〔１〕 単振動

【メモ】

・等加速度運動，単振動だけは，高校範囲で時間追跡可能な運動であり，運動方程式で解くか，エネルギーで解くかという解法の選択がある．この問題では時刻 t が問われていないため，エネルギーで考えるのが良い．なお，エネルギーで考える場合は特にどこまでを 1 つの系と見なすかが重要である．

【解答】

問１　静止摩擦力の大きさを R として，力のつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = -k(x-d) - R\,, \\ 0 = N - mg \end{cases} \qquad N = mg\,,\quad R = -k(x-d)\,.$$

滑りだす瞬間を考えて，

$$R = -k(x_0 - d) = \mu_1 mg\,, \qquad \therefore x_0 = d - \frac{\mu_1 mg}{k}\,.$$

問２　鉛直方向のつりあいより $N = mg$ ゆえ，運動方程式は，

$$ma = -k(x-d) - \mu_2 mg\,.$$

問３　運動方程式より，

$$ma = -k(x-d) - \mu_2 mg = -k\left(x - d + \frac{\mu_2 mg}{k}\right)\,, \qquad \therefore L = d - \frac{\mu_2 mg}{k}\,.$$

問４　物体のエネルギー収支を考えて，$L > x_0$ より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \int_{x_0}^{x_{\mathrm{M}}} \{-k(x-L)\}\,dx = -\frac{1}{2}k(x_{\mathrm{M}} - L)^2 + \frac{1}{2}k(x_0 - L)^2$$

$$\therefore x_{\mathrm{M}} = 2L - x_0\,.$$

問５　物体のエネルギー収支を考えて[*1]，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mw^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 &= \int_{x_0}^{x} \{-k(x-L)\}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}k(x-L)^2 + \frac{1}{2}k(x_0 - L)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore x = L + \sqrt{(L - x_0)^2 - \frac{m}{k}w^2}\,.$$

---

*1 $x > L$ を満たす解を選ぶ．

問６　ベルトコンベアに対して静止しないためには問 5 の x が存在しなければよいので[*2*3]，

$$(L-x_0)^2-\frac{m}{k}w^2<0\,,\qquad \therefore w>(\mu_1-\mu_2)g\sqrt{\frac{m}{k}}\,(=w_{\mathrm{c}})\,.$$

【補足】問 4，問 5 を時間追跡で考える

問 4：運動方程式より，この間，物体は振動中心 $x=L$，角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動を行う．初期条件 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=0$ より，物体の位置 x は時刻 t の関数として，

$$x=L-(L-x_0)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

と表される[*4]．よって，$L>x_0$ より，

$$x_{\mathrm{M}}=L-(L-x_0)(-1)=2L-x_0\,.$$

問 5：物体の位置 x の式より，$\dot{x}=w$ となる瞬間を考えて，

$$\begin{cases} x=L-(L-x_0)\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right), \\ w=(L-x_0)\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right), \end{cases}$$

$$\therefore (x-L)^2+\frac{m}{k}w^2=(L-x_0)^2\,,\qquad \therefore x=L+\sqrt{(L-x_0)^2-\frac{m}{k}w^2}\,.$$

[*2] 等速で運動する区間の距離を D とすると，

$$D=\left\{L+\sqrt{(L-x_0)^2-\frac{m}{k}w^2}\right\}-\left\{L-\sqrt{(L-x_0)^2-\frac{m}{k}w^2}\right\}=2\sqrt{(L-x_0)^2-\frac{m}{k}w^2}$$

であり，この D が存在しない条件 $D<0$ を考えてもよい．

[*3] 物体が位置 x にあるときの速さ v は，

$$\frac{1}{2}mv^2=\int_{x_0}^{x}\{-k(x-L)\}\,dx=-\frac{1}{2}k(x-L)^2+\frac{1}{2}k(x_0-L)^2\,.$$

から求まり，$x=L$ で最大とわかる．$v<w$ であればベルトコンベアに対して静止しない，と考えてもよい．

[*4] 単振動ゆえ，未知定数を C，D とすれば，物体の位置 x，および速度 $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ はそれぞれ，

$$\begin{cases} x=L+C\sin(\omega t)+D\cos(\omega t)\,, \\ \dot{x}=C\omega\cos(\omega t)-D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

ここに，初期条件より，

$$\begin{cases} x_0=L+D\,, \\ 0=C\omega\,, \end{cases}\qquad \therefore C=0\,,\quad D=-L+x_0$$

と未知定数が決定でき，位置 x を時刻 t の関数として表すことができる．

〔2〕 磁場が時間変化する電磁誘導，誘導電場，荷電粒子の運動（等速円運動，衝突）

【メモ】

・磁場が時間変化するタイプの電磁誘導はファラデイ則一択．

・誘導電場の計算は，高校範囲ではファラデイ則から計算した誘導起電力から逆算するほかない．

・等速円運動は，以下の連立．なお，今回の設定では，つりあいの式は（自明のため）不要．

$$\begin{cases} \text{運動方程式の中心成分} \\ \text{力のつりあい} \end{cases}$$

・衝突は，以下の 2 式連立が基本だが，板を固定するために衝突方向に外力を加える必要があり，運動量保存則は成り立たず，問題文で与えられた条件だけで処理をする．

$$\begin{cases} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題文で与えられた条件} \end{cases}$$

【解答】

図のように，粒子の軌道は半径 a の円軌道の一部を描くことから，電荷は $\underset{(1)}{\text{正}}$ であり[*5]，その速さ v は，運動方程式の中心成分より，

$$m\frac{v^2}{a} = qvB\,, \qquad \therefore v = \underbrace{\frac{qBa}{m}}_{(2)}\ .$$

粒子は 1 回目の衝突後，半径 a の半円を描きながら衝突を繰り返すので，

$$R_n = R_{n-1} + 2a = \cdots = R_1 + 2a(n-1) = \underbrace{(2n-1)a}_{(3)}\ .$$

また，衝突直前の運動量成分は，

$$p_x = \underbrace{0}_{(4)}\,, \quad p_y = \underbrace{-mv}_{(5)}\ .$$

さて，円 C 内を貫く磁束 $\varPhi$ は，時刻 t におけるソレノイドコイル内の磁場を $B_1(t)$ とすると，

$$\varPhi = \pi b^2 B_1(t) + \pi({R_n}^2 - b^2)B$$

ゆえ，円 C 上に生じる誘導起電力 V は，

$$V = -\frac{\Delta\varPhi}{\Delta t} = \underbrace{-\pi b^2\frac{\Delta B_1}{\Delta t}}_{(6)}\ .$$

---

*5 ローレンツ力の向きを考えればよい．

である．すなわち，C 上には反時計回りに V の誘導起電力が存在することから，そこには，反時計回りに

$$E = \underbrace{\frac{V}{2\pi R_n}}_{(6)}$$

の誘導電場が生じている[*6]．

$\mathit{\Delta} t$ 間に荷電粒子が誘導電場から受ける力積の y 成分 I_y は，

$$I_y = qE\mathit{\Delta} t = \frac{q}{2\pi R_n}\left(-\pi b^2 \frac{\mathit{\Delta} B_1}{\mathit{\Delta} t}\right) = \underbrace{-\frac{qb^2}{2R_n}\mathit{\Delta} B_1}_{(8)}$$

ゆえ，この力積で小球の運動量を 0 とするためには，

$$0-(-mv) = -\frac{qb^2}{2R_n}\mathit{\Delta} B_1\,, \qquad \therefore \mathit{\Delta} B_1 = -\frac{2mvR_n}{qb^2} = \underbrace{-\frac{2BaR_n}{b^2}}_{(9)} \quad .$$

*6 電場は，高電位の側から低電位の側に向かう．

〔３〕 熱機関

【メモ】

・熱力学の基本処理を組み合わせた熱機関．具体的な力学モデルを与えられていないことから，可動部分のつりあいは考えなくてよい．内部エネルギー変化は公式，仕事は $p-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則より吸熱量 Q を計算する．

・熱効率（e とする）は，その定義を押さえる．

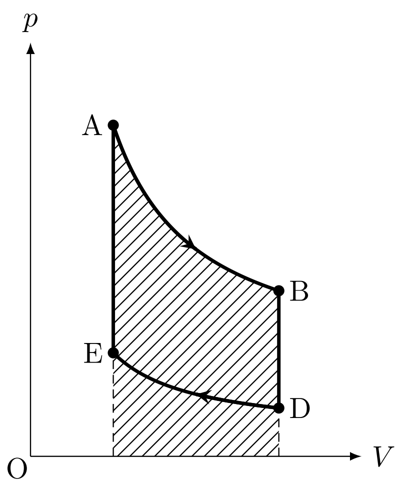
$$e=\frac{W_{1\,周}}{Q_{吸収}}=\frac{Q_{吸収}-Q_{放出}}{Q_{吸収}}=1-\frac{Q_{放出}}{Q_{吸収}}\,.$$

【解答】

(1) $Q_1=W_1$.

(2) 等温変化ゆえ，気体の内部エネルギーは不変である．そのため，熱力学第 1 法則より Q_1 と W_1 は等しい．

(3) W_1 は以下の図の斜線部．



B → C の過程において，蓄熱器内部の気体の内部エネルギー変化を ΔU^*，吸熱量を Q^*，シリンダー内部の気体の内部エネルギー変化を ΔU，吸熱量を Q とすると，熱力学第 1 法則より，

$$Q^*=\Delta U^*\,,\quad Q=\Delta U\,.$$

さらに，蓄熱器とシリンダーを合わせた全体で見れば断熱過程と見なせるので，

$$Q+Q^*=0\,.$$

以上より，

$$0=\Delta U+\Delta U^{*}=nC_{\mathrm{V}}(T_0{}'-T_0)+n_0C_{\mathrm{V}}(T_0{}'-T_1)$$

$$\therefore T_0{}'=\underset{(4)}{\underline{\frac{n_0}{n_0+n}}}\times T_0+\underset{(5)}{\underline{\frac{n}{n_0+n}}}\times T_1\,.$$

また，このときの蓄熱器の吸熱量は，

$$Q_0=Q^{*}=\Delta U^{*}=n_0C_{\mathrm{V}}(T_0{}'-T_0)=\frac{n_0n}{n_0+n}C_{\mathrm{V}}(T_1-T_0)\,.$$

C → D の過程は A → B と同じく等温過程ゆえ，気体が外部にする仕事は，

$$W_{\mathrm{AB}}=\int_{V_1}^{V_2}\frac{nRT_1}{V}\,dV=RT_1\log\left(\frac{V_1}{V_2}\right)=W_1\,,$$

$$W_{\mathrm{CD}}=\int_{V_2}^{V_1}\frac{nRT_2}{V}\,dV=-RT_2\log\left(\frac{V_1}{V_2}\right)=-W_2\,,$$

$$\therefore \frac{W_2}{W_1}=\underset{(6)}{\underline{\frac{T_2}{T_1}}}\,.$$

なお，$W_1=Q_1$ より，以下のようにも書ける．

$$W_2=\frac{T_2}{T_1}Q_1\,.$$

E → F の過程において，題意に従い気体の温度は T_2 から T_0 へ変化したとすれば，内部エネルギー変化は，

$$\Delta U=\underset{(7)}{\underline{nC_{\mathrm{V}}(T_2-T_0)}}\,.$$

ここで，この過程でのシリンダー内部の気体の吸熱量が Q_0 に等しいように T_0 を選んでいることから，

$$\Delta U=Q_0$$

$$nC_{\mathrm{V}}(T_2-T_0)=\frac{n_0n}{n_0+n}C_{\mathrm{V}}(T_1-T_0)\,,\qquad \therefore T_0=\underset{(8)}{\underline{\frac{n_0}{2n_0+n}}}\times T_1+\underset{(9)}{\underline{\frac{n_0+n}{2n_0+n}}}\times T_2\,.$$

このとき，F → A における吸熱量 q_2 は，熱力学第 1 法則より，

$$q_2=\Delta U=nC_{\mathrm{V}}(T_1-T_0)=\frac{n_0+n}{2n_0+n}nC_{\mathrm{V}}(T_1-T_2)\,.$$

以上より，この熱機関の熱効率は，

$$e(n_0)=\frac{W_1-W_2}{Q_1+q_2}=\frac{Q_1(1-T_2/T_1)}{Q_1+\dfrac{n_0+n}{2n_0+n}nC_{\mathrm{V}}(T_1-T_2)}=\frac{1-T_2/T_1}{1+\dfrac{n_0+n}{2n_0+n}\alpha(T_1-T_2)}\,.$$

よって，蓄熱器がないときの熱効率との比は，

$$\frac{e(n_0)}{e_0}=\frac{\dfrac{1-T_2/T_1}{1+\dfrac{n_0+n}{2n_0+n}\alpha(T_1-T_2)}}{\dfrac{1-T_2/T_1}{1+\alpha(T_1-T_2)}}=\frac{1+\alpha(T_1-T_2)}{1+\underset{(10)}{\underline{\dfrac{n_0+n}{2n_0+n}}}\times\alpha(T_1-T_2)}\,.$$

【補足】(8)，(9) の $\boldsymbol{T_0}$ 決定を書いてある通りに計算

E → F の過程において，終状態の両気体の温度を T^* とすると，シリンダー内部の気体と蓄熱器内部の気体を合わせた系の熱力学第 1 法則より，

$$0 = \Delta U + \Delta U^* = nC_{\mathrm{V}}(T^* - T_2) + n_0 C_{\mathrm{V}}(T^* - T_0)$$

$$\therefore T^* = \left(\frac{n_0}{n_0+n}\right)^2 T_0 + \frac{n_0 n}{(n_0+n)^2} T_1 + \left(\frac{n}{n_0+n}\right)^2 T_2\,.$$

$T^* = T_0$ となるように選べば，

$$T_0 = \left(\frac{n_0}{n_0+n}\right)^2 T_0 + \frac{n_0 n}{(n_0+n)^2} T_1 + \left(\frac{n}{n_0+n}\right)^2 T_2\,, \qquad \therefore T_0 = \frac{n_0}{2n_0+n} T_1 + \frac{n_0+n}{2n_0+n} T_2$$