 B と極板 C の間隔は x であり，極板 B を他の極板と平行な状態を保ちながら動かすことにより，x の値を $0<x<d$ の範囲で変えることができる．また，極板 C は接地（アース）されており，はじめ，全ての極板は帯電していない．真空の誘電率を ε_0 とし，端の効果は無視する．

(1)　$x=x_0\,(0<x_0<d)$ となる位置に B を固定し，B に電荷 $Q_0\,(>0)$ を与えたところ，B の下側表面に電荷 $+Q_0$，C の上側表面に電荷 $-Q_0$ が分布した．このときに B と C の間に生じている電場の強さ E_0，および BC 間の電位差（電圧）V_0 を求めよ．

(2)　極板 B を $x=x_0$ となる位置に固定したまま，極板 A と C を導線でつなぎ，安定するまで待った．このとき，極板 A に蓄えられた電荷 q_{A}，および極板 C に蓄えられた電荷 q_{C} を求めよ．



【メモ】

金属板が何枚になろうとも，電荷分布の決定の原理は変わらない．なお，回路上の 2 点間を導線でつなぐことは，つないだ 2 点間の電位差をゼロにする（等電位にする）ことを意味する．また，アース（接地）とは，地球（巨大で帯電の無視できる導体）と導線でつなぐことを指し，アースした点を電位の基準点に定める慣習がある．

【解答】

(1)　ガウスの法則，および電場と電位の関係（キルヒホッフ則）より，

$$E_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{Q_0}{\varepsilon_0 S}}\,,\quad V_0 = E_0 x_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{Q_0}{\varepsilon_0 S} x_0}\,.$$

(2)　このとき，静電誘導により，A の下側表面に電荷 q_{A}，B の上側表面に電荷 $-q_{\mathrm{A}}$，B の下側表面に電荷 $-q_{\mathrm{C}}$，C の上側表面に電荷 q_{C} が分布する[*14]．B に関する電荷保存則より，

$$-q_{\mathrm{A}} - q_{\mathrm{C}} = Q_0\,.$$

また，A と C が等電位になるため $V_{\mathrm{BA}} = V_{\mathrm{BC}}$ より，

$$\frac{q_{\mathrm{A}}}{\varepsilon_0 S}(d - x_0) = \frac{q_{\mathrm{C}}}{\varepsilon_0 S} x_0\,.$$

よって，

$$q_{\mathrm{A}} = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{x_0}{d} Q_0}\,,\quad q_{\mathrm{C}} = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{d - x_0}{d} Q_0}\,.$$

【補足】(2) の電荷分布をテイネイに計算する

極板 A，B，C の上面，下面に帯電する電気量をそれぞれ q_1，q_2，q_3，q_4，q_5，q_6 とし，AB の間隔を x，BC の間隔を y とする．

電荷保存則から，

$$q_3 + q_4 = Q_0\,.$$

導体内部の電場が 0 であることから，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: \dfrac{1}{2\varepsilon_0 S}(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6) = 0\,, \\ \mathrm{B}: \dfrac{1}{2\varepsilon_0 S}(-q_1 - q_2 - q_3 + q_4 + q_5 + q_6) = 0\,, \\ \mathrm{C}: \dfrac{1}{2\varepsilon_0 S}(-q_1 - q_2 - q_3 - q_4 - q_5 + q_6) = 0\,. \end{cases}$$

[*14] コンデンサを形成するため，電荷が対となって現れる．この事実は常識にしておきたい．なお，実際に計算して確かめたものは補足を参照．

AB 間の電位差と BC 間の電位差が等しいことから[*15],

$$\frac{1}{2\varepsilon_0 S}(-q_1-q_2+q_3+q_4+q_5+q_6)x=\frac{1}{2\varepsilon_0 S}(q_1+q_2+q_3+q_4-q_5-q_6)y\,.$$

極板 C にアース（ここではこれを地面とする）を接続していることから，C と地面は等電位であり，極板 C と地面の間の距離を z として，この間の電場から電位差を考えれば,

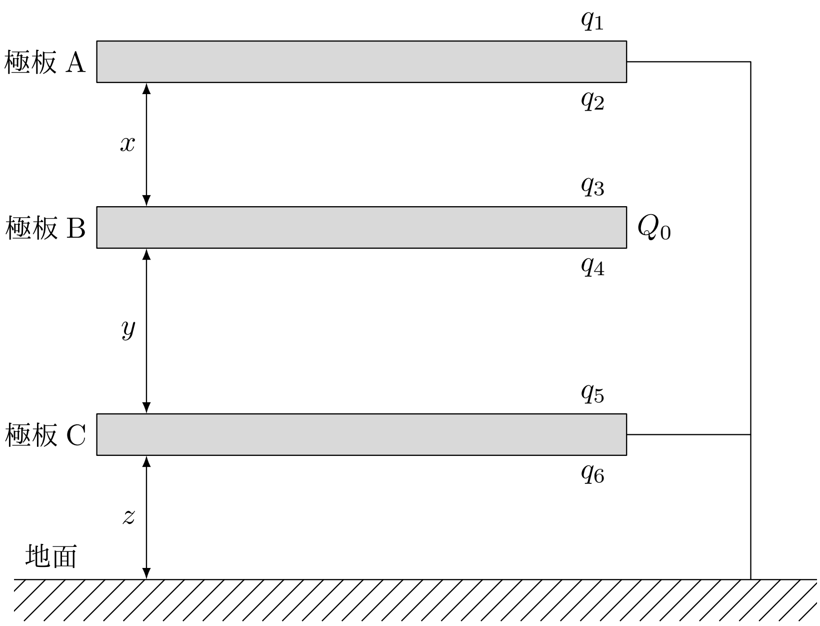
$$\frac{1}{2\varepsilon_0 S}(q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6)z=0\,.$$

以上より[*16],

$$\begin{cases} q_3+q_4=Q_0\,, \\ -q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6=0\,, \\ -q_1-q_2-q_3+q_4+q_5+q_6=0\,, \\ -q_1-q_2-q_3-q_4-q_5+q_6=0\,, \\ -q_1-q_2+q_3+q_4+q_5+q_6=\dfrac{y}{x}(q_1+q_2+q_3+q_4-q_5-q_6)\,, \\ q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6=0\,. \end{cases}$$

$$\therefore q_1=q_6=0\,,\quad q_3=-q_2=\frac{y}{x+y}Q_0\quad q_4=-q_5=\frac{x}{x+y}Q_0\,.$$

結果から，極板の向かい合う面には，大きさの等しい異符号の電荷が帯電していることを確認できる.



[*15] B から A, または C に向かう向きの電場で計算している.

[*16] $x=d-x_0$，$y=x_0$ とすれば解答を再現する.

§3.2 回路素子の中身

この章では，回路素子の中身として，電気抵抗の抵抗のモデル，コンデンサの内部構造（こちらが主）について扱う．ここでは，平行平板コンデンサに関する公式を覚えたい（次章にすべての素子に関するまとめを載せる）．

■簡単なまとめ

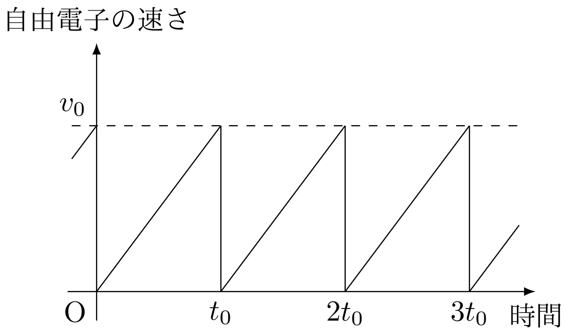
- コンデンサに関する諸々：
  ❶ 静電容量：$C = \varepsilon \dfrac{S}{d}$
  ❷ 電位降下：$V = \dfrac{Q}{C}$
  ❸ 蓄える（静電）エネルギー：$U = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$
  ❹ 帯電金属板の作る電場：$E = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$
- 起電力が一定の電池のする仕事：$W =$（通過電荷）$\times$（起電力）
  起電力が時間に依存する場合は次章の表を参照.

1. 抵抗

電気回路に用いる抵抗器にはオームの法則が成り立っている．オームの法則を電子の運動によって考察してみよう．

断面積 S，長さ ℓ の導体棒の両端に電圧 V をかける．導体棒に起電力をかけることで導体棒内部には導体棒に沿った方向に電場が生じ，その電場の強さ E は $E = \boxed{\text{ア}}$ である．導体内部の自由電子（質量 m，電荷 $-e<0$，電子数密度*17 n）は，この電場から静電気力を受けることで初速度 0，加速度の大きさ $a = \boxed{\text{イ}}$ の等加速度運動を始める．

今，図のように，加速された自由電子は一定の時間間隔 t_0 で陽イオンと衝突し，再び速度が 0 となる運動を繰り返していると考える．このとき，導体内を流れる電子集団の速度 $\langle v\rangle$ は各電子の平均速度に等しく $\langle v\rangle = \boxed{\text{ウ}}$ であり，導体棒には大きさ $I = \dfrac{V}{\boxed{\text{エ}}}$ の電流が流れる．以上より，電流 I と導体棒の両端の電位差 V は比例関係にあり，その比例定数 $R = \boxed{\boxed{\text{エ}}}$ を電気抵抗（または単に抵抗）と呼び，R は $R = \boxed{\text{オ}}\,\dfrac{\ell}{S}$ のように書くことができる．この $\rho = \boxed{\boxed{\text{オ}}}$ を抵抗率と呼ぶ．



【解答】

電場と電位の関係から $E = \underset{\text{ア}}{\underline{\dfrac{V}{\ell}}}$ であり，運動方程式より，

$$ma = eE\,,\qquad \therefore a = \underset{\text{イ}}{\underline{\frac{eV}{m\ell}}}\ .$$

したがって，等加速度運動より，このモデルでの電子集団の速度は，

$$\langle v\rangle = \frac{0+v_0}{2} = \underset{\text{ウ}}{\underline{\frac{eVt_0}{2m\ell}}}\ .$$

以上から，電流の定義より，

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{eS\langle v\rangle \Delta t n}{\Delta t} = \frac{e^2 S n t_0 V}{2m\ell}\,,\qquad \therefore R = \underset{\text{エ}}{\underline{\frac{2m}{e^2 n t_0}}}\,\frac{\ell}{S}\,,\quad \rho = \underset{\text{オ}}{\underline{\frac{2m}{e^2 n t_0}}}\ .$$

*17 単位体積当たりの電子数．

2. コンデンサ①

真空中において，等しい面積 S で同形の 2 枚の金属極板 A，B を平行に狭い間隔 d で向き合わせて固定してある．金属板 A には電荷 $Q\,(>0)$ を，金属板 B には電荷 $-Q$ を与えて，安定するまで待った．真空の誘電率を ε_0 とし，端の効果は無視する．また，極板と垂直な方向に y 軸を定め，金属板 B を $y=0$，金属板 A を $y=d$ とし，金属板 B の電位 ϕ を $\phi_{\mathrm{B}}=\phi(0)=0$ とする．

I　AB 間の電場の大きさ E，および電位差（電圧）V_{AB} を求めよ．さらに，この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）$C(d)$，コンデンサが蓄える静電エネルギー $U(d)$ を求めよ．

II　極板に外力を加え，極板間隔を $d+\varDelta d$ とした．

(1)　この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）$C(d+\varDelta d)$ を求めよ．

(2)　コンデンサが蓄えている静電エネルギー $U(d+\varDelta d)$ を求めよ．

(3)　外力がした仕事 W_{ex} を求めよ．

(4)　全問の結果を利用して，極板間引力の大きさ f を求めよ．

III　極板間に，面積 S，厚さ $x\,(0<2x<d)$ の帯電していない金属板を，極板 B との間隔が x となる位置に挿入した．

(1)　この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）C を求めよ．また，コンデンサが蓄えている静電エネルギー U を求めよ．

(2)　金属板を挿入するのに要した仕事 W_{ex} を求めよ．

(3)　極板と垂直な方向に y 軸を定める．極板間の電場の強さ E，および電位 ϕ について，$E-y$ グラフ，$\phi-y$ グラフを図示せよ．

IV　極板間に，面積 S，厚さ $x\,(0<x<d)$ の誘電体（誘電率 ε）を，極板 B との間隔が x となる位置に挿入した．

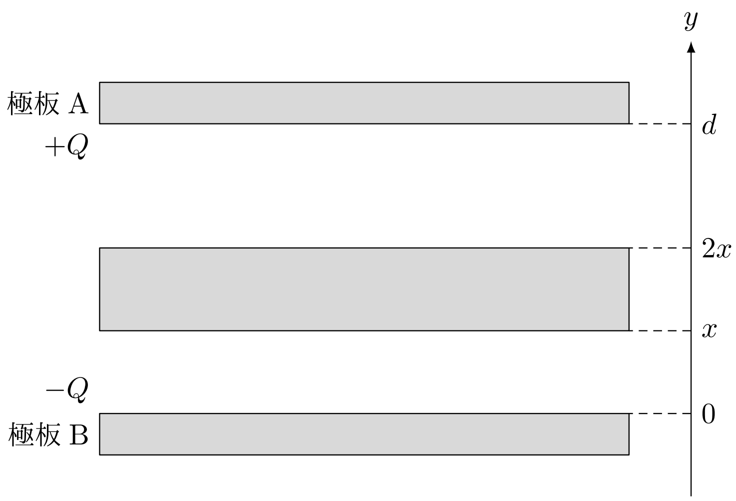
(1)　誘電体内部では誘電分極が起こり，誘電体内部の電場は，分極電荷によって生じた電場と外部電場の合成電場となる．誘電体内部の電場の強さ $E_{\text{内部}}$ を，Q，S，ε を用いて表せ．

(2)　分極電荷 δ を，ε_0，ε，Q を用いて表せ．

(3)　この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）C を求めよ．また，コンデンサが蓄えている静電エネルギー U を求めよ．

(4)　誘電体を挿入するのに要した仕事 W_{ex} を求めよ．

(5)　極板と垂直な方向に y 軸を定める．極板間の電場の強さ E，および電位 ϕ について，$E-y$ グラフ，$\phi-y$ グラフを図示せよ．



【メモ】

金属板は孤立しているため，電荷は保存する（常に一定の値となる）．コンデンサの容量の決定はその形状に依らず，「ガウス則から E を決定」→「電場と電位の関係から電荷 Q と電位差 V の関係式を作る」→「係数が C」で行う．なお，平行平板コンデンサの容量については公式も覚える．

【解答】

I　静電誘導より，電荷は向かい合う面の表面に分布する．ガウスの法則より，

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\,.$$

電位差は，電場と電位の関係から，

$$V_{\mathrm{AB}} = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}\,.$$

よって，

$$Q = \varepsilon_0 \frac{S}{d} V_{\mathrm{AB}}\,, \qquad \therefore C(d) = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\,.$$

また，公式より，

$$U(d) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(d)} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} d\,.$$

II (1)　公式より，

$$C(d+\varDelta d) = \varepsilon_0 \frac{S}{d+\varDelta d}\,.$$

(2)　公式より，

$$U(d+\varDelta d) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(d+\varDelta d)} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}(d+\varDelta d)\,.$$

(3)　系のエネルギー収支より，

$$W_{\mathrm{ex}} = \varDelta U = U(d+\varDelta d) - U(d) = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\varDelta d\,.$$

(4)　仕事の定義より，外力 f_{ex} は，

$$f_{\mathrm{ex}}\mathit{\Delta} d = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\mathit{\Delta} d\,, \qquad \therefore f_{\mathrm{ex}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\,.$$

外力は極板間引力とつりあっているので，

$$f = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}}\,.$$

III (1)　静電誘導より，電荷は向かい合う面の表面に分布し，全てその絶対値は Q となる．したがって，極板間の電場の強さ E は等しく，ガウスの法則より，

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\,.$$

電位差は，電場と電位の関係から，

$$V_{\mathrm{AB}} = E\cdot(d-2x) + E\cdot x = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}(d-x)\,.$$

よって[*18]，

$$Q = \varepsilon_0\frac{S}{d-x}V_{\mathrm{AB}}\,, \qquad \therefore C = \varepsilon_0\underset{\sim\sim\sim}{\frac{S}{d-x}}\,.$$

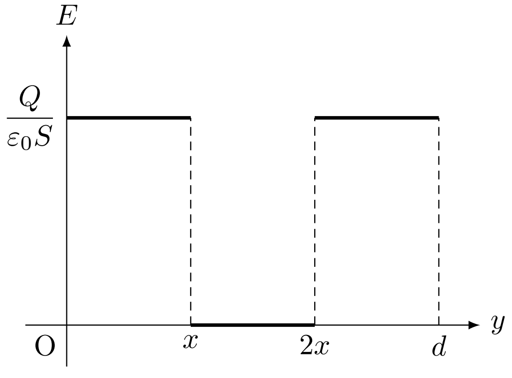
静電エネルギーは公式より，

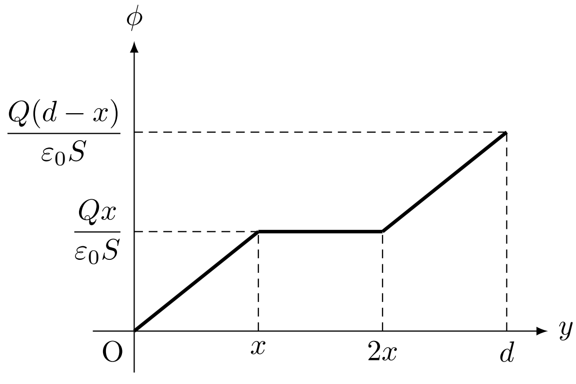
$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}(d-x)\,.$$

(2)　系のエネルギー収支より，

$$W_{\mathrm{ex}} = \mathit{\Delta} U = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}x}\,.$$

(3)　グラフは，それぞれ以下のようになる．





*18 一般に，極板間に帯電していない金属板を挿入した場合，コンデンサの容量は，金属板の厚さを除いた部分で容量の公式を利用した値となる．

IV (1)　公式より[19]，

$$E = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\cdot 2 = \frac{Q}{\varepsilon S}\,.$$

(2)　分極電荷 δ は極板とは正負逆に帯電し，その電場は y 軸正の向きに生じる．よって，

$$-\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\cdot 2 + \frac{\delta}{2\varepsilon_0 S}\cdot 2 = -\frac{Q}{\varepsilon S}\,, \qquad \therefore \delta = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)Q\,.$$

(3)　極板間の電位差は，

$$V = E\cdot(d-2x) + E_{\text{内部}}\cdot x + E\cdot x = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}(d-x) + \frac{Q}{\varepsilon S}x = \frac{Q}{S}\left(\frac{d-x}{\varepsilon_0} + \frac{x}{\varepsilon}\right)\,.$$

よって，

$$C = \varepsilon_0\varepsilon\frac{S}{\varepsilon(d-x)+\varepsilon_0 x}\,.$$

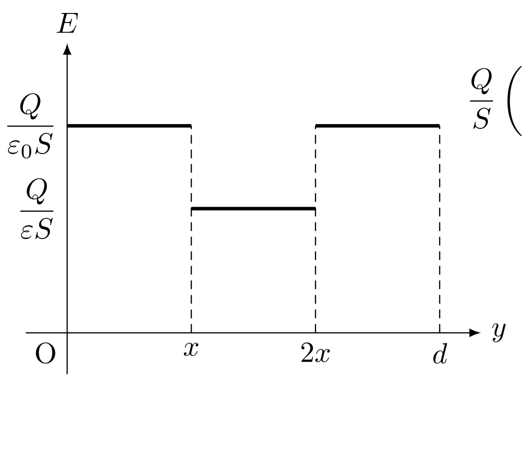
静電エネルギーは公式より，

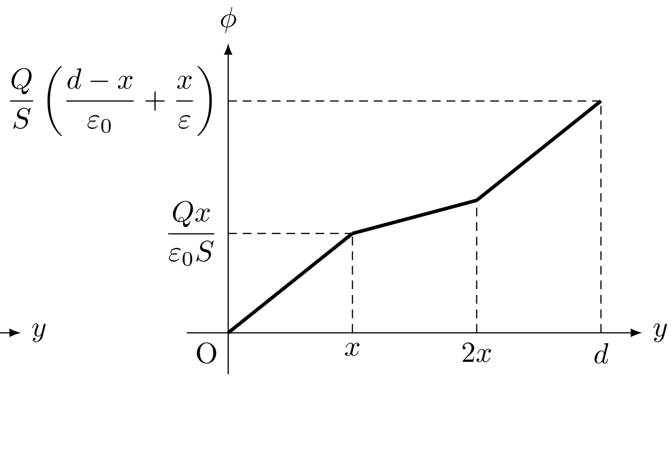
$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2\{\varepsilon(d-x)+\varepsilon_0 x\}}{2\varepsilon_0\varepsilon S}\,.$$

(4)　系のエネルギー収支より，

$$W_{\mathrm{ex}} = \varDelta U = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q^2 x}{2\varepsilon_0\varepsilon S}\,.$$

(5)　グラフは，それぞれ以下のようになる．





[19] 電場 E 中に置いた誘電体内部の電場は，$E_{\text{内部}} = \dfrac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}E$（ただし $\varepsilon_{\mathrm{r}} = \varepsilon/\varepsilon_0$）となる．

3. コンデンサ②

真空中において，等しい面積 S で同形の 2 枚の金属極板 A，B を平行に狭い間隔 d で向き合わせて固定してある．両金属板に，A 側が高電位でかつ極板間の電位差が V となるように起電力を接続した．真空の誘電率を ε_0 とし，端の効果は無視する．

I　AB 間の電場の大きさ $E(d)$，および極板 A に帯電している電気量 $Q_\mathrm{A}(d)$ を求めよ．さらに，この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）$C(d)$，コンデンサが蓄える静電エネルギー $U(d)$ を求めよ．

II　極板に外力を加え，極板間隔を $d + \mathit{\Delta} d\,(\mathit{\Delta} d \ll d)$ とした．

(1)　この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）$C(d + \mathit{\Delta} d)$ を求めよ．

(2)　極板間隔を拡げる間のコンデンサが蓄えている静電エネルギーの変化量 $\mathit{\Delta} U$ を $\mathit{\Delta} d$ に比例する形で表せ．

(3)　極板間隔を拡げる間に電池がした仕事 W_ba を $\mathit{\Delta} d$ に比例する形で表せ．

(4)　外力がした仕事 W_ex を $\mathit{\Delta} d$ に比例する形で表せ．

(5)　全問の結果を利用して，極板間引力の大きさ f を求めよ．

III　極板間に，面積 S，厚さ $x\,(x \ll d)$ の帯電していない金属板を挿入した．

(1)　この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）C を求めよ．

(2)　金属板を挿入した間のコンデンサが蓄えている静電エネルギーの変化量 $\mathit{\Delta} U$ を x に比例する形で表せ．

(3)　金属板を挿入した間に電池がした仕事 W_ba を x に比例する形で表せ．

(4)　金属板を挿入するのに外力がした仕事 W_ex を x に比例する形で表せ．

(5)　金属板を挿入する際，金属板は引きずり込まれるか，押し出されるか，理由とともに述べよ．

IV　極板を正方形（面積 $S = a^2$）とし，x 軸を極板の左端を原点に水平右向きに定める．極板間に，面積が等しく厚さ d の正方形の誘電体（比誘電率 ε_{r}）に外力を加え，原点から位置 x までゆっくりと挿入した（図参照）．

(1)　A の真空の側に帯電している電荷を q_1，誘電体側に帯電している電荷を q_2 とする．q_1，q_2 を求めよ．

(2)　この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）$C(x)$ を求めよ．

(3)　コンデンサが蓄えている静電エネルギー $U(x)$ を求めよ．

(4)　誘電体を位置 x から $x + \Delta x$ まで挿入するのに要した仕事 W_{ex} を求めよ．

(5)　誘電体がコンデンサから受ける力を f とする．$f - x$ グラフを，$0 \leq x \leq 2d$ の範囲で図示せよ．

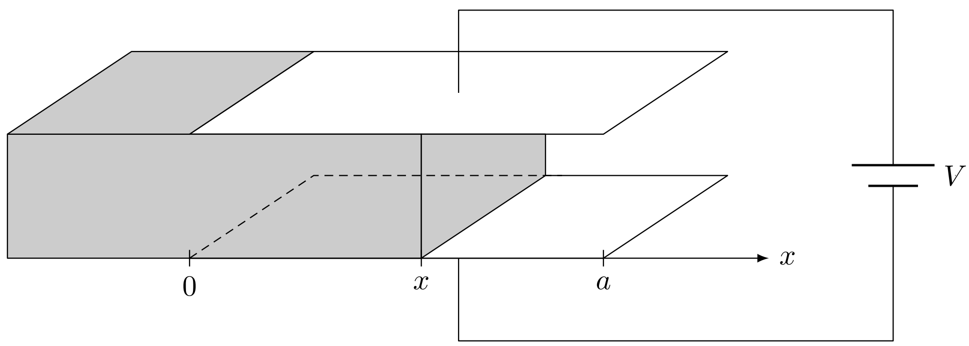


図 1

【メモ】

金属板両端の電位差（電圧）は V で保たれる[*20].

【解答】

I　静電誘導より，電荷は向かい合う面の表面に分布する．ガウスの法則より，

$$E(d) = \frac{Q_{\mathrm{A}}}{\varepsilon_0 S}\,.$$

キルヒホッフ則より（電位差を 2 通りで表現して）[*21]，

$$V = Ed = \frac{Q_{\mathrm{A}} d}{\varepsilon_0 S}\,, \qquad \therefore E(d) = \frac{V}{d}\,,\quad Q_{\mathrm{A}}(d) = \varepsilon_0 \frac{S}{d} V\,,\quad C(d) = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\,.$$

また，公式より，

$$U(d) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2d}\,.$$

II (1)　公式より，

$$C(d + \Delta d) = \varepsilon_0 \frac{S}{d + \Delta d}\,.$$

なお，この結果よりコンデンサに帯電している電気量はキルヒホッフ則より，

$$V = \frac{Q}{C}\,, \qquad \therefore Q = \varepsilon_0 \frac{S}{d + \Delta d} V\,.$$

(2)　公式より，

$$\Delta U = U(d + \Delta d) - U(d) = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2d}\left\{\left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right)^{-1} - 1\right\} \fallingdotseq -\frac{\varepsilon_0 S V^2}{2d^2}\Delta d\,.$$

(3)　電池のする仕事 W_{ba} は，

$$W_{\mathrm{ba}} = \Delta Q V = \varepsilon_0 \frac{S}{d} V^2 \left\{\left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right)^{-1} - 1\right\} \fallingdotseq -\frac{\varepsilon_0 S V^2}{d^2}\Delta d\,.$$

(4)　系のエネルギー収支より，

$$W_{\mathrm{ex}} + W_{\mathrm{ba}} = \Delta U\,, \qquad \therefore W_{\mathrm{ex}} = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2d^2}\Delta d\,.$$

[*20] コンデンサの中身を見るような問題は，Q か V のどちらかが一定で設定が与えられる．

[*21] B には $-Q_{\mathrm{A}}$ 帯電する．

(5)　仕事の定義より，外力 f_{ex} は，

$$f_{\mathrm{ex}}\varDelta d=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}\varDelta d\,,\qquad \therefore f_{\mathrm{ex}}=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}\,.$$

外力は極板間引力とつりあっているので[*22]，

$$f=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}\,.$$

III (1)　静電誘導より，電荷は向かい合う面の表面に分布し，その絶対値を Q とする．極板間の電場の強さ E は等しく，ガウスの法則より，

$$E=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\,.$$

電位差は，電場と電位の関係から，

$$V_{\mathrm{AB}}=V=E\cdot(d-2x)+E\cdot x=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}(d-x)\,.$$

よって[*23]，

$$Q=\varepsilon_0\frac{S}{d-x}V_{\mathrm{AB}}\,,\qquad \therefore C=\varepsilon_0\frac{S}{d-x}\,.$$

(2)　公式より，

$$\varDelta U=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 SV^2}{d-x}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 SV^2}{d}=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d}\left\{\left(1-\frac{x}{d}\right)^{-1}-1\right\}\fallingdotseq\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}x\,.$$

(3)　電池のする仕事 W_{ba} は，

$$W_{\mathrm{ba}}=\varDelta QV=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{d-x}-\frac{\varepsilon_0 SV^2}{d}=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{d}\left\{\left(1-\frac{x}{d}\right)^{-1}-1\right\}\fallingdotseq\frac{\varepsilon_0 SV^2}{d^2}x\,.$$

(4)　系のエネルギー収支より，

$$W_{\mathrm{ex}}+W_{\mathrm{ba}}=\varDelta U\,,\qquad W_{\mathrm{ex}}=-\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}x\,.$$

(5)　外力のする仕事が負の値を取ることから，引きずり込まれる．

[*22] 各自 2II の結果と整合していることを確認せよ．

[*23] 一般に，極板間に帯電していない金属板を挿入した場合，コンデンサの容量は，金属板の厚さを除いた部分で容量の公式を利用した値となる．

IV (1)　キルヒホッフの法則より，

$$V=\frac{q_1}{\varepsilon_0 a(a-x)}d=\frac{q_2}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 ax}d,\qquad \therefore q_1=\varepsilon_0\frac{a(a-x)}{d}V\,,\quad q_2=\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\frac{ax}{d}V\,.$$

(2)　前問の結果より，

$$Q(x)=q_1+q_2=\varepsilon_0\frac{a^2}{d}\left\{1+(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\frac{x}{a}\right\}V\,,\qquad C(x)=\varepsilon_0\frac{a^2}{d}\left\{1+(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\frac{x}{a}\right\}.$$

(3)　公式より，

$$U(x)=\frac{1}{2}\frac{Q(x)^2}{C(x)}=\frac{\varepsilon_0 a^2V^2}{2d}\left\{1+(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\frac{x}{a}\right\}.$$

(4)　この間の静電エネルギー変化 $\mathit{\Delta} U$ は，

$$\mathit{\Delta} U=U(x+\mathit{\Delta} x)-U(x)=(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\varepsilon_0\frac{aV^2}{2d}\mathit{\Delta} x\,.$$

電池のする仕事 W_{ba} は，

$$W_{\mathrm{ba}}=\mathit{\Delta} QV=(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\varepsilon_0\frac{aV^2}{d}\mathit{\Delta} x\,.$$

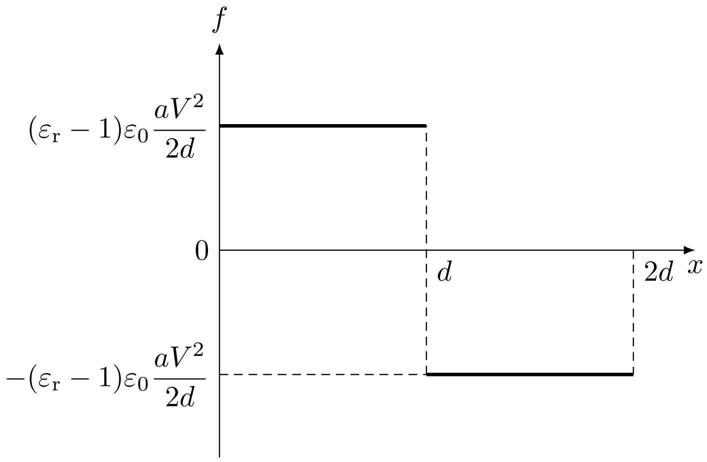
よって，系のエネルギー収支より，

$$W_{\mathrm{ex}}+W_{\mathrm{ba}}=\mathit{\Delta} U\,,\qquad \therefore W_{\mathrm{ex}}=-(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\varepsilon_0\frac{aV^2}{2d}\mathit{\Delta} x\,.$$

(5)　前問の結果より，誘電体が引きずり込まれる力の大きさ $|f|$ は位置 x に依らず，

$$|f|=(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\varepsilon_0\frac{aV^2}{2d}\,.$$

したがって，$f-x$ グラフは以下のようになる．



4. コンデンサ③

真空中に電荷 $Q > 0$ を帯電させた半径 a の導体球 A を置く．導体球の周囲の電場の大きさ E と電位 ϕ について考察する．導体球の中心を O とし，真空の誘電率を ε_0 とする．O からの距離を r としたとき，電位 ϕ の基準点を $r \to \infty$（無限遠）に定め，電位 ϕ は電場の大きさ E から $\phi = -\int_{\text{基準点}}^{r} E\,dr$ と計算できることを用いてよい．

I　導体球 A のみの状態を考える．このとき，O を中心として放射状に電気力線が湧き出している．

(1)　ガウスの法則を考え，位置 r における電場の大きさ E を求め，グラフに図示せよ．なお，導体球の内外で場合分けして考える必要があることに留意せよ．

(2)　位置 r における電位 ϕ を求め，グラフに図示せよ．

II　続いて，導体球 A とその中心を重ねて，内径 $b\,(> a)$，外径 $c\,(> b)$ の球殻状導体 B を A の周りに固定した場合を考える（図 2 − 1）．B は帯電していない．

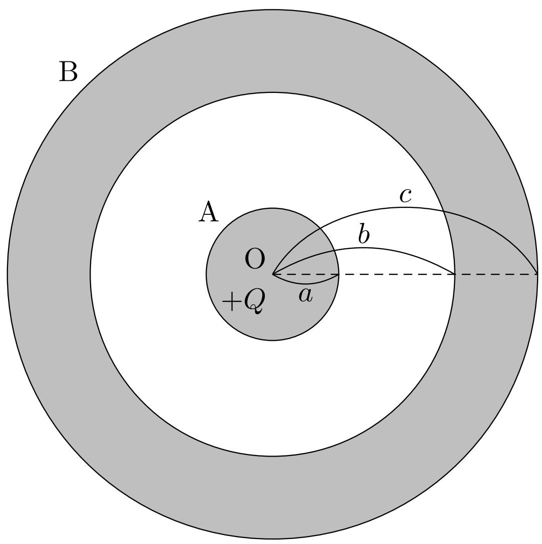
(1)　B の内側表面の帯電量を q_1，外側表面の帯電量を q_2 とする．電荷保存則から q_1，q_2 の間に成り立つ関係式を立式せよ．

(2)　ガウスの法則を考え，位置 r における電場の大きさ E を立式し．導体内部の電場が 0 となることから q_1，q_2 を求めよ．また，q_1，q_2 を電場の大きさ E へ代入し，位置 r における電場の大きさ E を求め，グラフに図示せよ．

(3)　位置 r における電位 ϕ を求め，グラフに図示せよ．

(4)　A と B の内側表面はコンデンサと見なせる．このコンデンサの電気容量 C を求めよ．

III　実は，導体球 A だけでもコンデンサと見なすことができる（無限遠と対をなすと見る）．II(4) の結果を利用し，このコンデンサの容量 C を求めよ．


B
A
O
+Q
a
b
c

【解答】

I (1)　O を中心とした半径 r の球面を考える．導体内部は電場がないことから $r \leq a$ では内部電荷 0，$a < r$ では内部電荷 Q ゆえガウス則より，

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{内部}}}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (a \leq r) \end{cases}.$$

(2)　電場と電位の関係より，$r \geq a$ では，

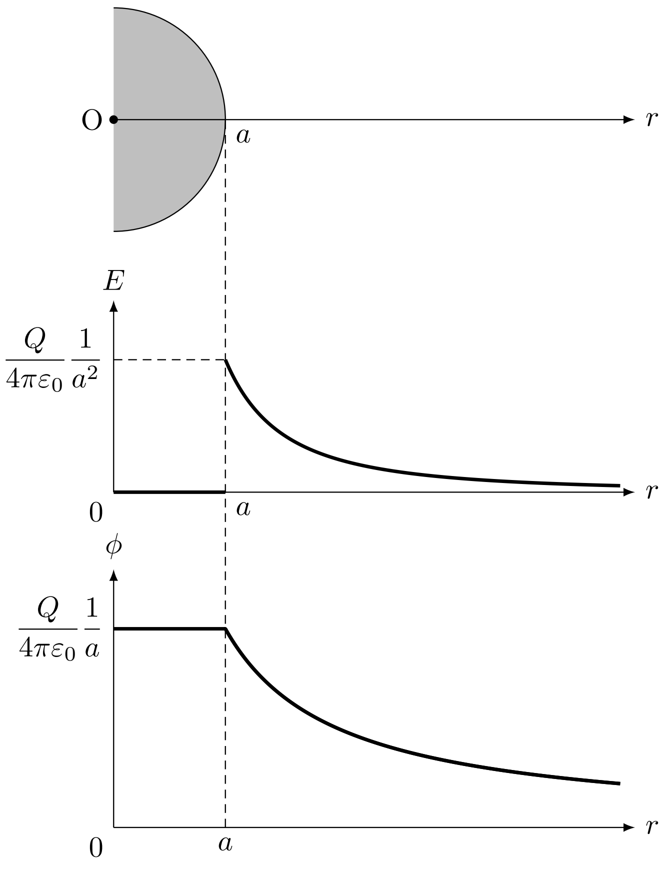
$$\phi = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

同様に $0 < r < a$ では，

$$\phi = -\int_{\infty}^{r} E\,dr = -\int_{\infty}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr - \int_{a}^{r} 0\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}.$$

以上をまとめて，

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{a} & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (a \leq r) \end{cases}.$$



II (1)　電荷保存則より，

$$q_1 + q_2 = 0\,.$$

(2)　ガウス則より，

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{内部}}}{\varepsilon_0}\,, \qquad \therefore E = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (a \le r < b) \\ \dfrac{Q+q_1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (b \le r < c) \\ \dfrac{Q+q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (c \le r) \end{cases}\,.$$

導体内部の電場は静電誘導によって 0 となるため，

$$\frac{Q+q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = 0\,, \qquad \therefore q_1 = -Q\,.$$

電荷保存則より $q_2 = Q$ であり，これを踏まえれば，

$$E = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (a \le r < b) \\ 0 & (b \le r < c) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (c \le r) \end{cases}\,.$$

(3)　電場と電位の関係より，$r \ge c$ では，

$$\phi = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,.$$

同様に，$b \le r < c$ では，

$$\begin{aligned} \phi &= -\int_\infty^r E\,dr \\ &= -\int_\infty^c \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr - \int_c^r 0\,dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c}\,. \end{aligned}$$

$b \le r < a$ では，

$$\begin{aligned} \phi &= -\int_\infty^r E\,dr \\ &= -\int_\infty^c \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr - \int_c^b 0\,dr - \int_b^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\,. \end{aligned}$$

$0 < r \leq a$ では，

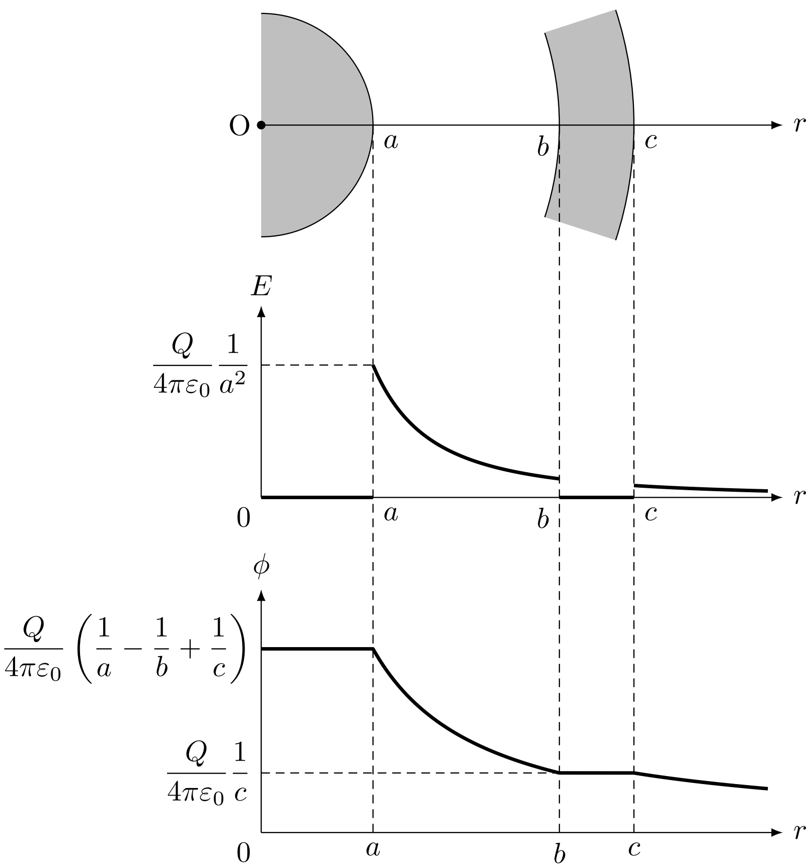
$$\begin{aligned}\phi &= -\int_{\infty}^{r} E\,dr \\ &= -\int_{\infty}^{c} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr - \int_{c}^{b} 0\,dr - \int_{b}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr - \int_{a}^{r} 0\,dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).\end{aligned}$$

以上をまとめて，

$$\underset{\sim\sim\sim}{\phi = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) & (a \leq r < b) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{c} & (b \leq r < c) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (c \leq r) \end{cases}}.$$

(4)　A と B 表面の電位差 $\mathit{\Delta}\phi$ を求めて，

$$\mathit{\Delta}\phi = \phi(a) - \phi(b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}Q, \qquad \therefore C = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}.$$



III　$b \to \infty$ として，

$$C = \lim_{b\to\infty} 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1 - a/b} = 4\pi\varepsilon_0 a\,.$$

§3.3 電気回路

この章では，電池，抵抗，コンデンサ，例外素子（電球，ダイオード）からなる電気回路を扱う．高校範囲で使う全ての素子の性質については隣のページにすべてまとめてある．

■簡単なまとめ

- 電気回路の状態は，

$$\left\{\begin{array}{l}\text{キルヒホッフ則}\\ \text{電荷保存則}\\ \text{回路素子の性質}\end{array}\right.$$

によって一意に定まる．方程式の未知数は，コンデンサに蓄えられる電荷 Q，または回路に流れる電流 I を取ればよい．なお，コンデンサに流れ込む電流 I は，コンデンサに蓄えられる電荷 Q と $I = \pm\dfrac{dQ}{dt}$ の関係付く（符号は電流の向きのとり方に依る）．

回路を構成する素子の扱い

■抵抗

- 電位降下　→　$V = RI$　（なお，$R = \rho \dfrac{d}{S}$）
- エネルギー　→　ジュール熱 J として消費

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I\text{ 一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I\text{ 一定でないとき}). \end{cases}$$

■コンデンサ

- 電位降下　→　$V = \dfrac{Q}{C}$　（なお，$C = \varepsilon \dfrac{S}{d}$）
- エネルギー　→　静電エネルギー $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$ を蓄える．
- 素子の性質　→　「十分時間経過」で $Q = $（一定），コンデンサに流れ込む $I = 0$.

■コイル

- 電位降下　→　$V = L\dfrac{dI}{dt}$
- エネルギー　→　エネルギー $U = \dfrac{1}{2}LI^2$ を蓄える．
- 素子の性質　→　スイッチの切り替え前後で電流の値が同じ値を取る（電流の連続性の保証）.「十分時間経過」で $I = $（一定），コイルの電位差 $L\dfrac{dI}{dt} = 0$.

■電池

- 電位上昇　→　起電力の分だけ
- エネルギー　→　$W = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} IV\,dt = \int_{Q_1}^{Q_2} V\,dQ$
起電力が時間によらず一定のときは $W = $（通過電荷）×（起電力）$= \mathit{\Delta} QV$ と計算できる．

■例外的な素子

よく出題されるものだと，ダイオード，電球など．太陽光電池などもある．

- 素子の性質　→　問題文で，(i) 具体的な関数形を指示，(ii) 特性曲線が与えられる，のいずれか.

素子の性質がグラフの場合，キルヒホッフ則と電荷保存則から得られた式をグラフ上に記し，特性曲線との交点を求めることで回路の状態が一意に定まる（連立方程式をグラフ上で解く）.

1. 抵抗のみの回路①

(1)　図 1 のように，電池 E（起電力 V），電気抵抗 $\mathrm{R_1}$（抵抗値 R），$\mathrm{R_2}$（抵抗値 $2R$），$\mathrm{R_3}$（抵抗値 $3R$）からなる電気回路を考える．$\mathrm{R_1}$ を流れる電流 I_1，および $\mathrm{R_2}$ を流れる電流 I_2 を求めよ．

(2)　図 2 のように，電池 $\mathrm{E_1}$（起電力 V），$\mathrm{E_2}$（起電力 $3V$），電気抵抗 $\mathrm{R_1}$（抵抗値 $2R$），$\mathrm{R_2}$（抵抗値 R），$\mathrm{R_3}$（抵抗値 $2R$）からなる電気回路を考える．$\mathrm{R_1}$ を流れる電流 I_1，および $\mathrm{R_2}$ を流れる電流 I_2 を求めよ．

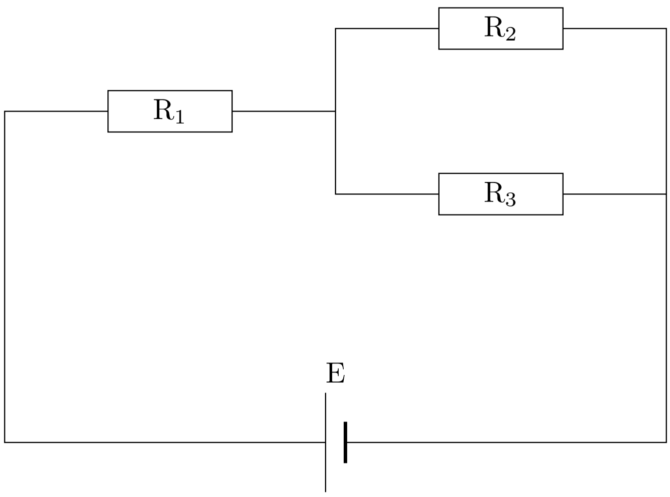


図 1

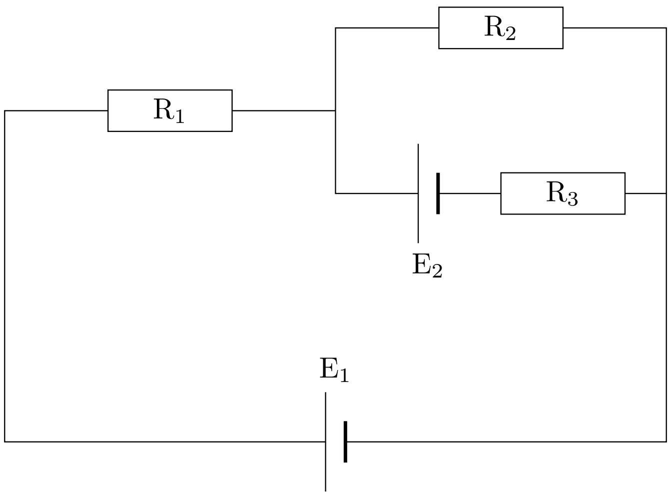


図 2

【解答】

(1)　キルヒホッフ則より[*24]，

$$\begin{cases} RI_1 + 2RI_2 = V\,, \\ RI_1 + 3R(I_1 - I_2) = V\,, \end{cases} \qquad \therefore I_1 = \frac{5}{11}\frac{V}{R}\,,\quad I_2 = \frac{3}{11}\frac{V}{R}\,.$$

(2)　キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} 2RI_1 + RI_2 = V\,, \\ 2RI_1 + 3V + 2R(I_1 - I_2) = V\,, \end{cases} \qquad \therefore I_1 = 0\,,\quad I_2 = \frac{V}{R}\,.$$

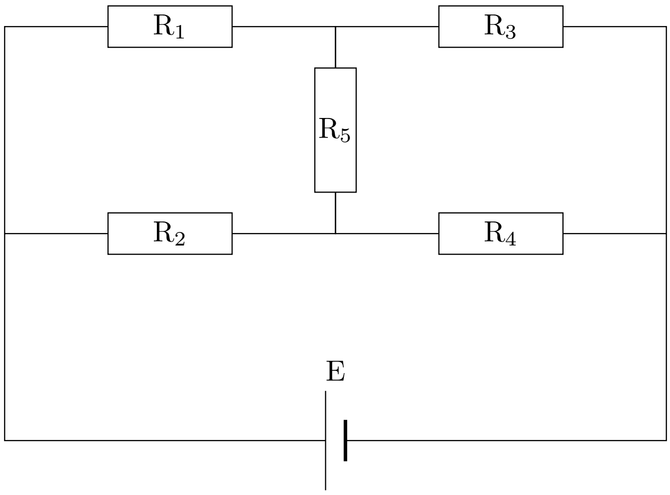
[*24] 電荷保存則から，各分岐点での電流はその瞬間毎に（流入量）=（流出量）を満たす（**キルヒホッフ第 1 法則**）．

2. 抵抗のみの回路②

図のように，電池 E（起電力 V），電気抵抗 $\mathrm{R_1}$（抵抗値 R_1），$\mathrm{R_2}$（抵抗値 R_2），$\mathrm{R_3}$（抵抗値 R_3），$\mathrm{R_4}$（抵抗値 R_4），$\mathrm{R_5}$（抵抗値 R_5）からなる電気回路を考える．

(1)　$V = 10\,\mathrm{V}$，$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$，$R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$，$R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$，$R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$，$R_5 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ とする．各抵抗を流れる電流の大きさを求めよ．

(2)　$\mathrm{R_5}$ に流れる電流の値が 0 であるとき，$\dfrac{R_3}{R_4}$ を，R_1，R_2 を用いて表せ．



【解答】

(1)　$\mathrm{R_1}$，$\mathrm{R_2}$，$\mathrm{R_3}$ を流れる電流をそれぞれ I_1，I_2，I_3 とする．キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} I_1 + 2I_3 = 10\,, \\ 2I_2 + \{(I_1 - I_3) + I_2\} = 10\,, \\ 2(I_1 - I_3) = -1 \cdot \{(I_1 - I_3) + I_3\} + 2I_3\,, \end{cases}$$
$$\therefore I_1 = 4\,\mathrm{mA}\,,\quad I_2 = 3\,\mathrm{mA}\,,\quad I_3 = 3\,\mathrm{mA}\,.$$

(2)　$\mathrm{R_5}$ を流れる電流が 0 のことから，キルヒホッフ則より*25，

$$\begin{cases} R_1I_1 - R_2I_2 = 0\,, \\ R_3I_1 - R_4I_4 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2}\,.$$

*25 この抵抗に関する条件式を，ホイートストン・ブリッジの平衡条件などと呼ぶ．

3. 抵抗のみの回路③，電流計と電圧計

図 1 に示すような，電池と抵抗によって組まれた回路において，抵抗に流れる電流とその抵抗の両端に加わる電圧を電流計と電圧計でそれぞれ測定することで，抵抗値を知ることができる．しかし，実際に電流計や電圧計を用いて，電流値や電圧値を測定する場合，電流計や電圧計の内部抵抗が回路に影響を及ぼし，その結果，真の値とは異なった値となることに注意する必要がある．電池，真の抵抗値が R である抵抗，内部抵抗 r_{A} の電流計，および内部抵抗 r_{V} の電圧計をつないだ，図 2 と図 3 のような回路を組み，電流，電圧の測定を行った．導線の抵抗，電池の内部抵抗は無視できるものとして次の問いに答えよ．

(1)　図 2 の回路で得られる電流，電圧の測定結果から求められる抵抗値 R' を求めよ．また，ここで求めた R' と真の抵抗値 R との大小関係を示せ．

(2)　図 3 の回路で得られる電流，電圧の測定結果から求められる抵抗値 R'' を求めよ．また，ここで求めた R'' と真の抵抗値 R との大小関係を示せ．

(3)　真の抵抗値が $100\,\Omega$ である抵抗を用い，図 2 の回路で電流，電圧を測定した場合，測定値はそれぞれ，$30\,\mathrm{mA}$，$2.94\,\mathrm{V}$ であったとすると，電圧計の内部抵抗 r_{V} の値はいくらか．

(4)　前問に引き続き，電流計，電圧計，電池，抵抗の接続を図 3 のように変更して測定した場合，電圧の測定値が $3.03\,\mathrm{V}$ となったとすると，電流計の内部抵抗 r_{A} の値はいくらか．

(5)　図 2 と図 3 のような電流，電圧の測定方法や，(1)，(2) で求めた R'，R'' から，次のようなことがわかる．空欄に適切な語句を入れ文章を完成させよ．なお，**ア**，**イ**，**オ**，**カ**には「等しい」と「異なる」のいずれかを，**ウ**，**キ**には「電流計」と「電圧計」のいずれかを，**エ**，**ク**には「大きい」と「小さい」のいずれかを入れること．

図 2 において，抵抗の両端に加わる電圧と電圧計の読みは $\boxed{\text{ア}}$ が，抵抗を流れる電流と電流計の読みは $\boxed{\text{イ}}$．また，計算で求められた R' は $\boxed{\text{ウ}}$ の内部抵抗が R に比べて十分に $\boxed{\text{エ}}$ 場合，近似的に R と等しくなる．これに対し，図 3 においては，抵抗を流れる電流と電流計の読みは $\boxed{\text{オ}}$ が，抵抗の両端に加わる電圧と電圧計の読みは $\boxed{\text{カ}}$．また，計算で求められた R'' は $\boxed{\text{キ}}$ の内部抵抗が R に比べて十分に $\boxed{\text{ク}}$ 場合，近似的に R と等しくなる．

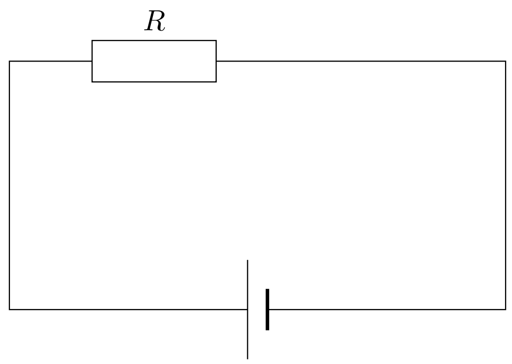


図 1

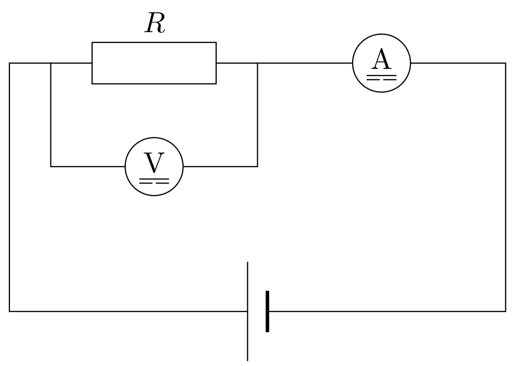


図 2

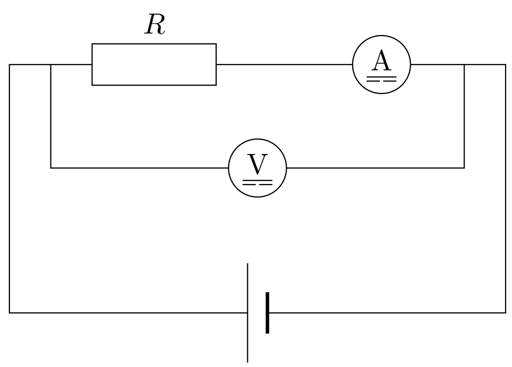


図 3

【メモ】

2007 年愛知教育大より，要点のみ抜粋．電流計と電圧計の接続方法について．物理的な内容は単なる電池と抵抗からなる回路である．

【解答】

(1)　電流計で測定される電流を I_{mes}，電圧計で測定される電圧を V_{mes}，電圧計側に分岐する電流を i とする[*26]．キルヒホッフ則より，

$$\underbrace{r_{\mathrm{V}} i}_{V_{\mathrm{mes}}} - R(I_{\mathrm{mes}} - i) = 0\,.$$

よって，

$$i = \frac{R}{R + r_{\mathrm{V}}} I_{\mathrm{mes}}\,, \quad R' = \frac{V_{\mathrm{mes}}}{I_{\mathrm{mes}}} = \frac{r_{\mathrm{V}} i}{I} = \frac{R r_{\mathrm{V}}}{R + r_{\mathrm{V}}}\,.$$

このとき，

$$R' = \underbrace{\frac{r_{\mathrm{V}}}{R + r_{\mathrm{V}}}}_{<1} R\,, \qquad \therefore R' < R\,.$$

(2)　電流計で測定される電流を I，電圧計で測定される電圧を V，電圧計側に分岐する電流を i とする．キルヒホッフ則より，

$$\underbrace{r_{\mathrm{V}} i}_{V_{\mathrm{mes}}} - R I_{\mathrm{mes}} + r_{\mathrm{A}} I_{\mathrm{mes}} = 0\,.$$

よって，

$$R'' = \frac{V_{\mathrm{mes}}}{I_{\mathrm{mes}}} = R + r_{\mathrm{A}}\,, \qquad \therefore R'' > R\,.$$

(3)　(1) より，

$$R' = \frac{2.94\,\mathrm{V}}{30 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}} = \frac{100 r_{\mathrm{V}}}{100 + r_{\mathrm{V}}}\,, \qquad \therefore r_{\mathrm{V}} = 4.9 \times 10^{3}\,\Omega\,.$$

(4)　回路の電池の端子電圧を E とする．図 3 の回路におけるキルヒホッフ則より，

$$E - V_{\mathrm{mes}} = 0\,, \qquad E = V_{\mathrm{mes}} = 3.03\,\mathrm{V}\,.$$

よって，図 2 の回路におけるキルヒホッフ則より，電圧計側に分岐する電流を i とすると，

$$E - \underbrace{r_{\mathrm{V}} i}_{V_{\mathrm{mes}}} - r_{\mathrm{A}} I_{\mathrm{mes}} = 0\,, \qquad \therefore r_{\mathrm{A}} = \frac{E - V_{\mathrm{mes}}}{I_{\mathrm{mes}}} = \frac{(3.03 - 2.94)\,\mathrm{V}}{30 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}} = 3\,\Omega\,.$$

[*26] 電圧と電流の測定値には mes の添え字をつけた．測定値から計算される抵抗値には ′ 記号が付いている．

なお，図 2 の回路の別のループを考えて，

$$-R(I_{\mathrm{mes}} - i) + r_{\mathrm{V}} i = 0\,,$$
$$\therefore i = \frac{R}{R + r_{\mathrm{V}}} I_{\mathrm{mes}} = \frac{100\,\Omega}{(4.9 \times 10^3 + 100)\,\Omega} \times 30\,\mathrm{mA} = 0.60\,\mathrm{mA}\,.$$

(5)　**ア**　等しい　**イ**　異なる　**ウ**　電圧計　**エ**　大きい[*27]

　オ　等しい　**カ**　異なる　**キ**　電流計　**ク**　小さい

[*27] $R' = 1/(1 + R/r_{\mathrm{V}})R$ より．

4. 抵抗のみの回路④，電池の内部抵抗

図 1 のように，起電力 E，内部抵抗 r の電池と，抵抗値 x の抵抗 x をつなぐ．

(1)　この回路に流れる電流を求めよ．

(2)　抵抗 x に加わる電圧を求めよ．

(3)　抵抗 x で消費される電力[*28]を求めよ．

(4)　起電力 $E = 10\,\mathrm{V}$，内部抵抗 $r = 1.0\,\Omega$ の電池につないだ抵抗 x の消費電力が $9.0\,\mathrm{W}$ であった．これを実現できる x の値をすべて求めよ．

(5)　起電力 $E = 10\,\mathrm{V}$，内部抵抗 $r = 1.0\,\Omega$ の電池につないだ抵抗 x の抵抗値 x をさまざまに変えたときに，抵抗 x で消費される電力の最大値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．必要ならば，実数 a，b に対して $(a+b)^2 \geq 4ab$ の関係を用いよ．

電池の内部抵抗と起電力を測定するために，図 2 のような回路を用いて，可変抵抗の抵抗値を変え，電流と電圧を測定した．

(6)　測定に用いる電圧計と電流計をつなぐことによって，電池と可変抵抗を流れる電流の変化を生じさせないためには，図 2 で用いた可変抵抗や電池の内部抵抗に比べて，電圧計と電流計の内部抵抗は非常に大きいか，非常に小さい必要がある．各々の内部抵抗について，「大きい」か「小さい」かで答えよ．

(7)　測定された電圧 V を，起電力 E，内部抵抗 r，測定された電流 I を用いて表せ．ただし，電流計と電圧計をつないだことによる影響はないものとする．

(8)　測定結果を図 3 に示す．このグラフから推定される，電池の起電力と内部抵抗を求めよ．有効数字は 2 桁とする

*28 消費電力は，単位時間あたりに生じるジュール熱のことである．

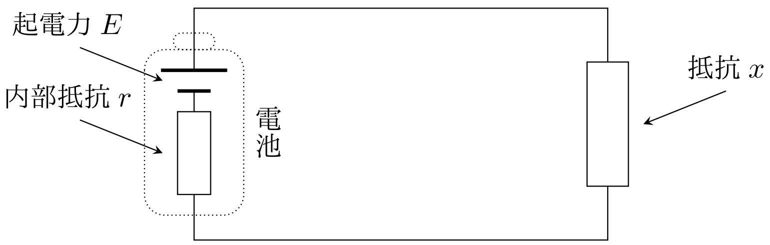

起電力 E
内部抵抗 r
電池
抵抗 x

図 1

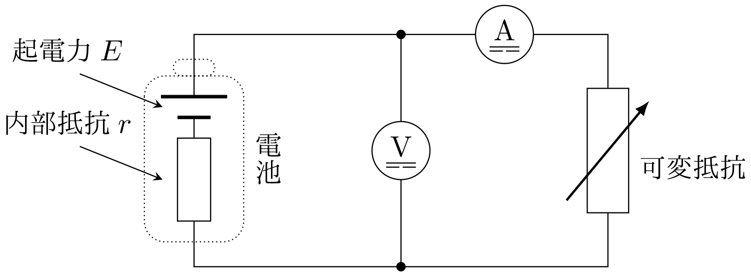

起電力 E
内部抵抗 r
電池
A
V
可変抵抗

図 2

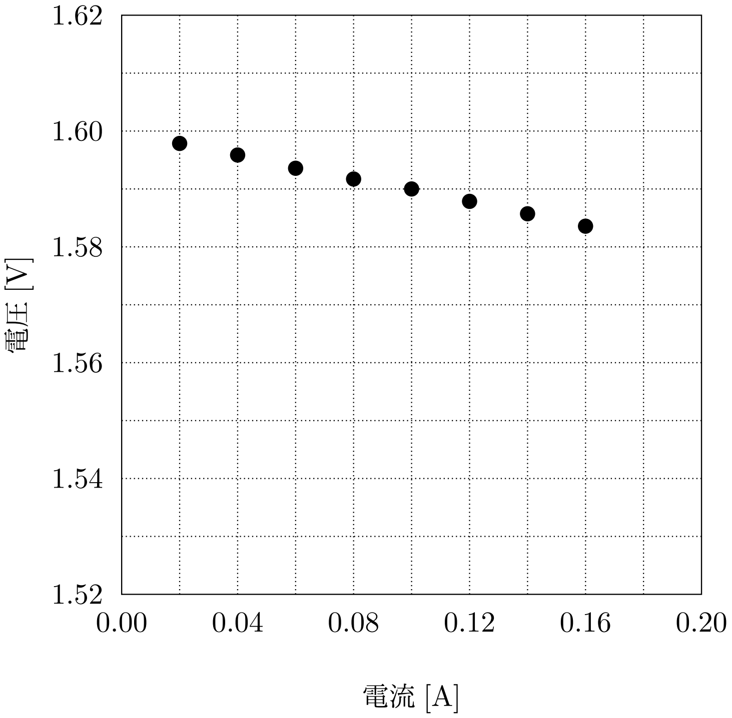

1.62
1.60
1.58
1.56
1.54
1.52
電圧 [V]
0.00
0.04
0.08
0.12
0.16
0.20
電流 [A]

図 3

【メモ】

2008 年金沢大より．電池の内部抵抗について．電流計と電圧計の詳細については 1 つ前の問題で扱っている．物理的な内容は単なる電池と抵抗からなる回路である．

【解答】

(1)　電流を I として，キルヒホッフ則より，

$$E - xI - rI = 0\,, \qquad \therefore I = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{E}{x+r}}\,.$$

(2)　電位降下の大きさを計算して，

$$V_x = xI = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{xE}{x+r}}\,.$$

(3)　抵抗 x の消費電力は，

$$P_x = xI^2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{xE^2}{(x+r)^2}}\,.$$

(4)　P_x に与えられた数値を代入して，

$$9.0 = \frac{10^2 \cdot x}{(x+1.0)^2}\,, \qquad \therefore x = \underset{\sim\sim\sim}{9.0\,\Omega}\,,\quad x = \frac{1}{9}\,\Omega \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim}{0.11\,\Omega}\,.$$

(5)　(3) より[*29]，

$$P_x = \frac{E^2}{\left(\sqrt{x} + \dfrac{r}{\sqrt{x}}\right)^2} \le \frac{E^2}{4r} = \underset{\sim\sim\sim}{25\,\mathrm{W}}\,.$$

また，等号成立時 $\sqrt{x} + \dfrac{r}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{r}$ を考えて，

$$x = \underset{\sim\sim\sim}{1.0\,\Omega}\,.$$

(6)　電圧計に流れる電流を小さくするために，電圧計の内部抵抗は非常に 大きい 必要がある．一方，電流計での電位降下を小さくするために，電流計の内部抵抗は非常に 小さい 必要がある．

[*29] 関数の最大最小を議論しても良い．P_x を x で微分して，

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{(x+r)^2}E^2\right\} = \frac{r-x}{(x+r)^3}E^2$$

より，$x=r$ で極大値をとり，$x>r$ において単調減少であることから，$x=r$ で最大値 $\dfrac{E^2}{4r}$ をとることがわかる．

(7)　キルヒホッフ則より，

$$V = E - rI\,.$$

(8)　測定結果を直線で結んで，その電圧側の切片より，

$$E = 1.60\,\mathrm{V}\,.$$

傾きより，

$$r = 0.10\,\Omega\,.$$

5. コンデンサを含む基本的な回路の計算ドリル①

図のように，電池 E（起電力 E），電気抵抗 R（抵抗値 R），コンデンサ $\mathrm{C_1}$（容量 C），$\mathrm{C_2}$（容量 $2C$），$\mathrm{C_3}$（容量 C），スイッチ $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ からなる電気回路を考える．はじめ，すべてのスイッチは開かれており，すべてのコンデンサは帯電していない．$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{C_3}$ の左側の極板に蓄えられる電気量をそれぞれ Q_1，Q_2，Q_3，R に流れる電流を I と記す．

I　$\mathrm{S_1}$ のみを閉じた回路を考える．

(1)　キルヒホッフ則を立式せよ．

(2)　孤立部分における電荷保存則を立式せよ．

(3)　閉じた直後を考える．I を求めよ．

(4)　十分時間経過した後の状態を考える．Q_1，Q_2，Q_3，I を求めよ．

(5)　$\mathrm{C_1}$ に蓄えられた電気量が前問のちょうど半分の瞬間を考える．I を求めよ．

(6)　R に流れる電流が $\dfrac{E}{4R}$ の瞬間を考える．Q_1，Q_2 を求めよ．

(7)　十分時間経過した後の状態を考える．抵抗で生じたジュール熱 J を求めよ．

II　I に引き続き，$\mathrm{S_1}$ を開いてから $\mathrm{S_2}$ を閉じ，十分時間経過した後の回路の状態について考える．

(1)　キルヒホッフ則を立式せよ．

(2)　孤立部分における電荷保存則を立式せよ．

(3)　Q_1，Q_2，Q_3 を求めよ．

III　II に引き続き，$\mathrm{S_2}$ は閉じたまま，$\mathrm{S_1}$ を閉じた回路を考える．

(1)　独立な 2 つのキルヒホッフ則を立式せよ．

(2)　孤立部分における電荷保存則を立式せよ．

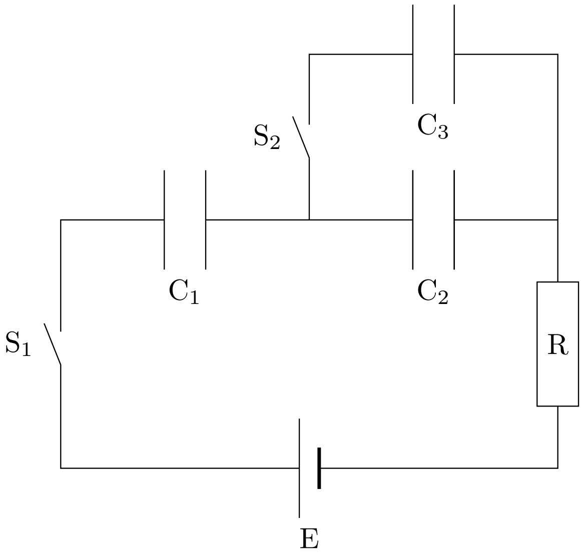
(3)　閉じた直後を考える．I を求めよ．

(4)　十分時間経過した後の状態を考える．Q_1，Q_2，Q_3，I を求めよ．

(5)　$\mathrm{C_1}$ に蓄えられた電気量が前問のちょうど $\dfrac{1}{3}$ 倍の瞬間を考える．Q_2，Q_3，I を求めよ．

(6)　R に流れる電流が $\dfrac{E}{3R}$ の瞬間を考える．Q_1，Q_2，Q_3 を求めよ．

(7)　2 回目に $\mathrm{S_1}$ を閉じてから十分時間経過するまでに，抵抗で生じたジュール熱 J を求めよ．



C_3
S_2
C_1
C_2
S_1
R
E

【メモ】

電気回路は，キルヒホッフ則，電荷保存則，回路素子の性質を考えれば，必ず，状態は一意に決定される．

【解答】

I (1)　キルヒホッフ則[*30]より，

$$\underset{\sim\sim\sim}{E - \frac{Q_1}{C} - \frac{Q_2}{2C} - RI = 0}\,.$$

(2)　$\mathrm{C_1}$ の右側極板と $\mathrm{C_2}$ の左側極板，$\mathrm{C_3}$ の右側の極板が孤立していることに注目して，電荷保存則より[*31]，

$$\begin{cases} -Q_1 + Q_2 = 0\,, \\ Q_3 = 0\,. \end{cases}$$

(3)　直後では $Q_1 = Q_2 = 0$ ゆえ，キルヒホッフ則より，

$$E - RI = 0\,, \qquad \therefore I = \frac{E}{R}\,.$$

(4)　十分時間経過ではコンデンサの性質より $I = 0$ ゆえ[*32]，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{2C} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = 0\,, \\ Q_3 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = \frac{2}{3}CE\,,\quad Q_2 = \frac{2}{3}CE\,,\quad Q_3 = 0\,.$$

(5)　$Q_1 = \dfrac{1}{3}CE$ ゆえ，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{CE/3}{C} - \dfrac{Q_2}{2C} - RI = 0\,, \\ -\dfrac{1}{3}CE + Q_2 = 0\,, \\ Q_3 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore I = \frac{E}{2R}\,.$$

[*30] キルヒホッフ則の本来意味するところは電位の一意性であるため，どのように表現（解釈）するかについてはいくつかある．最初分かり易いのは電位差を 2 通りで表してそれらが等しいことを言うことだが，個人的に好きなのは 1 周の電位の上昇・降下を計算して，それらの合計が 0 とするもの．どちらでもよいし，前者の方が移項の手間もないのでおすすめだが，個人的には後者が好きなので，ここでは（おそらく今後も）後者の表現を採用する．

[*31] コンデンサの電荷は必ず正負の対で現れる．

[*32] 今，$I = \dfrac{dQ_1}{dt} = \dfrac{dQ_2}{dt}$ である．

(6)　$I = \dfrac{E}{4R}$ ゆえ，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{2C} - R \cdot \dfrac{E}{4R} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = 0\,, \\ Q_3 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = \frac{1}{2}CE\,, \quad Q_2 = \frac{1}{2}CE\,.$$

(7)　コンデンサの蓄える静電エネルギーの変化量 $\varDelta U$ は，

$$\varDelta U = \left(\frac{1}{2}\frac{{Q_1}^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{{Q_2}^2}{2C}\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{0^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{0^2}{2C}\right) = \frac{1}{3}CE^2\,.$$

この間，電池のした仕事 W は，

$$W = Q_1 E = \frac{2}{3}CE^2\,.$$

よって，回路のエネルギー収支を考えて[*33][*34]，

$$\varDelta U + J = W\,, \qquad J = \frac{1}{3}CE^2$$

II (1)　キルヒホッフ則より，

$$-\frac{Q_2}{2C} + \frac{Q_3}{C} = 0\,.$$

(2)　C_2 の左側極板と C_3 の左側極板，C_1 の右側の極板が孤立していることに注目して，電荷保存則より，

$$\begin{cases} -Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0\,, \\ Q_1 = \dfrac{2}{3}CE\,. \end{cases}$$

(3)　キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} -\dfrac{Q_2}{2C} + \dfrac{Q_3}{C} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0\,, \\ Q_1 = \dfrac{2}{3}CE\,. \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = \frac{2}{3}CE\,, \quad Q_2 = \frac{4}{9}CE\,, \quad Q_3 = \frac{2}{9}CE\,.$$

III (1)　キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{2C} - RI = 0\,, \\ -\dfrac{Q_2}{2C} + \dfrac{Q_3}{C} = 0\,. \end{cases}$$

[*33] 電池のした仕事（電池から供給されたエネルギー）の一部がコンデンサの静電エネルギーとして蓄えられ，残りがその過程で発生したジュール熱として消費される．

[*34] 設問を通してわかるように I は一定の値を取らないので，ジュール熱の計算はエネルギー収支から逆算する他ない（I を時刻 t の関数として求めて積分しても良いが（実際にできないわけではない），おすすめはしない）．

(2)　C_2 の左側極板と C_3 の左側極板と C_1 の右側の極板の部分が孤立していることに注目して，電荷保存則より，

$$-Q_1+Q_2+Q_3=0\,.$$

(3)　$Q_1=\dfrac{2}{3}CE$，$Q_2=\dfrac{4}{9}CE$，$Q_3=\dfrac{2}{9}CE$ ゆえ，キルヒホッフ則より，

$$E-\frac{Q_1}{C}-\frac{Q_2}{2C}-RI=0\,,\qquad \therefore I=\frac{E}{9R}\,.$$

(4)　各電荷が一定値を取り，$I=0$[*35]ゆえ，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E-\dfrac{Q_1}{C}-\dfrac{Q_2}{2C}=0\,, \\ -\dfrac{Q_2}{2C}+\dfrac{Q_3}{C}=0\,, \\ -Q_1+Q_2+Q_3=0\,. \end{cases} \qquad \therefore Q_1=\frac{3}{4}CE\,,\quad Q_2=\frac{1}{2}CE\,,\quad Q_3=\frac{1}{4}CE\,.$$

(5)　$Q_1=\dfrac{1}{4}CE$ ゆえ，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E-\dfrac{CE/4}{C}-\dfrac{Q_2}{2C}-RI=0\,, \\ -\dfrac{Q_2}{2C}+\dfrac{Q_3}{C}=0\,, \\ -\dfrac{1}{4}CE+Q_2+Q_3=0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_2=\frac{1}{6}CE\,,\quad Q_3=\frac{1}{12}CE\,,\quad I=\frac{2E}{3R}\,.$$

(6)　$I=\dfrac{E}{3R}$ ゆえ，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E-\dfrac{Q_1}{C}-\dfrac{Q_2}{2C}-R\cdot\dfrac{E}{3R}=0\,, \\ -\dfrac{Q_2}{2C}+\dfrac{Q_3}{C}=0\,, \\ -Q_1+Q_2+Q_3=0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_1=\frac{1}{2}CE\,,\quad Q_3=\frac{1}{3}CE\,,\quad Q_3=\frac{1}{6}CE\,.$$

(7)　II での十分時間経過でのコンデンサの静電エネルギーを U_2，III での十分時間経過でのコンデンサの静電エネルギーを U_3 とする．コンデンサの蓄える静電エネルギーの変化量 $\mathit{\Delta} U$ は，

$$\mathit{\Delta} U=U_3-U_2=\frac{3}{8}CE^2-\frac{8}{27}CE^2=\frac{17}{216}CE^2\,.$$

この間，電池のした仕事 W は，

$$W=\mathit{\Delta} Q_1E=\frac{1}{12}CE^2\,.$$

よって，回路のエネルギー収支を考えて[*36]，

$$\mathit{\Delta} U+J=W\,,\qquad J=\frac{1}{216}CE^2$$

[*35] 今，$I=\dfrac{dQ_1}{dt}=\dfrac{d}{dt}(Q_2+Q_3)$ である（2 つ目の等号は電荷保存則に由来する）．

[*36] $216=12\times 18$ である．

6. コンデンサを含む基本的な回路の計算ドリル②

図のように，電池 E（起電力 E），電気抵抗 R（抵抗値 R），コンデンサ C_1（容量 C），C_2（容量 C），C_3（容量 $2C$），スイッチ S_1，S_2 からなる電気回路を考える．S_2 は，端子 a，b のどちらか一方に接続できるようになっている．はじめ，すべてのスイッチは開かれており，すべてのコンデンサは帯電していない．C_1，C_2，C_3 の左側の極板に蓄えられる電気量をそれぞれ Q_1，Q_2，Q_3，R に流れる電流を I と記す．

I　S_2 を端子 a 側につなぎ，S_1 を閉じた回路を考える．

(1)　キルヒホッフ則を立式せよ．

(2)　孤立部分における電荷保存則から，Q_1，Q_2 の間に成り立つ関係式を立式せよ．

(3)　閉じた直後を考える．I を求めよ．

(4)　十分時間が経過した後を考える．Q_1 を求めよ．

(5)　十分時間経過する間に，R で生じたジュール熱 J を求めよ．

(6)　$k\,(k>2)$ を定数として，C_1 の左側極板に蓄えられる電荷 Q_1 が $\dfrac{1}{k}CE$ の瞬間を考える．I を求めよ．

II　I の回路において，十分時間経過後，S_2 を端子 b 側に繋ぎ変えた．

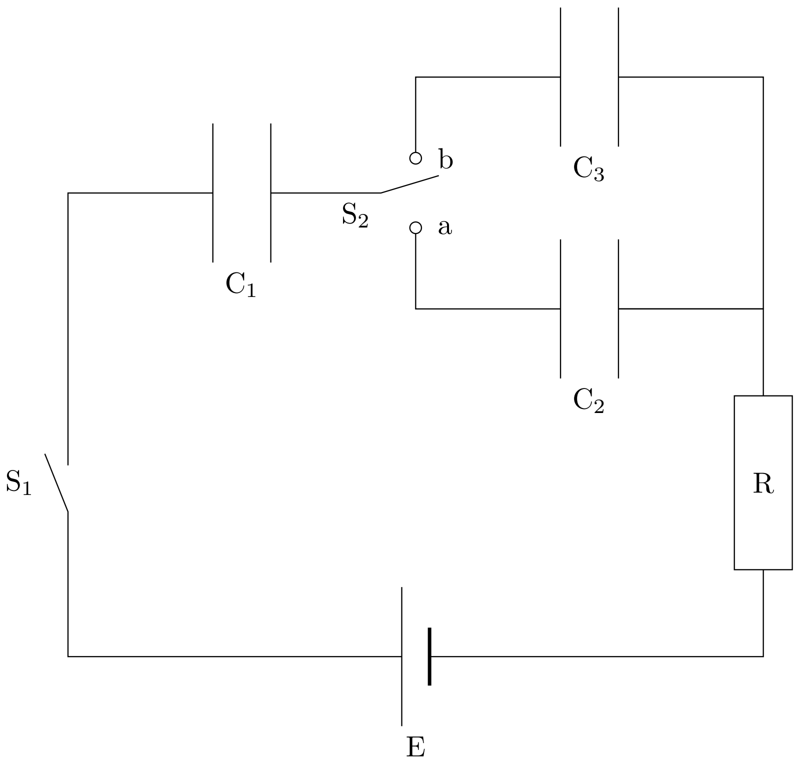
(1)　キルヒホッフ則を立式せよ．

(2)　孤立部分における電荷保存則から，Q_1，Q_3 の間に成り立つ関係式を立式せよ．

(3)　十分時間経過した後の状態を考える．Q_1 を求めよ．

III　S_2 を端子 a に繋ぎ十分時間が経過した後，S_2 を端子 b に繋ぐ．そして十分時間経過後に再び S_2 を端子 a に繋ぐ．このような操作を十分な回数行うと，C_1，C_2，C_3 の電荷がそれぞれある一定値に収束する．このときの Q_1 を求めよ．

（ヒント）電荷の移動が起こらないことから，同一の電荷の状態で端子 a 側のキルヒホッフ則，端子 b 側のキルヒホッフ則が成り立つ．


b
C$_3$
S$_2$
a
C$_1$
C$_2$
S$_1$
R
E

【メモ】

・電気回路の状態は，以下の 3 式で一意に決まる．

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{回路素子の性質} \end{cases}$$

・ジュール熱の計算は以下のように分類される．

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I \text{ 一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I \text{ 一定でないとき}). \end{cases}$$

【解答】

I　キルヒホッフ則，および電荷保存則はそれぞれ，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{C} - RI = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = 0\,. \end{cases}$$

(1)　上に示した．

(2)　上に示した．

(3)　はじめ，コンデンサは帯電していないので，上の 2 式で $Q_1 = Q_2 = 0$ とすれば，

$$E - 0 - 0 - RI = 0 \qquad \therefore I = \dfrac{E}{R}\,.$$

(4)　コンデンサに流れ込む電流が 0 となるので，上の 2 式で $I = 0$ とすれば，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{C} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = 0 \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = \dfrac{1}{2}CE\,,\quad Q_2 = \dfrac{1}{2}CE\,,\quad I = 0\,.$$

(5)　回路のエネルギー収支を計算して，

$$\varDelta U + J = W = \varDelta Q_1 E \therefore J \quad = \dfrac{1}{2}CE^2 - \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{(CE/2)^2}{C} + \dfrac{1}{2}\dfrac{(CE/2)^2}{C}\right) = \dfrac{1}{4}CE^2\,.$$

(6)　キルヒホッフ則，および電荷保存則に $Q_1 = \dfrac{1}{k}CE$ を代入して，

$$\begin{cases} E - \dfrac{1}{k}\dfrac{CE}{C} - \dfrac{Q_2}{C} - RI = 0\,, \\ -\dfrac{1}{k}CE + Q_2 = 0 \end{cases} \qquad \therefore I = \left(1 - \dfrac{2}{k}\right)\dfrac{E}{R}\,,\quad Q_2 = \dfrac{1}{k}CE\,.$$

II　キルヒホッフ則，および電荷保存則はそれぞれ，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_3}{2C} - RI = 0\,, \\ -Q_1 + Q_3 = -\dfrac{1}{2}CE\,. \end{cases}$$

(1)　上に示した．

(2)　上に示した．

(3)　コンデンサに流れ込む電流が 0 となるので，上の 2 式で $I=0$ とすれば，

$$\begin{cases} E-\dfrac{Q_1}{C}-\dfrac{Q_3}{2C}=0\,, \\ -Q_1+Q_3=-\dfrac{1}{2}CE \end{cases} \qquad \therefore Q_1=\underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{5}{6}CE}\,,\quad Q_3=\dfrac{1}{3}CE\,.$$

III　電荷の移動が起こらないことから，端子 a 側のときの $\mathrm{C_1}$ の電荷と端子 b 側のときの $\mathrm{C_1}$ の電荷は等しい．よって，キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} E-\dfrac{Q_1}{C}-\dfrac{Q_2}{C}=0\,, \\ E-\dfrac{Q_1}{C}-\dfrac{Q_3}{2C}=0\,, \\ -Q_1+Q_2+Q_3=0 \end{cases} \qquad \therefore Q_1=\underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{3}{4}CE}\,,\quad Q_2=\dfrac{1}{4}CE\,,\quad Q_3=\dfrac{1}{2}CE\,.$$

【補足 1】回路のエネルギー収支の式（前半の回路だけ）

キルヒホッフ則，および電荷保存則はそれぞれ，

$$\begin{cases} E-\dfrac{Q_1}{C}-\dfrac{Q_2}{C}-RI=0\,, \\ -Q_1+Q_2=0\,. \end{cases}$$

ここで，電荷保存則より，$I=\dfrac{dQ_1}{dt}=\dfrac{dQ_2}{dt}$ であり，キルヒホッフ則の両辺に I をかけることで，

$$\frac{Q_1}{C}\frac{dQ_1}{dt}+\frac{Q_2}{C}\frac{dQ_2}{dt}+RI^2=E \qquad \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{{Q_1}^2}{C}+\frac{1}{2}\frac{{Q_2}^2}{C}\right)+RI^2=EI\,.$$

両辺時刻 t で積分すれば，

$$\underbrace{\mathit{\Delta}\left(\frac{1}{2}\frac{{Q_1}^2}{C}+\frac{1}{2}\frac{{Q_2}^2}{C}\right)}_{\text{静電エネルギー変化}}+\underbrace{\int_0^t RI^2\,dt}_{\text{ジュール熱}}=\underbrace{\int_0^t EI\,dt}_{\text{電池のする仕事}}\,.$$

なお，電池のする仕事は，電池の起電力が一定（時間変化しない）であれば次のように書ける．

$$W=\int_0^t EI\,dt=\int_0^t E\frac{dQ_1}{dt}\,dt=\int_{Q_1(0)}^{Q_1(t)}E\,dQ_1=E\{Q_1(t)-Q_1(0)\}=E\mathit{\Delta}Q_1\,.$$

【補足 2】ジュール熱を定義通りに計算する

キルヒホッフ則，および電荷保存則より[*37]，

$$\begin{cases} E-\dfrac{Q_1}{C}-\dfrac{Q_2}{C}-RI=0\,, \\ -Q_1+Q_2=0\,. \end{cases} \qquad \therefore \frac{dQ_1}{dt}=-\frac{2}{RC}\left(Q_1-\frac{1}{2}CE\right)\,.$$

*37 電流 I と電荷 Q_1 は，電流の定義から $I=\dfrac{dQ_1}{dt}$ の関係がある．

この微分方程式の一般解は，初期条件から決まる積分定数を A とすると，

$$Q_1(t) = \frac{1}{2}CE + Ae^{-\frac{2}{RC}t}$$

であり[*38]，$t = 0$ で $Q_1 = 0$ であることから，

$$Q_1(0) = \frac{1}{2}CE + A \cdot 1 = 0 \qquad \therefore A = -\frac{1}{2}CE\,.$$

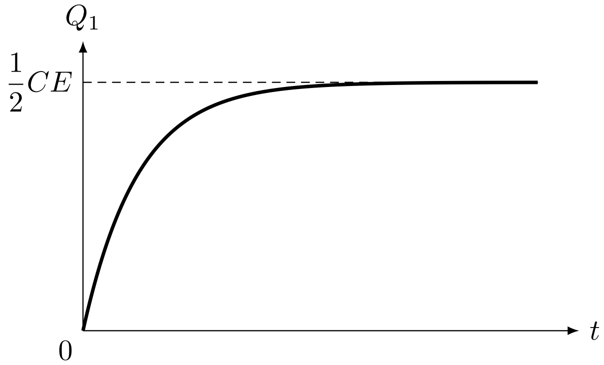
よって，

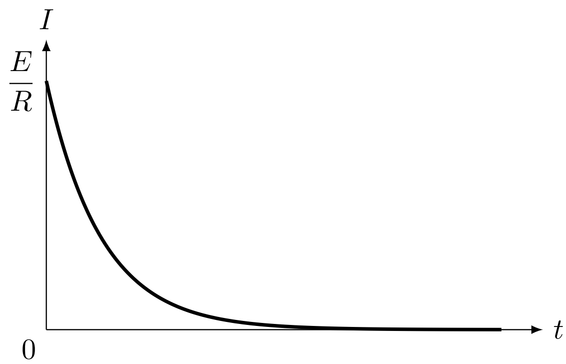
$$Q_1(t) = \frac{1}{2}CE\left(1 - e^{-\frac{2}{RC}t}\right)\,,$$
$$I(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{2}{RC}t}\,.$$

上記の Q_1，I は以下の図のように時間変化する．

以上より，ジュール熱の定義から，

$$J = \int_0^\infty R\left(\frac{E}{R}e^{-\frac{2}{RC}t}\right)^2 dt = \left[-\frac{RC}{4}\frac{E^2}{R}e^{-\frac{4}{RC}t}\right]_0^\infty = \frac{1}{4}CE^2\,.$$





[*38] 詳しい話は，過渡現象のところで触れる．

【補足３】設問 **III** を漸化式を用いて計算する

n 回目に端子 a に繋いで十分時間経過後の $\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$ の電荷をそれぞれ x_n，y_n，n 回目に端子 b に繋いで十分時間経過後の $\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_3}$ の電荷をそれぞれ z_n，w_n とする．キルヒホッフ則，および電荷保存則はそれぞれ，

$$\text{端子 a}\begin{cases} E - \dfrac{x_n}{C} - \dfrac{y_n}{C} = 0\,, \\ -x_n + y_n = -z_{n-1} + y_{n-1}\,. \end{cases}$$

$$\text{端子 b}\begin{cases} E - \dfrac{z_n}{C} - \dfrac{w_n}{C} = 0\,, \\ -z_n + w_n = -x_n + z_{n-1}\,. \end{cases}$$

端子 a 側の漸化式から y_n を，端子 b 側の漸化式から w_n を消去すると，

$$\begin{cases} 2x_{n+1} = x_n + z_n\,, \\ 3z_{n+1} = 2z_n + x_n \end{cases}$$

となり，この 2 式から z_n を消去すれば，

$$3x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0$$

を得る．よって[*39]，

$$\begin{cases} x_{n+2} - \dfrac{1}{3}x_{n+1} = x_{n+1} - \dfrac{1}{3}x_n\,, \\ x_{n+2} - x_{n+1} = \dfrac{1}{3}(x_{n+1} - x_n) \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x_{n+1} - \dfrac{1}{3}x_n = x_2 - \dfrac{1}{3}x_1\,, \\ x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}(x_2 - x_1)\,. \end{cases}$$

ここで，$x_1 = \dfrac{1}{2}CE$，$x_2 = \dfrac{2}{3}CE$ であり[*40]，この下で漸化式を解いて，

$$x_n = \frac{3}{4}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}CE\,.$$

以上より，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}CE = \frac{3}{4}CE\,.$$

---

*39 漸化式が $x_{n+2} - \alpha x_{n+1} = \beta(x_{n+1} - \alpha x_n)$ となるような α，β を，元の式との係数比較で求めればよい．

*40 2 回目の端子 a への接続を考えて，キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{x_2}{C} - \dfrac{y_2}{C} = 0\,, \\ -x_2 + y_2 = -z_1 + y_1 = -\dfrac{5}{6}CE + \dfrac{1}{2}CE \end{cases} \qquad \therefore x_2 = \frac{2}{3}CE\,,\quad y_2 = \frac{1}{3}CE\,.$$

7. 過渡現象（微分方程式を学ぶ）

図のように，起電力 E の電池（内部抵抗無視），抵抗値 R の抵抗，容量 C のコンデンサ，スイッチからなる電気回路を考える．はじめ，スイッチは開かれており，コンデンサは帯電していない．コンデンサの左側極板に蓄えられる電気量を Q，R に流れる電流を I と記す．なお，I は図の矢印の向きを正とする．

(1)　キルヒホッフ則を立式せよ．

(2)　コンデンサの極板上の電荷に注目して，I を Q を用いて表せ．

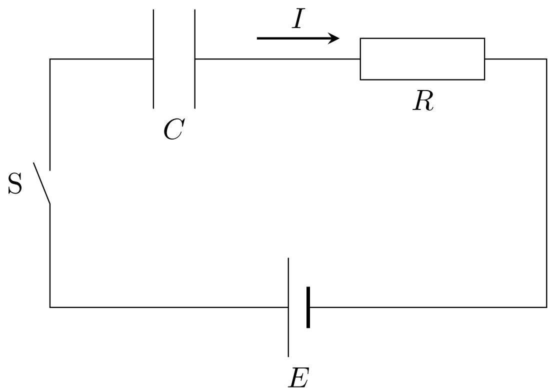
(3)　キルヒホッフ則の微分方程式を解くと，電荷 Q は時刻 t の関数として

$$Q(t) = \alpha\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

と求まる．α，β を求めよ．

(4)　コンデンサの充電が完了するまでに抵抗で生じたジュール熱 J を，回路のエネルギー収支から逆算して求めよ．

(5)　コンデンサの充電が完了するまでに抵抗で生じたジュール熱 J を，I から直接計算し，前問の結果と整合していることを確認せよ．



【メモ】

微分方程式の型を学ぶ.

【解答】

(1)　キルヒホッフ則より,

$$E - \frac{Q}{C} - RI = 0\,.$$

(2)　コンデンサ極板上での電荷に注目すれば，電流の定義より,

$$I = \frac{dQ}{dt}\,.$$

(3)　与えられた Q を時刻 t で微分して,

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha\beta e^{-\beta t}\,.$$

これをキルヒホッフ則に代入し,

$$\alpha\left(\frac{1}{C} - R\beta\right)e^{-\beta t} + \left(E - \frac{\alpha}{C}\right) = 0\,.$$

これが任意の時刻 t で成立するためには,

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{1}{C} - R\beta\right) = 0\,, \\ E - \dfrac{\alpha}{C} = 0\,, \end{cases} \qquad \alpha = CE\,,\quad \beta = \frac{1}{RC}\,.$$

(4)　静電エネルギーの変化量 ΔU は,

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{(CE)^2}{C} = \frac{1}{2}CE^2\,.$$

この間，電池がした仕事 W は,

$$W = \Delta Q E = CE^2\,.$$

よって，回路のエネルギー収支を考えて,

$$\Delta U + J = W\,, \qquad \therefore J = \frac{1}{2}CE^2\,.$$

(5)　回路に流れる電流 I は，Q の式より,

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\,.$$

よって，ジュール熱の定義より，

$$J = \int_0^\infty RI^2\,dt = \int_0^\infty \frac{E^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \left[-\frac{E^2}{R}\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}CE^2\,.$$

【参考】微分方程式を解く（なるべくできた方が良い）

キルヒホッフ則より，A，B を積分定数として[*41*42]，

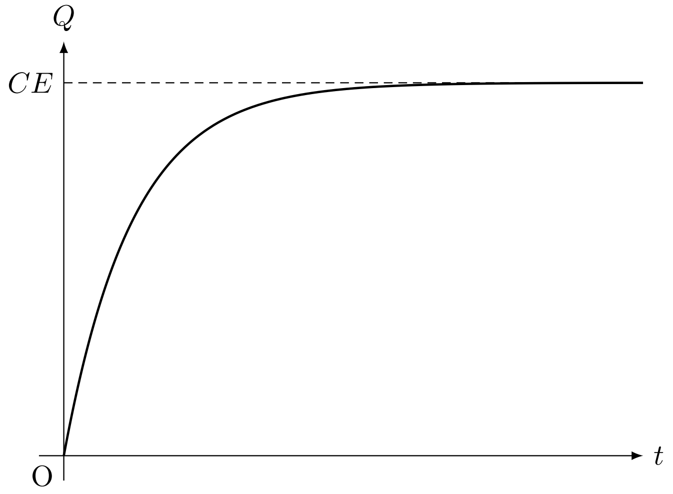
$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= -\frac{1}{RC}(Q-CE)\\ \int\frac{1}{Q-CE}\frac{dQ}{dt}\,dt &= -\frac{1}{RC}\int dt\\ \log|Q(t)-CE| &= -\frac{1}{RC}t+A\\ \therefore Q(t) &= CE+Be^{-\frac{t}{RC}}\,.\end{aligned}$$

ここで，初期条件 $Q(0)=0$ より，

$$Q(0) = CE+B = 0\,,\qquad \therefore B = -CE\,.$$

よって，

$$Q(t) = CE\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\,,\qquad \alpha = CE\,,\quad \beta = \frac{1}{RC}\,.$$



$Q-t$ グラフ

[*41] $B=e^A$ である．

[*42] 積分定数は初期条件 $Q(0)$，または $I(0)$ から決まる．2 階微分を含む微分方程式は初期条件が 2 つ必要である（今回は 1 階微分までなので初期条件は 1 つ（Q に関するもの）で十分である）．

8. 例外的な素子①（電球）

電池 E（起電力 10 V，内部抵抗無視），抵抗 R（抵抗値 10 Ω），コンデンサ C（静電容量 1.0 μF），および図 3 に示す電流・電圧特性を持つ豆電球 A を用いて回路を作成する．C ははじめ帯電していなく，導線の抵抗は無視できる．

I　図 1 の回路を考える．

(1)　豆電球に流れる電流の大きさを求めよ．

(2)　図 1 の R と A 直列接続を並列接続に繋ぎ変えた．このとき，豆電球に流れる電流の大きさを小数第 2 位まで求めよ．

II　図 2 の回路を考える．

(1)　回路に電流が流れ始めた直後，豆電球に流れる電流の大きさを求めよ．

(2)　豆電球に流れる電流の大きさが 0.45 A のとき，コンデンサに蓄えられている電荷を求めよ．

(3)　十分時間が経過したとき，A に流れる電流の大きさは一定となった．このとき，豆電球に流れる電流の大きさ，およびコンデンサに蓄えられている電荷をそれぞれ求めよ．

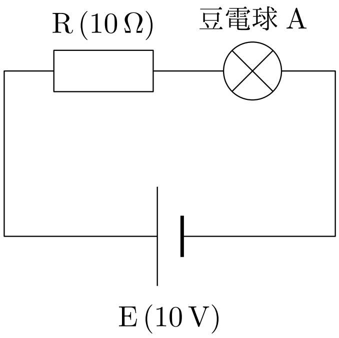

R (10 Ω)
豆電球 A
E (10 V)

図 1

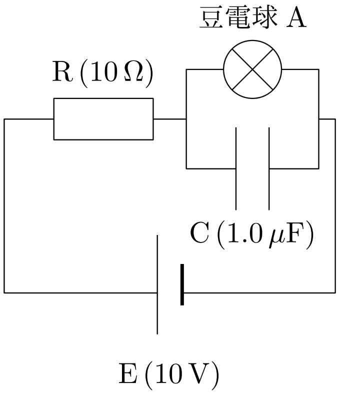

豆電球 A
R (10 Ω)
C (1.0 μF)
E (10 V)

図 2

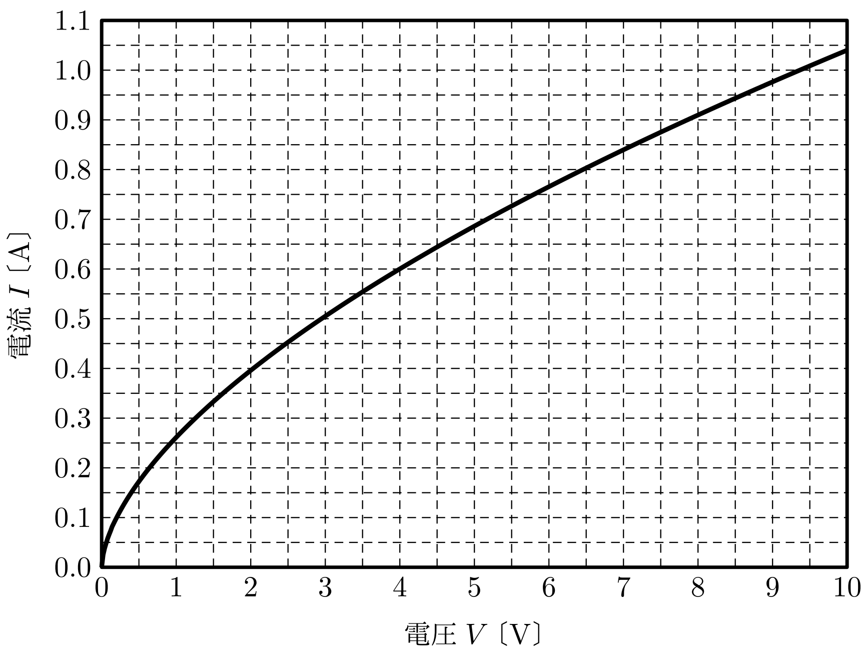

1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
電流 I〔A〕
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
電圧 V〔V〕

図 3

【メモ】

例外素子である電球（非線形抵抗）の扱い．特性曲線が与えられた場合，グラフ上で連立方程式（キルヒホッフ則，電荷保存則，素子の性質）を解く．

【解答】

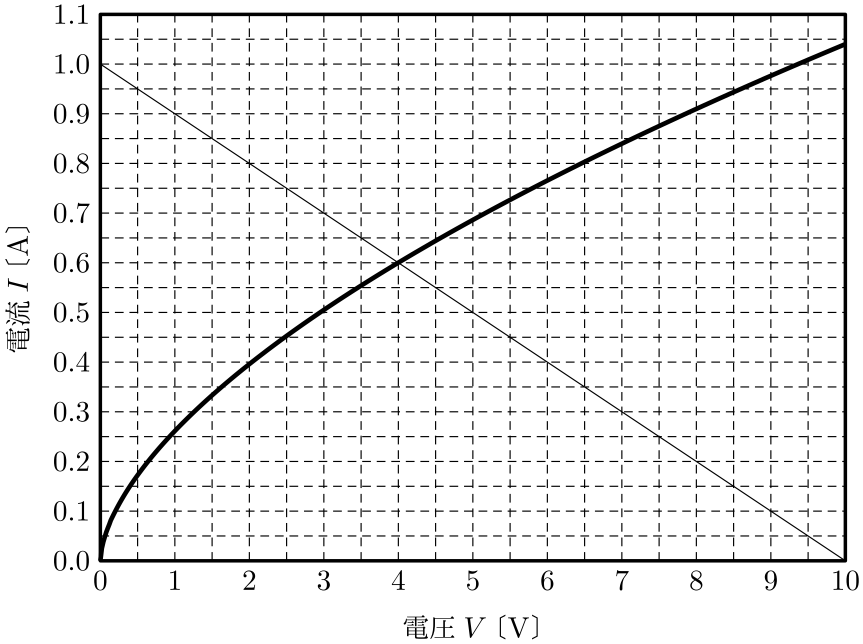
I　I，II において，A に流れる電流を I，電位降下を V とする．

(1)　キルヒホッフの法則より，

$$10 - 10 \times I - V = 0\,.$$

この方程式と特性曲線の解を見て（以下の図を参照），

$$I \fallingdotseq 0.60\,\mathrm{A}\,.$$



(2)　キルヒホッフの法則より，$V = 10\,\mathrm{V}$．よって，特性曲線より，

$$I \fallingdotseq 1.04\,\mathrm{A}\,.$$

II　キルヒホッフの法則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} 10 - 10 \times I_{\mathrm{tot}} - V = 0\,, \\ 10 - 10 \times I_{\mathrm{tot}} - 1.0 \times 10^{6} \times Q = 0\,, \\ I_{\mathrm{tot}} = I + I_{\mathrm{C}}\,. \end{cases}$$

(1)　$Q = 0\,\mathrm{C}$ より，$V = 0\,\mathrm{V}$．よって，特性曲線より，

$$I = \underset{\sim\sim}{0\,\mathrm{A}}\,.$$

(2)　$I = 0.45\,\mathrm{A}$ より，特性曲線から $V = 2.5\,\mathrm{V}$．よって，キルヒホッフの法則より，

$$Q = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2.5 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}}\,.$$

(3)　コンデンサの素子の性質から電荷 Q は一定値，$I_{\mathrm{C}} = 0\,\mathrm{C}$ であるから，キルヒホッフの法則より，

$$\begin{cases} 10 - 10 \times I - V = 0\,, \\ 10 - 10 \times I - 1.0 \times 10^{6} \times Q = 0\,. \end{cases}$$

よって，特性曲線より，

$$I \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim}{0.60\,\mathrm{A}}\,,\quad Q \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{4.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}}\,.$$

9. ダイオード

次の文章を読み，$\boxed{}$ に適した式，または数値を解答せよ．なお，$\boxed{\boxed{}}$ は，すでに $\boxed{}$ で与えられたものと同じものを表す．

ダイオードは半導体を用いた電子部品で，電流を一方向にのみ流し，逆向きには流さない性質を持っている．電流が流れる場合も，通常の抵抗とは性質が異なっている．いま，電流と電圧の関係が図 1（b）のグラフで表されるダイオードを考える．このダイオードでは，電圧 V_{D}（図 1（a）の点 A の電位が点 B の電位より高い場合を正とする）がある正の値 v より高いときにのみ，電流 I_{D} は比例関係にあり，r を正の定数として $\Delta I_{\mathrm{D}} = \dfrac{\Delta V_{\mathrm{D}}}{r}$ と表されるものとする．

(1)　ダイオードに加える電圧 V_{D} が v より高いとき，流れる電流 I_{D} は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2)　図 2 のように，電池，抵抗，ダイオードおよびスイッチを接続した回路がある．電池の起電力は E であり，その内部抵抗は無視できるものとする．抵抗の抵抗値は R である．スイッチを閉じたとき，E がある値 $\boxed{\text{ロ}}$ より高い場合にのみ回路に電流が流れ，そのときの電流は $\boxed{\text{ハ}}$ である．

(3)　次に，図 2 の回路にコンデンサーを加えて図 3 のような回路とした．コンデンサーの電気容量は C である．最初にスイッチが開かれていたときにコンデンサーに電荷は蓄えられていなかったものとする．スイッチを閉じてから十分に時間が経過した．

(a)　$E <$ $\boxed{\boxed{\text{ロ}}}$ であるとき，ダイオードにかかる電圧は $\boxed{\text{ニ}}$，コンデンサーに蓄えられている電荷は $\boxed{\text{ホ}}$，ダイオードで消費されている電力は $\boxed{\text{ヘ}}$ である．

(b)　$E >$ $\boxed{\boxed{\text{ロ}}}$ であるとき，ダイオードにかかる電圧は $\boxed{\text{ト}}$，コンデンサーに蓄えられている電荷は $\boxed{\text{チ}}$，ダイオードで消費されている電力は $\boxed{\text{リ}}$ である．

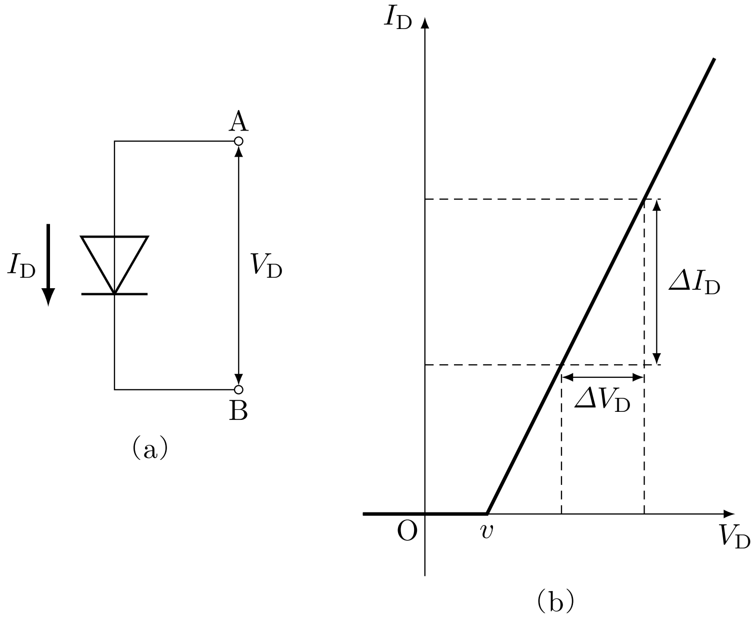

A
B
I_{D}
V_{D}
(a)
I_{D}
ΔI_{D}
ΔV_{D}
O
v
V_{D}
(b)

図 1

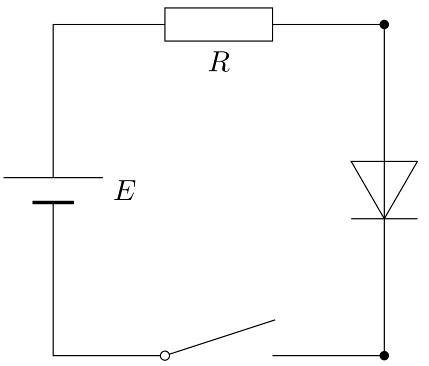

R
E

図 2

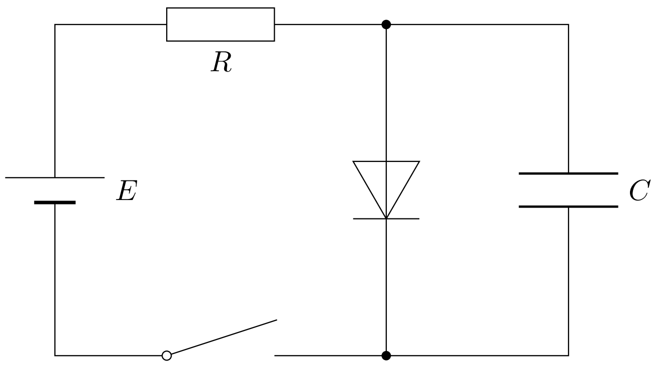

R
E
C

図 3

【メモ】

・電気回路の状態は，以下の 3 式で決定する．

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフの法則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

・例外素子の扱いは，(i) 素子の性質をグラフで与えるか (ii) 式で与えるかのどちらかで，(i) の場合はキルヒホッフ則，電荷保存則とをグラフ上で連立して解き，(ii) の場合はキルヒホッフ則，電荷保存則に与えられた素子の性質を代入するだけである．

【解答】

(1)　特性曲線より，

$$I_{\mathrm{D}} = \frac{\mathit{\Delta} I_{\mathrm{D}}}{\mathit{\Delta} V_{\mathrm{D}}}(V_{\mathrm{D}} - v) = \underbrace{\frac{V_{\mathrm{D}} - v}{r}}_{\text{イ}}\ .$$

なお，$V_{\mathrm{D}} \leq v$ も合わせれば，

$$I_{\mathrm{D}} = \begin{cases} 0 & (V_{\mathrm{D}} \leq v)\,, \\ \dfrac{V_{\mathrm{D}} - v}{r} & (V_{\mathrm{D}} > v)\,. \end{cases}$$

(2)　キルヒホッフ則，および素子の性質より，

$$\begin{cases} E - RI_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{D}} = 0\,, \\ I_{\mathrm{D}} = \begin{cases} 0 & (V_{\mathrm{D}} \leq v)\,, \\ \dfrac{V_{\mathrm{D}} - v}{r} & (V_{\mathrm{D}} > v)\,. \end{cases} \end{cases}$$

ここで，$V_{\mathrm{D}} > v$ の下では $I_{\mathrm{D}} = \dfrac{V_{\mathrm{D}} - v}{r} \neq 0$ より，

$$E - \frac{R}{r}(V_{\mathrm{D}} - v) - V_{\mathrm{D}} = 0\,, \qquad \therefore V_{\mathrm{D}} = \frac{rE + Rv}{R + r}$$

であり，前提である $V_{\mathrm{D}} > v$ より，

$$V_{\mathrm{D}} = \frac{rE + Rv}{R + r} > v\,, \qquad \therefore E > \underbrace{v}_{\text{ロ}}\,.$$

このとき，回路に流れる電流はキルヒホッフ則，および素子の性質より，

$$I_{\mathrm{D}} = \frac{(rE + Rv)/(R + r) - v}{r} = \underbrace{\frac{E - v}{R + r}}_{\text{ハ}}\ .$$

(3)　キルヒホッフ則，および素子の性質より[*43]，

$$
\begin{cases}
E - RI_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{D}} = 0\,, \\
E - RI_{\mathrm{D}} - \dfrac{Q}{C} = 0\,, \\
I_{\mathrm{D}} = \begin{cases} 0 & (V_{\mathrm{D}} \leq v)\,, \\ \dfrac{V_{\mathrm{D}} - v}{r} & (V_{\mathrm{D}} > v)\,. \end{cases}
\end{cases}
$$

キルヒホッフ則を見ればダイオード側は (2) と同じ式となっているため，$E < v$ では電流は流れず $I_{\mathrm{D}} = 0$ となる．この下でキルヒホッフ則を考えて，

$$
\begin{cases}
E - 0 - V_{\mathrm{D}} = 0\,, \\
E - 0 - \dfrac{Q}{C} = 0\,,
\end{cases}
\qquad \therefore V_{\mathrm{D}} = \underbrace{E}_{\text{ニ}}\,, \quad Q = \underbrace{CE}_{\text{ホ}}\,, \quad P = I_{\mathrm{D}} V_{\mathrm{D}} = \underbrace{0}_{\text{ヘ}}\,.
$$

同様に $E > v$ では $I_{\mathrm{D}} = \dfrac{V_{\mathrm{D}} - v}{r}$ となり，この下でキルヒホッフ則を考えて，

$$
\begin{cases}
E - \dfrac{R}{r}(V_{\mathrm{D}} - v) - V_{\mathrm{D}} = 0\,, \\
E - \dfrac{R}{r}(V_{\mathrm{D}} - v) - \dfrac{Q}{C} = 0\,,
\end{cases}
\qquad \therefore V_{\mathrm{D}} = \underbrace{\frac{rE + Rv}{R + r}}_{\text{ト}}\,, \quad Q = \underbrace{\frac{rE + Rv}{R + r} C}_{\text{チ}}\,,
$$

$$
P = I_{\mathrm{D}} V_{\mathrm{D}} = \underbrace{\frac{(E - v)(rE + Rv)}{(R + r)^2}}_{\text{リ}}\,.
$$

[*43] 十分時間経過よりコンデンサに流れ込む電流は 0 となり抵抗を流れる電流はダイオードに流れ込む I_{D} だけとなる．

10. 箔検電器

箔検電器の箔の開きに関する考察について，定性的な検討と定量的な検討を行う．

I　ここでは，定性的に考えて/予想してみよう．

① 極板 P に手を触れる（図 1 のように接地することに相当）．この状態で正に帯電したガラス棒を近付ける．

② ガラス棒の状態を維持したまま，極板 P から手を離す．

③ ガラス棒を箔検電器から遠ざける．

(1)　（間違えてもよい）定性的に考えることで，各操作に対応した箔の開きの変化を予想せよ．

II　続いて，上記の箔の開きの変化を定量的に論じてみよう．この一連の過程における各操作は，次のように解釈することができる．

① 箔検電器の極板と正に帯電したガラス棒，箔と地面がコンデンサを形成し，それぞれの静電容量を C_0，C_1，ガラス棒の帯電量を Q_0，箔の帯電量を Q_1 とする（図 2 − 1）．

② 操作①のときと同様に箔検電器の極板とガラス棒，箔と地面がコンデンサを形成している（図 2 − 2）．

③ 箔検電器の極板と地面，箔と地面がコンデンサを形成し，それぞれの静電容量を C_2，C_1 とする（図 2 − 3）．

(1)　操作①について，Q_1 を求め，箔の様子について述べよ．

(2)　操作②について，Q_1 を求め，箔の様子について述べよ．

(3)　操作③について，Q_1 を求め，箔の様子について述べよ．ただし，C_2 は C_1 に比べて十分小さいことが知られていて，$\dfrac{C_2}{C_1} \fallingdotseq 0$ と近似してよい．

(4)　一連の操作について，箔の様子が定性的な議論と一致していたかどうかを比較してみよ．

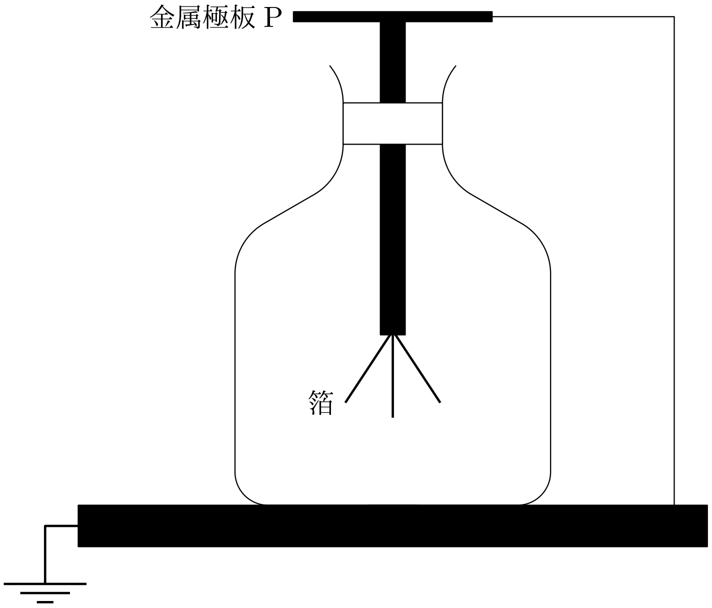


図 1

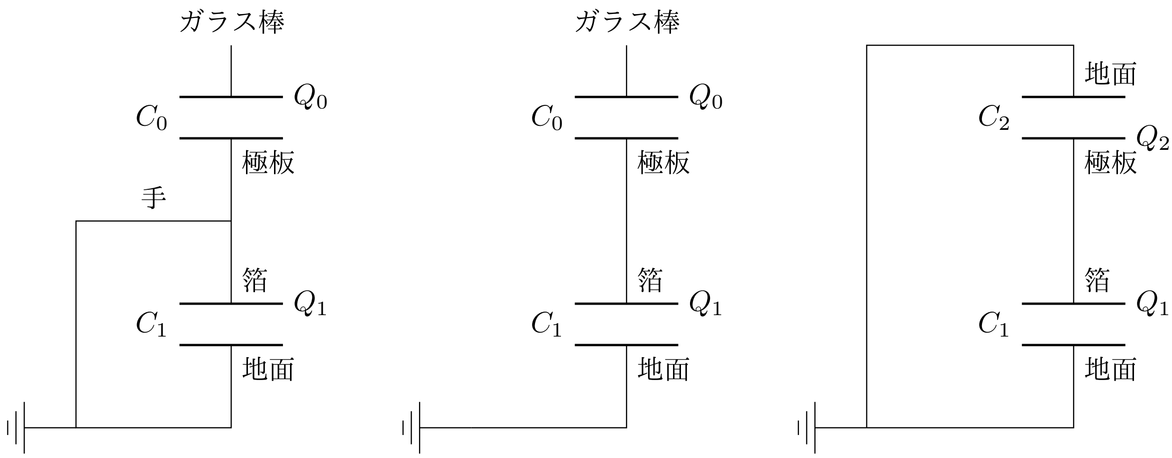


図 2 − 1　　図 2 − 2　　図 2 − 3

【解答】

I (1)　極板にアース（手）を接続することで電荷の行き来が自由になる．この状態でガラス棒を近付ければ極板は負に帯電する．このとき箔は帯電していない．その後，手を離してからガラス棒を遠ざけることで，金属板と箔からなる系全体が負に帯電し，箔が開くと考えられる．ただし，電荷分布は不明である．

II (1)　キルヒホッフ則より，

$$\frac{Q_1}{C_1} = 0\,, \qquad \therefore Q_1 = 0\,.$$

すなわち，箔は帯電しておらず，箔は閉じたままである．また，静電誘導によって，極板には $-Q_0$ の電荷が帯電している．

(2)　ガラス棒と極板がコンデンサを形成していることから極板には $-Q_0$ の電荷が帯電しており，電荷保存則から箔の帯電量は 0 と決まる．したがって，箔は閉じたままである．

(3)　キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{Q_1}{C_1} - \dfrac{Q_2}{C_2} = 0\,, \\ Q_1 + Q_2 = -Q_0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = -\frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_0\,,\quad Q_2 = -\frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_0\,.$$

ここで，極板と地面からなるコンデンサの容量 C_2 は，箔と地面からなるコンデンサの容量 C_1 に比べると十分に小さいことが知られており，$C_1 \gg C_2$ とすれば，

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{1}{1 + C_2/C_1} Q_0 \fallingdotseq -Q_0\,, \\ Q_2 &= -\frac{C_2/C_1}{1 + C_2/C_1} Q_0 \fallingdotseq 0\,. \end{aligned}$$

よって，箔の帯電量は $-Q_0$ となり，箔は開く．

(4)　略．定量的な議論はどうでしたか．