〔１〕 単振動，衝突

【メモ】

・等加速度運動，単振動だけは，高校範囲で時間追跡可能な運動であり，運動方程式で解くか，エネルギーで解くかという解法の選択がある．この問題では，単振動をエネルギーの観点（特に全体を 1 つと見た系での議論）から現象を論じる．なお，全体を 1 つと見ることで内力である抗力の情報が失われてしまうため，問 6，問 7 では個々の物体からなる系に注目して論じることとなる．

・全体通じて，自然長が原点でないことに注意．

・問 2 は衝突に関する問題．衝突は例外的に，以下のように処理する．

$$\begin{cases}\text{衝突（分離）の直前直後の運動量保存則}\\ \text{問題で与えられた条件}\end{cases}$$

【解答】

問１　縮みを s として，力のつりあいより，

$$0 = ks - mg\,, \qquad \therefore s = \frac{mg}{k}\,.$$

問２　衝突直前の B の速度は $-\sqrt{2gh}$ であり[*1]，衝突直前・直後の運動量保存則，および衝突時の条件[*2]より，

$$mv_1 + mv_1 = m(-\sqrt{2gh})\,, \qquad v = |v_1| = \sqrt{\frac{gh}{2}}\,.$$

問３　物体が位置 y にあるとき，ばねの伸びは $y - \dfrac{mg}{k}$ である．物体の運動方程式より，振動中心 y_c，および角振動数 ω は，

$$\begin{aligned}2m\ddot{y} &= -k\left(y - \frac{mg}{k}\right) - mg\\ \ddot{y} &= -\frac{k}{2m}\left(y + \frac{mg}{k}\right)\,, \qquad \therefore y_\mathrm{c} = -\frac{mg}{k}\,,\ \ \omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}\,.\end{aligned}$$

問４　衝突直後の A，B，ばね，重力場からなる系の力学的エネルギーは，

$$E = \frac{1}{2}2mv^2 + 0 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = mv^2 + \frac{m^2g^2}{2k}\,.$$

[*1] B と重力場からなる系の力学的エネルギー保存則や B のエネルギー収支から計算すればよい（時間追跡でもいいが計算の手間が多い）．

[*2] 完全非弾性衝突（はね返り係数 0）より，衝突直後の 2 物体の速度は等しい．

問５　物体が位置 y にあるときばねの伸縮が $\left|y-\dfrac{mg}{k}\right|$ であることに注意して，力学的エネルギー保存則より，

$$
\begin{aligned}
&0+2mgy+\frac{1}{2}k\left(y-\frac{mg}{k}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 2m\left(\sqrt{\frac{gh}{2}}\right)^2+\frac{m^2g^2}{2k}\\
&\qquad \frac{1}{2}ky^2+mgy-\frac{1}{2}mgh=0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \therefore y=-\frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{kh}{mg}}\right).
\end{aligned}
$$

問６　垂直抗力の大きさを N とする．個々の運動方程式より，

$$
\begin{cases}
\mathrm{A}: m\ddot{y}=-k\left(y-\dfrac{mg}{k}\right)-mg-N\,,\\
\mathrm{B}: m\ddot{y}=N-mg\,,
\end{cases}
\qquad \therefore N=-\frac{1}{2}k\left(y-\frac{mg}{k}\right).
$$

問７　$N=0$ を解いて，

$$
y=\frac{mg}{k}\,.
$$

〔２〕 回路の一部が動く電磁誘導

【メモ】

・回路の一部が動く電磁誘導は，誘導起電力の決定では $vB\ell$ の公式が基本となる．

・電磁誘導の問題は，①誘導起電力の決定，②回路の議論，③運動の議論，④エネルギーの議論，という作りが基本．今回はエネルギーの議論が付いていないので，ここで以下の問題を追加する．

問題：時刻 t_0 から十分時間が経過するまでの間に，金属棒 A_1 で生じたジュール熱 J_1 を求めよ[*3]．

【解答】

問１　電流の正の向きを，鉛直上向きから見て反時計回りに定める．各導体棒には，図の手前方向に誘導起電力が生じる．キルヒホッフ則より，

$$v_1BL - v_2BL - RI - RI = 0\,, \qquad \therefore I = \frac{BL}{2R}(v_1 - v_2)\,.$$

問２　各導体棒が受けるアンペール力は，公式より，

$$F_1 = -IBL = -\frac{B^2L^2}{R}(v_1 - v_2)\,,\quad F_2 = IBL = \frac{B^2L^2}{2R}(v_1 - v_2)\,.$$

問３　$F_1 = -F_2$ ゆえ，2 物体からなる系に水平方向の外力ははたらかないため．（句読点含め 33 字）

問４　十分時間経過後 $I = 0$ より，問 1 から $v_1 = v_2$ となる．よって，運動量保存則より，

$$m_1v + m_2v = m_1v_0\,, \qquad \therefore v = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0\,.$$

問５　$I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ ゆえ，A_2 の運動方程式より，

$$\frac{\Delta P_2}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}BL\,, \qquad \therefore \frac{\Delta P_2}{\Delta Q} = BL\,.$$

問６　問 5 より，

$$P_2 - 0 = BL(Q - 0)\,, \qquad \therefore Q = \frac{1}{BL}P_2 = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\frac{v_0}{BL}\,.$$

問７　A_1，A_2 の位置をそれぞれ x_1，x_2 とする．$x_2(0) - x_1(0) = d$ であり，問 1 より[*4]，

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t} - \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = -\frac{2R}{BL}\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$
$$(x_2 - x_1) - d = -\frac{2R}{BL}(Q - 0)$$
$$\therefore x_2 - x_1 = d - \frac{2R}{BL}Q\,.$$

[*3] 解答は【補足】に示した．

[*4] これぐらいの計算量であれば，運動方程式を微分方程式として解いて議論してもよい（具体的な計算については補講で）．

金属棒が接触しないためには常に $x_2 - x_1 > 0$ を満たしていればよいので，

$$d > \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2RQ}{BL}} \, (= d_{\mathrm{c}})\,.$$

【補足】系のエネルギー収支

各金属棒の運動方程式，および回路のキルヒホッフ則はそれぞれ[*5]，

$$\begin{cases} m_1\dot{v}_1 = -IBL\,, \\ m_2\dot{v}_2 = +IBL\,, \\ 2RI = v_1BL - v_2BL\,. \end{cases}$$

ここで，運動方程式には対応する速度 v_1，v_2 を，キルヒホッフ則には I をかけて 3 式の和を取ると，

$$m_1v_1\dot{v}_1 + m_2v_2\dot{v}_2 + 2RI^2 = -IBLv_1 + IBLv_2 + (v_1BL - v_2BL)I = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2\right) + 2RI^2 = 0\,.$$

これが力学系と回路系を合わせたエネルギー収支の式である（運動エネルギーの時間変化率が，磁場を介して，回路の消費電力に変換される）．

また，この式の両辺を $t = t_0$ から ∞ まで和を取れば，

$$\underbrace{\int_{t_0}^{\infty} 2RI^2\,dt}_{=J} = -\int_{t_0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2\right)dt$$

$$\begin{aligned} \therefore J &= -\mathit{\Delta}\left(\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2\right) \\ &= -\left\{\frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}v_0\right)^2\right\} + \frac{1}{2}m_1{v_0}^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}{v_0}^2\,. \end{aligned}$$

すると，金属棒 A_1 で生じたジュール熱 J_1 は，金属棒に流れる電流の大きさが等しく，両者の抵抗値が等しいことから，

$$J_1 = \frac{1}{2}J = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{4}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}{v_0}^2}$$

と求まる（問題の解答）．

[*5] 運動方程式の和取ることで，運動量保存則が確認できる．

〔３〕 分子運動論，むらのある過程，どこまでを系とみるか

【メモ】

・分子運動論については，直方体容器では誘導がなくとも，圧力の式，運動エネルギーと温度の関係式までは出せるようにしておく．球形容器，円筒形容器は誘導に乗れればよい．

・後半は気体にむらの生じる過程での熱力学．気体にむらの生じる過程では，全体のエネルギー収支が基本となる．

【解答】

ピストンが A の分子 1 個から受ける力積は，運動量収支より，

$$I = -I_{\text{分子}} = -\mathit{\Delta} p_z = \underbrace{2m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}z}}_{(1)} .$$

時間 t の間の衝突回数 ν は[*6]，

$$\nu = \underbrace{\frac{v_{\mathrm{A}z}}{2d}}_{(2)}t$$

であるので，時間 t の間にピストンが気体 A から受ける力積は，

$$I_{\mathrm{A}} = \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{A}}} 2m_{\mathrm{A}}(v_{\mathrm{A}z})_i\frac{(v_{\mathrm{A}z})_i}{2d}t = \frac{N_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{A}}}{d}t\left\{\frac{1}{N_{\mathrm{A}}}\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{A}}}(v_{\mathrm{A}z})_i{}^2\right\} = \frac{N_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{A}}\langle v_{\mathrm{A}z}^2\rangle}{d}t$$

よって，気体 A から受ける平均の力は，

$$\overline{f}_{\mathrm{A}} = \frac{I_{\mathrm{A}}}{t} = \underbrace{\frac{N_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{A}}}{d}}_{(3)} \times \langle v_{\mathrm{A}z}^2\rangle .$$

ここで，分子運動の等方性から $\langle v_{\mathrm{A}x}^2\rangle = \langle v_{\mathrm{A}y}^2\rangle = \langle v_{\mathrm{A}z}^2\rangle$ であり，$\langle {v_{\mathrm{A}}}^2\rangle = 3\langle v_{\mathrm{A}z}^2\rangle$ ゆえ，気体 A の圧力 P_{A} は，

$$P_{\mathrm{A}} = \frac{\overline{f}_{\mathrm{A}}}{S} = \underbrace{\frac{N_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{A}}}{3Sd}}_{(4)} \times \langle {v_{\mathrm{A}}}^2\rangle .$$

また，全く同様に，

$$P_{\mathrm{B}} = \underbrace{\frac{N_{\mathrm{B}}m_{\mathrm{B}}}{3Sd}}_{(5)} \times \langle {v_{\mathrm{B}}}^2\rangle .$$

[*6] z 方向に $2d$ 進むごとに衝突する．

ところで，理想気体の状態方程式より[*7][*8]，

$$\begin{cases} P_{\mathrm{A}} = \dfrac{N_{\mathrm{A}}kT}{Sd}\,, \\ P_{\mathrm{B}} = \dfrac{N_{\mathrm{B}}kT}{Sd}\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{P_{\mathrm{A}}}{P_{\mathrm{B}}} = \underbrace{\frac{N_{\mathrm{A}}}{N_{\mathrm{B}}}}_{(6)}\,.$$

さて，ピストンの固定を解いた際の気体 A がピストンにした仕事は，題意より[*9]，

$$W_{\mathrm{A}} = \Delta U = \underbrace{Mgh}_{(7)}\,.$$

熱平衡状態となった後の温度は，気体 A，B からなる系の熱力学第 1 法則より[*10]，

$$0 = W_{\mathrm{A}} + \Delta U_{\mathrm{A}} + \Delta U_{\mathrm{B}}$$

$$0 = Mgh + \frac{3}{2}N_{\mathrm{A}}k(T' - T) + \frac{3}{2}N_{\mathrm{B}}k(T' - T)\,, \qquad \therefore T' = \underbrace{-\frac{2}{3}\frac{Mgh}{(N_{\mathrm{A}} + N_{\mathrm{B}})k}}_{(8)} + T\,.$$

このとき，B のみからなる系の熱力学第 1 法則より，

$$Q_{\mathrm{B}} = \Delta U_{\mathrm{B}} = \underbrace{\frac{3}{2}N_{\mathrm{B}}k(T' - T)}_{(9)}\,.$$

同様に，B のみからなる系の熱力学第 1 法則より，

$$Q_{\mathrm{A}} = W_{\mathrm{A}} + \Delta U_{\mathrm{A}} = \underbrace{\frac{N_{\mathrm{B}}}{N_{\mathrm{A}} + N_{\mathrm{B}}}Mgh}_{(10)}\,.$$

ピストン上昇後の気体 A，B の分圧の比は，(4)，(5) より，

$$\begin{cases} P'_{\mathrm{A}} = \dfrac{N_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{A}}\langle {v_{\mathrm{A}}}^2\rangle}{3S(d+h)}\,, \\ P'_{\mathrm{B}} = \dfrac{N_{\mathrm{B}}m_{\mathrm{B}}\langle {v_{\mathrm{B}}}^2\rangle}{3Sd}\,. \end{cases} \qquad \therefore \frac{P'_{\mathrm{A}}}{P'_{\mathrm{B}}} = \underbrace{\frac{d}{d+h}}_{(11)} \times \frac{N_{\mathrm{A}}}{N_{\mathrm{B}}}\,.$$

よって，上下の圧力差は，

$$(P'_{\mathrm{A}} + P'_{\mathrm{B}}) - P'_{\mathrm{A}} = P'_{\mathrm{B}}$$

[*7] 状態方程式 $P_{\mathrm{A}} = \dfrac{N_{\mathrm{A}}kT}{Sd}$ と分子運動論の帰結 $P_{\mathrm{A}} = \dfrac{N_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{A}}\langle {v_{\mathrm{A}}}^2\rangle}{3Sd}$ より，

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}\langle {v_{\mathrm{A}}}^2\rangle = \frac{3}{2}kT$$

を得る．問題ではこの関係（エネルギー等分配則）を使うように誘導されているが，ここでは状態方程式を用いた．

[*8] これは，化学で習う「分圧はモル分率に比例する」という事実と整合する．物理の試験では，この分圧に関する常識が物理の教科書に載っていないために，このように導出する（もしくは問題文で与えてしまう）必要がある．

[*9] この議論については **【補足】** を参照．とりあえずは，以下の計算は全て誘導に従うことにする．

[*10] この系には外部からの熱の流入はなく，気体のする仕事は (7) で計算したピストンにした仕事と等しい．

となり，状態方程式，および (9) より，

$$P'_{\mathrm{B}} = \frac{N_{\mathrm{B}}kT'}{Sd} = \frac{T'}{T}P_{\mathrm{B}} = \frac{T + \dfrac{2}{3}\dfrac{Q_{\mathrm{B}}}{N_{\mathrm{B}}k}}{T}P_{\mathrm{B}} = P_{\mathrm{B}} + \underbrace{\frac{2}{3Sd}}_{(12)} \times Q_{\mathrm{B}} \, .$$

【補足】定義から計算されない仕事は，仕事か，熱か．

ピストンの固定が解かれてから熱平衡状態に至るまでの過程では，気体にむらが生じているため，その間の気体 A，B の圧力は定義されない（圧力が一意に定まらないため）．圧力が定義されない場合，仕事の計算も定義通り行うことができない．このような場合，気体は明らかに仕事をしているように見えるが仕事の定義から仕事を計算することができないため，このエネルギーのやり取りを仕事と解釈するのが自然か，これは熱と解釈するのが自然か，という問題が生じる．ここでは，圧力が定義されない場合，同様に仕事も定義されず，このような場合におけるエネルギーの移動は全て熱と解釈する立場を取ってこの問題を考え直してみる．

まず，気体 A，B，重力場からなる系のエネルギー保存則（熱力学第 1 法則）より，

$$\begin{aligned} &0 = \mathit{\Delta} U_{\mathrm{A}} + \mathit{\Delta} U_{\mathrm{B}} + \mathit{\Delta} U \\ &0 = \frac{3}{2}N_{\mathrm{A}}k(T'-T) + \frac{3}{2}N_{\mathrm{B}}k(T'-T) + Mgh \, , \qquad \therefore T' = -\frac{2}{3}\frac{Mgh}{(N_{\mathrm{A}}+N_{\mathrm{B}})k} + T \, . \end{aligned}$$

さて，B からなる系の熱力学第 1 法則より，

$$Q_{\mathrm{B}} = \mathit{\Delta} U_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2}N_{\mathrm{B}}k(T'-T) = -\frac{N_{\mathrm{B}}}{N_{\mathrm{A}}+N_{\mathrm{B}}}Mgh \, .$$

続いて，気体 A と重力場からなる系のエネルギー保存則（熱力学第 1 法則）より，

$$Q_{\mathrm{A}} = \mathit{\Delta} U_{\mathrm{A}} + \mathit{\Delta} U = \frac{3}{2}N_{\mathrm{A}}k(T'-T) + Mgh = \frac{N_{\mathrm{A}}}{N_{\mathrm{A}}+N_{\mathrm{B}}}Mgh \, .$$

以上のように，見る系を「A と重力場」と拡げることによって，気体 A，重力場と個々に見た場合に生じる問題である「圧力が定義されない状況下における気体のする「仕事」」という概念を持ち出さずに同様の結論を得ることができる[*11]．このように，気体にむらが生じているために定義通り仕事を計算することができないが，明らかに体積が膨張しているこのようなケースでは，この過程でのエネルギーの移動を仕事と解釈するのか熱と解釈するのかは一義的には決まらない[*12]．

---

*11 もちろん，問題の誘導のように，気体にむらの生じている場合でも（広い意味で）「仕事」が定義できるとしてしまえば個々のエネルギー収支を論じることはできるが，当然この際の「仕事」は定義通り計算することができないため，問題の誘導のように「ピストンの移動にともなって A がピストンにする仕事は，ピストンの力学的エネルギー変化に一致する」というようにして解釈を押し広げ，間接的に「仕事」を求めるほかない．

*12 筆者は（この解答を作成した 2023 年 8 月時点では）後者の解釈（直接的な計算ができないエネルギーの移動を熱と解釈する立場）の方が自然だと考える．