〔１〕 剛体のつりあい

【メモ】

・剛体の力学は以下の 2 式を連立.

$$\begin{cases} \text{力のモーメントのつりあい} \\ \text{力のつりあい} \end{cases}$$

・剛体が滑らない・回らない条件は抗力の存在条件を考えればよい.

【解答】

問１　力のつりあい，および点 A まわりの力のモーメントのつりあいより[*1],

$$\begin{cases} 0 = F_{\mathrm{A}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}N_{\mathrm{B}} + pMg\,, \\ 0 = N_{\mathrm{A}} + \dfrac{1}{2}N_{\mathrm{B}} - Mg\,, \\ 0 = 6LN_{\mathrm{B}} - 4L\dfrac{1}{2}Mg - 4L\dfrac{\sqrt{3}}{2}pMg\,, \end{cases} \qquad \therefore N_{\mathrm{B}} = \underline{\frac{1+\sqrt{3}\,p}{3}Mg}\,.$$

問２　問 1 より,

$$N_{\mathrm{A}} = \underline{\frac{5-\sqrt{3}\,p}{6}Mg}\,.$$

問３　問 1 より,

$$F_{\mathrm{A}} = \underline{\frac{\sqrt{3}-3p}{6}Mg}\,.$$

問４　滑らない条件を考えて，前問までの結果に $p=0$ を代入して,

$$F_{\mathrm{A}}(p=0) < \mu N_{\mathrm{A}}(p=0)\,, \qquad \therefore \underline{\mu > \frac{\sqrt{3}}{5}}\,.$$

問５　$N_{\mathrm{B}} > 0$ を考えて,

$$\underline{p_0 > -\frac{1}{\sqrt{3}}}\,.$$

問６　棒に左向きの滑りが生じるとき，F_{A} は右向きにはたらく（すなわち $F_{\mathrm{A}} > 0$）. よって，滑らない条件を考えて,

$$F_{\mathrm{A}} < \mu N_{\mathrm{A}}$$

$$\frac{\sqrt{3}-3p}{6}Mg < \mu\frac{5-\sqrt{3}\,p}{6}Mg\,, \qquad \therefore \underline{p\mu - \sqrt{3}p - \frac{5}{\sqrt{3}}\mu + 1 < 0}\,.$$

[*1] ここでは，誘導通り力のモーメントのつりあいだけを考えればよいが，日頃の学習では，現象を支配する物理法則は一度に立ててしまうのが良いのでそのようにした.

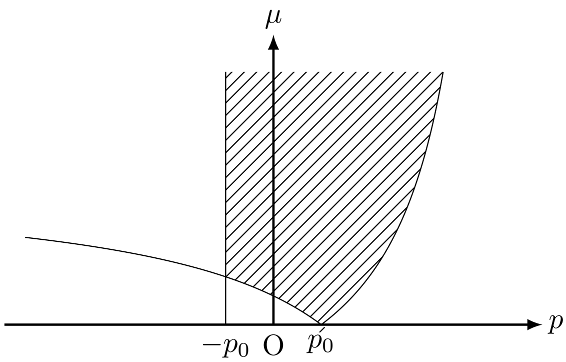
問７　棒に右向きの滑りが生じるとき，F_A は左向きにはたらく（すなわち $F_\mathrm{A} < 0$）．よって，滑らない条件を考えて，

$$\begin{aligned} &|F_\mathrm{A}| < \mu N_\mathrm{A} \\ -&\frac{\sqrt{3}-3p}{6}Mg < \mu\frac{5-\sqrt{3}\,p}{6}Mg\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{p\mu + \sqrt{3}p - \frac{5}{\sqrt{3}}\mu - 1 < 0}\,. \end{aligned}$$

問８　条件 (b) より $p < \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ であり，条件 (a)，(b)，(c) を同時に満たす領域は次の不等式で表される[*2]．

$$\begin{cases} \text{(a)} : p > -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,, \\ \text{(b)} : p < \dfrac{5}{\sqrt{3}}\,, \\ \text{(c)} : \begin{cases} \mu > \dfrac{4}{p-5/\sqrt{3}} + \sqrt{3} & \left(p < \dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)\,, \\ \mu > -\dfrac{4}{p-5/\sqrt{3}} - \sqrt{3} & \left(p < \dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)\,, \end{cases} \end{cases}$$

以上より，この不調式の表す領域は以下の図のようになる[*3]．なお，$p_0 = \underset{\sim\sim}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ である[*4]．



[*2] 条件 (c) を整理する過程で生じる双曲線の不等号が逆になっている不等式が関与する領域は，条件 (b) の $p < \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ より空集合となる．

[*3] 領域の境界については，有効数字の観点から考えれば厳密に等号成立が成り立つとは言い切れないのでどちらでもよい．以下の図は，境界線を含むように（不等式に等号成立がお起こりうるとして）図示してある．

[*4] まず，係数正の双曲線の式から $\mu = 0$ を解けば $p = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る．また，問 4 の $\mu > \dfrac{\sqrt{3}}{5}$ については，これも係数性の双曲線を考えれば満たされていることがわかる．

〔２〕 荷電粒子の運動（等速円運動），動く座標系（等速度）

【メモ】

・等速円運動は，以下の連立．なお，今回の設定では，つりあいの式は（自明のため）不要．

$$\begin{cases} \text{運動方程式の中心成分} \\ \text{力のつりあい} \end{cases}$$

・補足に載せた計算で誘導が付くこともあるので，そちらも抑えておく．

【解答】

問１ 運動方程式は，

$$\begin{cases} ma_x = \underline{-ev_yB}\,, \\ ma_y = \underline{ev_xB}\,. \end{cases}$$

このとき，荷電粒子の運動は等速円運動となり，その周期 T_0 は問題文より $T_0 = \frac{2\pi m}{eB}$，半径 r_0 は $r_0 = \dfrac{vT}{2\pi} = \frac{mv}{eB}$ である．なお，v は等速円運動の速さである．

問２ 運動方程式より，

$$\begin{cases} ma_x = -ev_yB\cos\theta\,, \\ ma_y = ev_xB\cos\theta - mg\sin\theta\,, \\ m\cdot 0 = N - ev_xB\sin\theta - mg\cos\theta\,, \end{cases} \qquad \therefore N = \underline{ev_xB\sin\theta + mg\cos\theta}\,.$$

問３ 運動方程式より $a_x = 0$ かつ $a_y = 0$ ゆえ，

$$ev_xB\cos\theta - mg\sin\theta = 0\,, \qquad \therefore v_x = \underline{\frac{mg}{eB}\tan\theta}\,(= v_0)\,.$$

問４ $w_x = v_x - v_0$，$w_y = v_y$ と変数変換の下での運動方程式は，$\dot{w}_x = \dot{v}_x$，$\dot{w}_y = \dot{w}_y$ ゆえ，

$$\begin{cases} m\dot{w}_x = -ew_yB\cos\theta\,, \\ m\dot{w}_y = e(w_x + v_0)B\cos\theta - mg\sin\theta \\ \qquad\ = ew_xB\cos\theta\,. \end{cases}$$

よって，問１での運動方程式と比較すれば，荷電粒子は，変数変換を施した座標系（S′ 系と呼ぶ）内部では，速度 $\vec{w} = (w_x, w_y)$ で運動する周期 $T = \dfrac{2\pi m}{eB\cos\theta}$ の等速円運動をすると読める．初期条件 $w_x(0) = v_1 - v_0$，$w_y(0) = 0$ より，S′ 系での円運動の速さは，$|w| = |v_1 - v_0|$ であり，S′ 系における始状態での速度成分は $\vec{w} = (v_1 - v_0, 0)$ ゆえ，最高点（折り返しゆえ $w_y = 0$）での速度成分は始状態と逆向きの $\vec{w} = (-v_1 + v_0, 0)$ となる．よって，

$$w_x = v_x - v_0 = -v_1 + v_0\,, \qquad \therefore v_x = \underline{2v_0 - v_1}\,.$$

問 5　S′ 系内部での荷電粒子の位置を (ξ, η) とする．S′ 系では，粒子は周期 $T = \dfrac{2\pi m}{eB\cos\theta}$，半径 $r = \dfrac{wT}{2\pi} = \dfrac{m|v_1 - v_0|}{eB\cos\theta}$ の等速円運動を行う．初期条件 $\xi(0) = 0 - v_0 \cdot 0 = 0$，$\eta(0) = 0$ より，S′ 系内部での荷電粒子の位置は，

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{m(v_1 - v_0)}{eB\cos\theta}\sin\left(\dfrac{eB\cos\theta}{m}t\right), \\ \eta = \dfrac{m(v_1 - v_0)}{eB\cos\theta}\left\{1 - \cos\left(\dfrac{eB\cos\theta}{m}t\right)\right\}, \end{cases}$$

と表される．y が最大となる時刻は $t = \dfrac{1}{2}T + nT$（n は 0 以上の整数）ゆえ，

$$x = \xi + \frac{1}{2}v_0 T = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\pi m v_0}{eB\cos\theta}}, \quad , y = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2m(v_1 - v_0)}{eB\cos\theta}}.$$

また，この間ローレンツ力 W_1（仕事率を P_1 とする），および重力のする仕事 W_2 はそれぞれ[*5]，

$$P_1 = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -ev_y B\cos\theta \\ ev_x B\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \therefore W_1 = \int_0^{\frac{1}{2}T} P_1\,dt = \underset{\sim}{0},$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{pmatrix} = -2mgr\sin\theta = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{-2m^2 g(v_1 - v_0)}{eB}\tan\theta}.$$

【補足】誘導を無視して微分方程式を解く

S′ 系での物体の位置を (ξ, η)，速度を (w_x, w_y) とする．ここで，斜面固定系での (x, y) との対応は以下のとおりである．

$$(\xi, \eta) = (x - v_0 t, y).$$

荷電粒子の運動方程式は，$\omega = \dfrac{eB}{m}\cos\theta$ とすれば，

$$\begin{cases} m\dot{w}_x = -m\omega w_y, \\ m\dot{w}_y = m\omega w_x. \end{cases}$$

ここで，第 1 式の両辺を時刻 t で積分すれば，

$$w_x - (v_1 - v_0) = -\omega(\eta - 0), \qquad \therefore w_x = (v_1 - v_0) - \omega\eta$$

であり，これを第 2 式に代入すれば，$\dot{w}_y = \dot{\eta}$ より，

$$\ddot{\eta} = -\omega^2\left(\eta - \frac{v_1 - v_0}{\omega}\right).$$

*5 「磁場は仕事をしない」は常識．

したがって，η は振動中心 $\eta = \dfrac{v_1 - v_0}{\omega}$，角振動数 $\omega \left(= \dfrac{eB}{m}\cos\theta \right)$ の単振動を行うことがわかる．初期条件 $\eta(0) = 0$，$\dot{\eta}(0) = 0$ より，

$$\eta = \frac{v_1 - v_0}{\omega}\{1 - \cos(\omega t)\} = \eta = \frac{m(v_1 - v_0)}{eB\cos\theta}\left\{1 - \cos\left(\frac{eB\cos\theta}{m}t\right)\right\}.$$

また，$w_x = (v_1 - v_0) - \omega\eta$ より，

$$w_x = (v_1 - v_0)\cos(\omega t)$$

であり，両辺 t で積分すれば，$t = 0$ で $\xi(0) = 0$ より，

$$\xi = \frac{(v_1 - v_0)}{\omega}\sin(\omega t) = \frac{m(v_1 - v_0)}{eB\cos\theta}\sin\left(\frac{eB\cos\theta}{m}t\right).$$

以上より，斜面固定系での位置に逆変換すれば，

$$\begin{cases} x = v_0 t + \dfrac{m(v_1 - v_0)}{eB\cos\theta}\sin\left(\dfrac{eB\cos\theta}{m}t\right), \\ y = \dfrac{m(v_1 - v_0)}{eB\cos\theta}\left\{1 - \cos\left(\dfrac{eB\cos\theta}{m}t\right)\right\}. \end{cases}$$

この式から y が最大となる時刻 t を求め，x や $\dot{x}$ に代入すればよい．

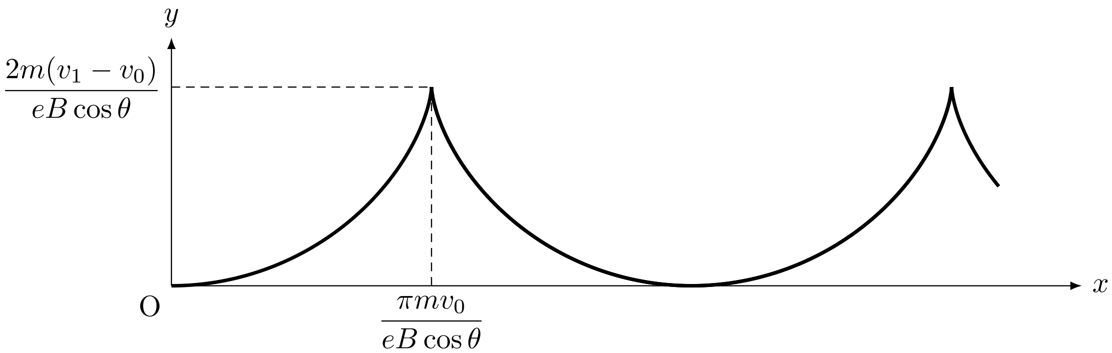


図 1　$v_1 = 2v_0$ の場合の xy 平面内での荷電粒子の軌跡

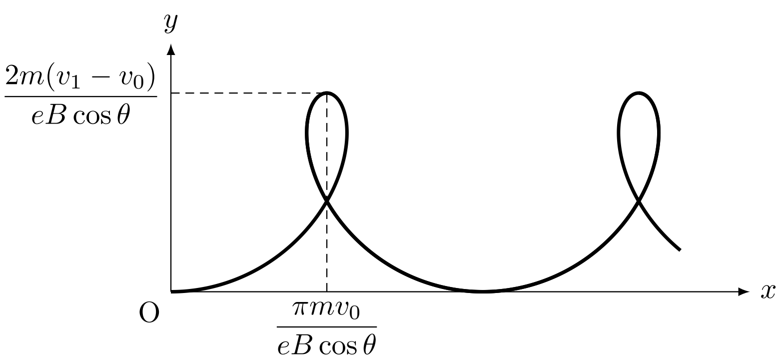


図 2　$v_1 > 2v_0$ の場合の xy 平面内での荷電粒子の軌跡

〔３〕 熱力学の基本処理，流体から受ける圧力

【メモ】

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題．定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算．今回の問題は全て基本通り．

・流体（密度 ρ）から受ける圧力の公式は，静止流体のつりあいから導出され，液面から深さ z では以下の形をとる．

$$P(z) = P(0) + \rho g z\,.$$

【解答】

シリンダー A 内の気体のモル数は，状態方程式より，

$$n = \underbrace{\frac{P_1 S\ell}{RT_1}}_{(1)}\,.$$

このとき，液体から受ける圧力を $P_{\rm lq}$ とすれば，液面では $P_{\rm lq} = P_0$ ゆえ，シリンダー A 内部の気体の圧力 P_1 はピストンのつりあいより，

$$0 = P_1 S - P_0 S - P_0 S + P_{\rm lq} S = P_1 S - P_0 S\,, \qquad \therefore P_1 = \underbrace{P_0}_{(2)}\,.$$

次に，ヒータによる加熱でシリンダー A 内部の気体が $x = x_2$ だけ膨張した状態を考える．このとき，ピストンが液面から受ける圧力 $P_{\rm lq}$ は，液柱のつりあいより[*6]，

$$0 = P_0 S - P_{\rm lq} S - \rho S g x_2\,, \qquad \therefore P_{\rm lq} = \underbrace{P_0 - \rho g x_2}_{(3)}$$

であり，ピストンのつりあいより，A 内部の気体の圧力 P_2 は，

$$0 = P_2 S - P_0 S - P_0 S + P_{\rm lq} S\,, \qquad \therefore P_2 = \underbrace{P_0 + \rho g x_2}_{(4)}\,.$$

よって，この状態における A 内部の気体の温度 T_2 は，状態方程式より，

$$P_2 S(\ell + x) = nRT_2\,, \qquad \therefore \frac{T_2}{T_1} = \frac{(P_0 + \rho g x_2)S(\ell + x)}{RP_0 S\ell/RT_1}\frac{1}{T_1} = \underbrace{\left(1 + \frac{x_2}{\ell}\right)\left(1 + \frac{\rho g}{P_0}x_2\right)}_{(5)}\,.$$

また，この間の A 内部の気体の内部エネルギー変化は，

$$\varDelta U = \underbrace{\frac{3}{2}nR(T_2 - T_1)}_{(6)}\,.$$

---

*6 ピストンが液体から受ける力が $P_{\rm lq}$ ゆえ，作用・反作用の法則より，液柱がピストンから押される力は $P_{\rm lq}S$ である．

さて，シリンダー B 内部の液面が x だけ上昇したときの液体の圧力の存在条件を考えると，

$$P_{\mathrm{lq}} = P_0 - \rho g x > 0\,, \qquad \therefore x < \underbrace{\frac{P_0}{\rho g}}_{(7)} \quad (= x_3)\,.$$

すなわち，B 内部の液面は x_3 を超えない．

$x = 0$ から $x = x_3$ までの間に A 内部の気体が外部にする仕事は $P - V$ 図より[*7]，

$$W = \int_0^{x_3} (P_0 + \rho g x) S\, dx = \underbrace{P_0 S x_3 + \frac{1}{2}\rho S g {x_3}^2}_{(8)} = \underbrace{\frac{3}{2}\frac{{P_0}^2 S}{\rho g}}_{(9)}\,.$$

内部エネルギー変化は公式より，

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{P_0 S \ell}{R T_1} R \left\{ \left(1 + \frac{x_3}{\ell}\right)\left(1 + \frac{\rho g}{P_0} x_3\right) T_1 - T_1 \right\} = \frac{3}{2} P_0 S \ell + 3 \frac{{P_0}^2 S}{\rho g}\,.$$

以上から，状態 I から III における A 内部の気体の吸熱量 Q は熱力学第 1 法則より，

$$Q = \Delta U + W = \underbrace{\frac{3}{2} P_0 S \ell \left(1 + \frac{3 P_0}{\rho g \ell}\right)}_{(10)}\,.$$

$x > x_3$ となってからは，液面の高さは x_3 に保たれ，ピストン下部では液面との接触はなくなる．よって，ピストン下部が液体から受ける力は 0 であり，

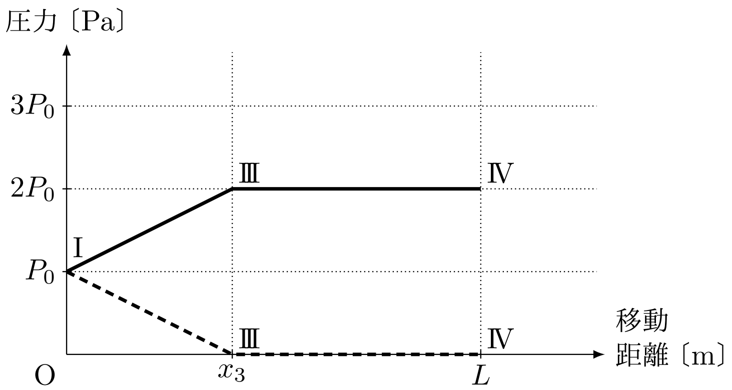
$$P_{\mathrm{B}} S = 0\,, \qquad \therefore P_{\mathrm{B}} = 0\,.$$

また，このときピストンのつりあいから A 内部の気体の圧力 P_{A} は，

$$0 = P_{\mathrm{A}} S - P_0 S - P_0 S\,, \qquad \therefore P_{\mathrm{A}} = 2 P_0\,.$$

以上の結果と (3)，(4) を踏まえれば，以下のようなグラフとなる．

(11)



[*7] 仕事の第 1 項は大気にした仕事，第 2 項は（液体に関する）重力場にした仕事と解釈できる．問題では，このエネルギー収支から仕事を逆算するように誘導が付いている．