〔1〕 剛体のつりあい，動く座標系

【メモ】

・全て剛体のつりあいに関する問題．剛体のつりあいは以下の式を連立．

$$\begin{cases} \text{力のつりあい} \\ \text{力のモーメントのつりあい} \end{cases}$$

なお，つりあいの破れを考える場合，拘束力[*1]の存在条件を考える必要がある[*2]．

・問 4 以降は動く座標系内部での運動（つりあい）を考える必要がある．座標系が加速度を持つとき，座標系内部での物体には慣性力（架空の力）が生じているように見える．

【解答】

問1　力のつりあいは，

$$\begin{cases} \underline{0 = N_{\mathrm{A}} - Mg}\,, \\ \underline{0 = N_{\mathrm{B}} - F_{\mathrm{A}}}\,. \end{cases}$$

問2　点 A まわりの力のモーメントのつりあいは，

$$\underline{0 = \frac{L}{2}Mg\sin\theta - LN_{\mathrm{B}}\cos\theta}\,.$$

問3　力のつりあい，および力のモーメントのつりあいより，

$$F_{\mathrm{A}} = N_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}Mg\tan\theta\,,\quad N_{\mathrm{A}} = Mg\,.$$

よって，滑らない条件を考えて，

$$F_{\mathrm{A}} < \mu N_{\mathrm{A}}\,,\qquad \therefore \tan\theta < \underline{2\mu}\,(= \tan\theta_{\mathrm{m}})\,.$$

問4　力のつりあい，および力のモーメントのつりあいより[*3]，

$$\begin{cases} 0 = N_{\mathrm{B}} + F_{\mathrm{A}} - Ma_1\,, \\ 0 = \dfrac{L}{2}Mg\sin\theta - LN_{\mathrm{B}}\cos\theta + \dfrac{L}{2}Ma_1\cos\theta\,, \end{cases}$$

$$\therefore N_{\mathrm{B}} = \underline{\frac{1}{2}Mg\left(\tan\theta + \frac{a_1}{g}\right)}\,,\quad F_{\mathrm{A}} = \underline{\frac{1}{2}Mg\left|-\tan\theta + \frac{a_1}{g}\right|}\,.$$

---

*1 静止摩擦力，張力，垂直抗力の未知量で置く力．

*2 滑りが生じないならば，静止摩擦力はその上限値を超えない，など．

*3 静止摩擦力の向き右向きを仮定した．解いた結果から，a_1 の大きさによって変化するため，その大きさは絶対値が必要なことがわかる．

問5 $\theta \leq \theta_{\mathrm{m}}$ より，右側に滑りが生じることはなく[*4]，左側に滑りが生じる場合だけを考えればよい．左側に滑りが生じない条件を考えて，

$$F_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}Mg\left(-\tan\theta + \frac{a_1}{g}\right) \leq \mu Mg\,, \qquad \therefore\ \underline{a_1 < (2\mu + \tan\theta)g}\,.$$

問6 力のつりあい，および力のモーメントのつりあいより，

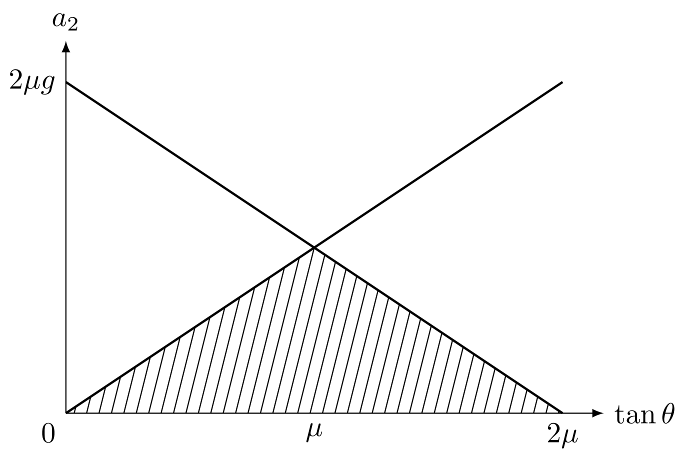
$$\begin{cases} 0 = N_{\mathrm{B}} - F_{\mathrm{A}} - Ma_1\,, \\ 0 = \dfrac{L}{2}Mg\sin\theta - LN_{\mathrm{B}}\cos\theta - \dfrac{L}{2}Ma_2\cos\theta\,, \end{cases}$$

$$\therefore\ N_{\mathrm{B}} = \underline{\frac{1}{2}Mg\left(\tan\theta - \frac{a_2}{g}\right)}\,,\quad F_{\mathrm{A}} = \underline{\frac{1}{2}Mg\left(\tan\theta + \frac{a_2}{g}\right)}\,.$$

問7 滑りが生じず，回りださなければよい（B での垂直抗力が 0 より大きければよい）．よって，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}Mg\left(\tan\theta + \dfrac{a_2}{g}\right) < \mu Mg\,, \\ \dfrac{1}{2}Mg\left(\tan\theta - \dfrac{a_2}{g}\right) > 0\,, \end{cases} \qquad \therefore\ \underline{\begin{cases} a_2 < (2\mu - \tan\theta)g\,, \\ a_2 < g\tan\theta \end{cases}}\,.$$

問8 問 7 の不等式は以下の領域を表す．



[*4] 右側に滑りが生じる場合，

$$F_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}Mg\left(\tan\theta - \frac{a_1}{g}\right) \geq \mu Mg\,, \qquad \therefore\ \tan\theta \geq 2\mu + \frac{a_1}{g}$$

となるが，$\theta \leq \theta_{\mathrm{m}}$ の下ではこの不等式は常に満たされている．

〔２〕　コンデンサの中身

【メモ】

・電気回路の状態は，キルヒホッフ則，電荷保存則，素子の性質によって一意に決まる．

・電荷 Q を帯びる十分に広い板状の電荷（面積 S）の作る電場の大きさは，ガウス則によって計算され $E=\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$.

・全ての設問，電気回路の状態決定通りに処理できる．

【解答】

問１　平行平板コンデンサの容量の公式より L と M が形成するコンデンサの容量 C は $\varepsilon_0\dfrac{A}{d}$ であり，キルヒホッフ則より，

$$V-\frac{q}{C}=0\,,\qquad \therefore q=CV=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\varepsilon_0\frac{A}{d}V}\,.$$

問２　極板 LM 間の電場の大きさを E_{LM} とすると，キルヒホッフ則より[*5]，

$$V-E_{\mathrm{LM}}d=0\,,\qquad \therefore E_{\mathrm{LM}}=\underset{\sim}{\frac{V}{d}}\,.$$

問３　公式より，

$$U=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{A}{d}V^2}\,.$$

問４　極板 K の下面と極板 L の上面，極板 L の下面と極板 M の上面，および極板 M の下面と極板 N の上面はそれぞれコンデンサを形成する[*6]．すなわち，電荷保存則より，極板 L の上面，および下面に分布する電荷はそれぞれ $-Q$，$q+Q$，同様に極板 M の上面，および下面に分布する電荷はそれぞれ $-(q+Q)$，Q となる．よって，極板 KL 間の電場の大きさ E_{KL} は[*7]，

$$E_{\mathrm{KL}}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 A}+\frac{Q}{2\varepsilon_0 A}-\frac{Q+q}{2\varepsilon_0 A}+\frac{Q+q}{2\varepsilon_0 A}-\frac{Q}{2\varepsilon_0 A}+\frac{Q}{2\varepsilon_0 A}=\underset{\sim\sim}{\frac{Q}{\varepsilon_0 A}}\,.$$

問５　問５と同様にして，各極板間の電場の大きさはそれぞれ，

$$E_{\mathrm{LM}}=\frac{Q+q}{\varepsilon_0 A}\,,\quad E_{\mathrm{MN}}=\frac{Q}{\varepsilon_0 A}\,.$$

[*5] ガウス則より $E_{\mathrm{LM}}=\dfrac{q}{2\varepsilon_0 A}\cdot 2$ であり，ここに問１の結果を代入してもよい（静電容量決定の流れと同じ）．

[*6] 静電誘導により，分布する電荷が大きさが等しく正負逆の対となって現れる．

[*7] コンデンサの外側ではコンデンサに帯電している電荷の作る電場が０となることを知っていれば，初めから，極板 K 下面の電荷と極板 L 上面の電荷の作る電場だけを計算すればよい．

よって，キルヒホッフ則より，極板 KL 間の距離を h として，

$$V_2-\frac{Q}{\varepsilon_0 A}h-\frac{Q+q}{\varepsilon_0 A}d-\frac{Q}{\varepsilon_0 A}(D-d-h)=0\,,\qquad \therefore V_2=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{QD+qd}{\varepsilon_0 A}}\,.$$

問 6　問 4 で述べたように，極板の各面でコンデンサが形成され，L の上面には $-Q$，M の下面には Q の電荷が分布する．電荷保存則より，L 下面の帯電量は $q'+Q$ であり（M 下面の帯電量は $-q'-Q$），キルヒホッフ則より，

$$V-\frac{q'+Q}{\varepsilon_0 A}d=0\,,\qquad \therefore q'=\varepsilon_0\frac{A}{d}-Q=\underset{\sim\sim\sim}{q-Q}\,.$$

問 7　$q'=q-Q$，および電荷保存則より，L，M の電荷分布は以下のようになる．

$$\begin{cases}\text{L 上面}:-Q-\mathit{\Delta}Q\,,\\ \text{L 下面}:q+\mathit{\Delta}q'+\mathit{\Delta}Q\,,\end{cases}\qquad \begin{cases}\text{M 上面}:-q-\mathit{\Delta}q'-\mathit{\Delta}Q\,,\\ \text{M 下面}:Q+\mathit{\Delta}Q\,.\end{cases}$$

よって，キルヒホッフ則より[*8]，

$$\begin{cases}V-\dfrac{q+\mathit{\Delta}q'+\mathit{\Delta}Q}{\varepsilon_0 A}d=0\,,\\ V_2-\dfrac{Q+\mathit{\Delta}Q}{\varepsilon_0 A}h-\dfrac{q+\mathit{\Delta}q'+\mathit{\Delta}Q}{\varepsilon_0 A}d-\dfrac{Q+\mathit{\Delta}Q}{\varepsilon_0 A}(D-d-h)=0\,,\end{cases}$$

$$\therefore \mathit{\Delta}Q=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{d}{D-d}Q}\,,\quad \mathit{\Delta}q'=\underset{\sim\sim\sim\sim}{-\frac{d}{D-d}Q}\,.$$

[*8] 問 1 の q，問 5 の V_2 を代入する．

〔３〕 ドップラー効果（公式導出，風あり）

【メモ】

・波の個数が等しいことを利用したドップラー効果の公式導出問題.

・設問 I，II，III 全て同じ構成.

・風が音波の進行方向と平行でない方向に吹いているときは，速度の合成を行って音速を変換する.

【解答】

I　$\mathit{\Delta} t$ 間に生じた音を $\mathit{\Delta} t_1$ 間に聞く．生じた波の個数と聞く音の波の個数は等しいので，

$$f_1 \mathit{\Delta} t_1 = f_0 \mathit{\Delta} t\,, \qquad \therefore f_1 = \underbrace{\frac{\mathit{\Delta} t}{\mathit{\Delta} t_1} f_0}_{(1)} \ .$$

さて，時刻 $t=0$ に A で生じた音を時刻 t_1 に聞き，時刻 $\mathit{\Delta} t$ に生じた音を時刻 $t_1 + \mathit{\Delta} t_1$ に聞くことから，音の伝播を考えれば，

$$\overline{\mathrm{OA}} = ct_1 = d\,,\ \ \overline{\mathrm{OA'}} = c(t_1 + \mathit{\Delta} t_1 - \mathit{\Delta} t) = d'\,.$$

音源の運動を考えると $\overline{\mathrm{AA'}} = v\mathit{\Delta} t$ ゆえ，

$$v\mathit{\Delta} t = ct_1 - c(t_1 + \mathit{\Delta} t_1 - \mathit{\Delta} t)\,, \qquad \therefore \frac{\mathit{\Delta} t}{\mathit{\Delta} t_1} = \underbrace{\frac{c}{c-v}}_{(2)} \ .$$

よって，(1)，(2) より，

$$f_1 = \underbrace{\frac{c}{c-v} f_0}_{(3)} \ .$$

II　時刻 t_0 に風が生じるまでの伝播と，時刻 t_0 に風が生じてから t_2 で音を聞くまでの伝播を考えれば，

$$d = ct_0 + (c+w)(t_2 - t_0) = \underbrace{ct_2 + w(t_2 - t_0)}_{(4)} \ .$$

同様に，時刻 $\mathit{\Delta} t$ に A$'$ で音を発してから t_0 に風が生じるまでの伝播と，時刻 t_0 に風が生じてから $t_2 + \mathit{\Delta} t_2$ で音を聞くまでの伝播を考えれば，

$$d' = c(t_0 - \mathit{\Delta} t) + (c+w)(t_2 + \mathit{\Delta}_2 - t_0) = \underbrace{c(t_2 + \mathit{\Delta} t_2 - \mathit{\Delta} t) + w(t_2 + \mathit{\Delta} t_2 - t_0)}_{(5)} \ .$$

よって，$d - d' = v\mathit{\Delta} t$ より，

$$v\mathit{\Delta} t = \{ct_2 + w(t_2 - t_0)\} - \{c(t_2 + \mathit{\Delta} t_2 - \mathit{\Delta} t) + w(t_2 + \mathit{\Delta} t_2 - t_0)\}$$

$$\therefore \frac{\mathit{\Delta} t}{\mathit{\Delta} t_2} = \underbrace{\frac{c+w}{c-v}}_{(6)} \ .$$

さて，Δt 間に生じた音を Δt_1 間に聞き，両者の波の個数は等しいので，

$$f_2\Delta t_2 = f_0\Delta t\,, \qquad \therefore\ f_2 = \frac{\Delta t}{\Delta t_2}f_0 = \underbrace{\frac{c+w}{c-v}f_0}_{(7)}\quad .$$

また，風があるときに発生した音を聞くようになった後に，観測者が聞く音の振動数 f_2' は，設問 I の音速を $c \to c+w$ とすれば，

$$f_2' = \underbrace{\frac{c+w}{c+w-v}f_0}_{(8)}\quad .$$

III　風が吹くことで，広がる波面全体が図の右側に平行移動する．時刻 0 に A で生じた音の波面中心の時間 t_3 の間の移動を考えて，

$$s = \underbrace{wt_3}_{(9)}\quad .$$

また，この時間 t_3 の間に音波の波面は半径 $\overline{\mathrm{OB}}$ の円状となるので，音波の伝播を考えれば，

$$s' = \underbrace{ct_3}_{(10)}\quad .$$

よって，三平方の定理より，

$$d = \sqrt{s'^2 - s^2} = \underbrace{t_3\sqrt{c^2-w^2}}_{(11)}\quad .$$

同様にして，時刻 Δt に位置 A' に音が生じてから時刻 $t_3+\Delta t_3$ に位置 O で音を聞くことから，

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = w(t_3+\Delta t_3-\Delta t)\,,\quad \overline{\mathrm{OB'}} = c(t_3+\Delta t_3-\Delta t)$$

ゆえ，

$$d' = (t_3+\Delta t_3-\Delta t)\sqrt{c^2-w^2}$$

であり，

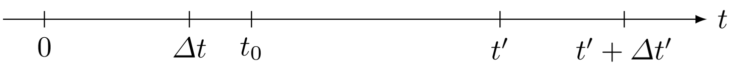
$$v\Delta t = t_3\sqrt{c^2-w^2} - (t_3+\Delta t_3-\Delta t)\sqrt{c^2-w^2}$$
$$\therefore\ \frac{\Delta t}{\Delta t_3} = \frac{\sqrt{c^2-w^2}}{\sqrt{c^2-w^2}-v}\,.$$

よって，Δt 間に生じた音を Δt_3 間に聞き，両者の波の個数は等しいので，

$$f_3\Delta t_3 = f_0\Delta t\,, \qquad \therefore\ f_3 = \frac{\Delta t}{\Delta t_3}f_0 = \underbrace{\frac{\sqrt{c^2-w^2}}{\sqrt{c^2-w^2}-v}f_0}_{(12)}\quad .$$

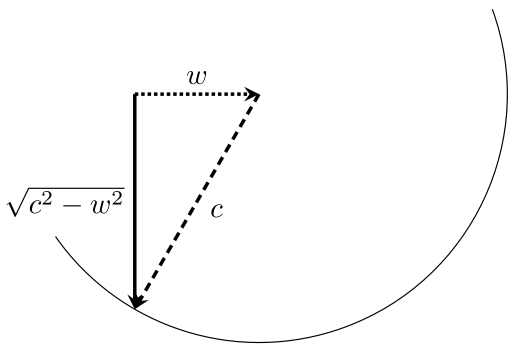
【補足１】時系列を表す図

A を通過する時刻を $t=0$，A$'$ を通過する時刻を $t=\varDelta t$，A を通過する瞬間に生じた音を O で聞く時刻を $t=t'$，A$'$ を通過する瞬間に生じた音を O で聞く時刻を $t=t'+\varDelta t'$，風が吹く時刻を t_0 とすると，時系列は以下のようになっている[*9].



【補足２】設問 III で聞く音の音速の図示

実線が聞く音の矢印，点線が風の矢印，破線が音の波面の伝播を表す矢印である.



*9 途中で風が吹くような場合でなければ t_0 は考えなくてよい.