〔１〕 時間追跡（単振動，等加速度運動），動く座標系

【メモ】

・問 2，問 6 は動く座標系に関する設問．加速度 $\vec{a}$ で運動する座標系内部では，加速度 $\vec{a}$ の向きと逆向きに慣性力（架空の力）$m\vec{a}$ が生じているように見える．動く座標系で運動方程式を立てる際，加速度は相対加速度であることに注意．

・問 3，問 5，問 7，問 8 は運動の時間追跡に関する設問．等加速度運動（問 7），単振動（問 7 以外）だけは，高校範囲で時間追跡可能な運動であり，運動方程式/エネルギーの解法の分岐がある[*1]．

【解答】

問１　力学的エネルギー保存則より，

$$mgy = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,, \qquad \therefore y = \frac{{v_0}^2}{2g}\,.$$

問２　台 B 固定系における小物体の運動方程式の斜面垂直成分より，

$$N = m(g\cos\theta - a\sin\theta)\,.$$

問３　地面（台 A）固定系における台 B の運動方程式より，

$$\begin{aligned} Ma &= -kx + N\sin\theta \\ &= -kx + mg\sin\theta\cos\theta - ma\sin^2\theta \\ \therefore a &= -\underbrace{\frac{k}{M+m\sin^2\theta}}_{=b_0}x + \underbrace{\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}}_{=a_0}\,. \end{aligned}$$

問４　運動方程式より，

$$a = -b_0\left(x - \frac{a_0}{b_0}\right)\,.$$

問５　角振動数 $\omega = \sqrt{b_0}$，振動中心 $\dfrac{a_0}{b_0}$ の単振動を行うことがわかる．初期条件 $x(0) = 0$，$v(0) = 0$ より，

$$x = \frac{a_0}{b_0}\{1 - \cos(\omega t)\}$$

ゆえ，振幅は $\dfrac{a_0}{b_0}$．

問６　問 5 に示した．

[*1] 基本的には，時刻が問われているかどうかで解法を使い分けるのが良い．

問７　台 B 固定系における小球の相対加速度の斜面に平行な成分 $\ddot{x}'_{\mathrm{rel}}$ は,

$$m\ddot{x}'_{\mathrm{rel}} = -mg\sin\theta - ma\cos\theta\,, \qquad \therefore\ \ddot{x}'_{\mathrm{rel}} = -g\sin\theta - a\cos\theta\,.$$

よって，地面（台 A）固定系での加速度成分に変換すれば[*2],

$$\ddot{x}' = \ddot{x}'_{\mathrm{rel}} - (-a\cos\theta) = \underline{-g\sin\theta}\,.$$

問８　初期条件 $x'(0)=0$，$v'_x(0)=v_0$ より，

$$x' = v_0 t - \frac{1}{2}g\sin\theta t^2 = 0\,, \qquad \therefore\ t = \underline{\frac{2v_0}{g\sin\theta}}\,.$$

問９　前問の t が単振動の周期 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ の自然数倍となればよいので,

$$\frac{2V}{g\sin\theta} = \frac{2\pi}{\omega}n\,, \qquad \therefore\ V = \underline{\frac{\pi g\sin\theta}{\omega}n}\,.$$

【補足】地面固定系から地面固定の斜めの座標系への変換

以下では，xy 座標系を S 系，$x'y'$ 系を S$'$ 系とし，S 系での小物体，および台 B の位置をそれぞれ (x, y)，$(X, Y=0)$，S$'$ 系での小物体，および台 B の位置をそれぞれ (x', y')，(X', Y') とする．

S 系における小物体，および台 B の運動方程式，および束縛条件は,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -N\sin\theta\,, \\ m\ddot{y} = N\cos\theta - mg\,, \\ M\ddot{X} = -kX + N\sin\theta\,, \\ y = (x-X)\tan\theta\,. \end{cases}$$

$$\therefore\ N = \frac{m\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}kX + \frac{Mmg\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}\,, \qquad \ddot{X} = -\frac{k}{M+m\sin^2\theta}X + \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g\,,$$

$$\ddot{x} = -\frac{k\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta}X - \frac{M\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g\,, \qquad \ddot{y} = \frac{k\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}X - \frac{(M+m)\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta}g\,.$$

ここで，S 系から S$'$ 系への変換は,

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta\,, \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta\,, \end{cases}$$

ゆえ，S$'$ 系での加速度は,

$$\begin{cases} \ddot{x}' = \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta\,, \\ \ddot{y}' = -\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta\,, \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \ddot{x}' = -g\sin\theta\,, \\ \ddot{y}' = \dfrac{k\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}X - \dfrac{(M+m)\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta}g\,. \end{cases}$$

ここで，$\ddot{X}$ の式から X を求めれば，x，y，N も時刻 t の関数として求まり，$\ddot{y}'$ も時刻 t の関数として表せる．

[*2] 台 B の $x'y'$ 系における加速度成分は，$\ddot{X}' = -a\cos\theta$，$\ddot{Y}' = -a\sin\theta$.

〔２〕 荷電粒子の運動（等速円運動）

【メモ】

・等速円運動は，以下の連立．なお，今回の設定では，つりあいの式は（自明のため）不要．

$$\begin{cases} \text{運動方程式の中心成分} \\ \text{力のつりあい} \end{cases}$$

【解答】

問１　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-e)V = 0\,, \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}\,.$$

問２　円運動の半径 r は，運動方程式の中心成分より，

$$m\frac{v^2}{r} = evB\,, \qquad \therefore r = \frac{mv}{eB}\,.$$

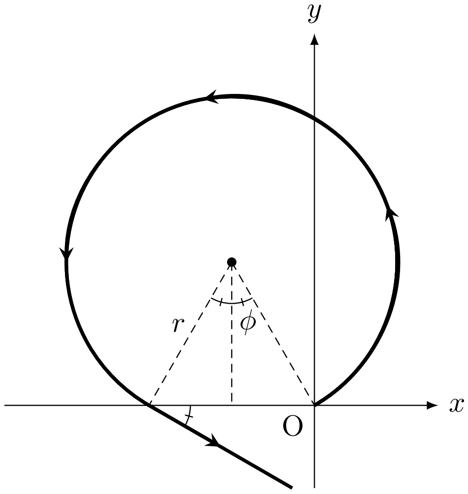
よって，飛び出す位置は負電荷であることに注意して，

$$x = -2r = -\frac{2eB}{mv}\,.$$

また，飛び出す時刻 t は，

$$vt = \pi r\,, \qquad \therefore t = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{eB}\,.$$

問３　速度と直交した向きにローレンツ力を受け，磁場から出た後は力を受けないため，軌跡は以下の図のようになる．



よって，飛び出す位置 x は，

$$x = -2r\sin\phi = -\frac{2mv}{eB}\sin\phi\,.$$

また，飛び出す時刻 t は，

$$vt = (2\pi - 2\phi)r\,, \qquad \therefore t = \frac{2(\pi-\phi)r}{v} = \frac{2(\pi-\phi)m}{eB}\,.$$

問４　電子は力を受けないため，z 軸正の向きに等速度運動を行う．

問５　運動方程式の中心成分より，

$$m\frac{{v_0}^2\sin^2\theta}{r} = ev_0\sin\theta B\,, \qquad \therefore r = \frac{mv_0}{eB}\sin\theta\,,\ \ T = \frac{2\pi r}{v_0\sin\theta} = \frac{2\pi m}{eB}\,.$$

問６　z 軸方向は等速度運動ゆえ，

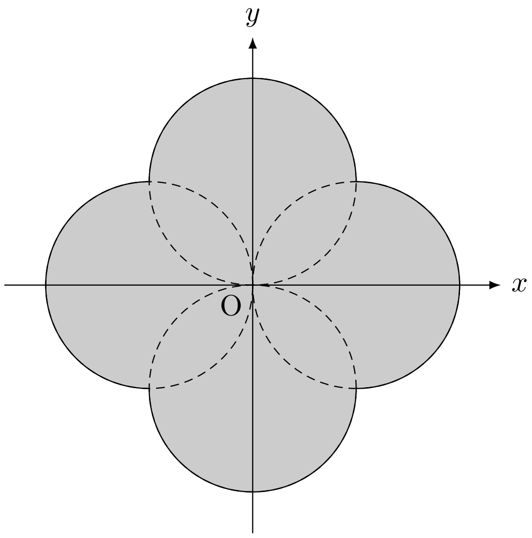
$$L = v_0\cos\theta T = \frac{2\pi m v_0}{eB}\cos\theta\,.$$

問７　v を大きくしていくため，より短い時間で到達する状況を考えればよい．時刻 $2T$ に $z = 3L$ に達する状況を考えて，

$$L = v\cos\theta\cdot 2T = 3L = v_0\cos\theta\cdot 3T\,, \qquad \therefore \frac{v}{v_0} = \frac{3}{2}\,.$$

問８　電子の運動範囲は以下の図のようになる．よって，

$$R > 2r = \frac{2mv}{eB}\sin\theta\,, \qquad \therefore v < \frac{eBR}{2m\sin\theta}\,.$$



問９　検出器で検出されるためには，壁で吸収されない必要があり，

$$\sin\theta < \frac{eBR}{2mv} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,, \qquad \therefore \cos\theta > \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots (☆)$$

を満たす範囲で探していけばよい．

まず，ちょうど 1 周期で検出される場合は，

$$\begin{aligned} &v\cos\theta\cdot T = \pi R \\ &v\cos\theta\frac{2\pi m}{eB} = \pi\frac{4\sqrt{2}\,mv}{3eB}\,, \qquad \therefore \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,. \end{aligned}$$

続いて，ちょうど 2 周期で検出される場合は，

$$v\cos\theta\cdot 2T = \pi R\,, \qquad \therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}\,.$$

ここで，一般にちょうど n 周期で検出される場合は，

$$v\cos\theta\cdot nT = \pi R\,, \qquad \therefore \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3n}$$

となり，$n > 2$ 以上では不等式 (☆) を満たさないことがわかる．よって，

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}\,,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\,.$$

〔３〕 熱力学の基本処理，漸化式

【メモ】

・モル数の変化する繰り返し操作．基本処理で対処可能な操作のみで熱の計算が問われていないため，使う式は状態方程式のみとなる[*3]．

【解答】

(1) 状態方程式より，

$$n_0 = \frac{P_0 V_1}{RT_0}\,.$$

以降，状態 k における狭い領域のモル数を n_k，広い領域のモル数を ν_k とする．

(2) 状態 1 での左室のモル数は状態方程式より $\nu_1 = n_0$ であり，右室のモル数 n_1 は初期状態から変わらない．よって，状態方程式より，

$$P_2(V_1 + V_2) = (n_1 + \nu_1)RT_0 = 2n_0 RT_0\,, \qquad \therefore P_2 = \frac{2a}{a+1}P_0\,.$$

(3) 状態 2 における左室（広い）のモル数 ν_2 は，状態方程式より，

$$P_2 V_1 = \nu_2 RT_0\,, \qquad \therefore \nu_2 = \frac{2a}{a+1}n_0\,.$$

よって，左室の内部エネルギーの差分は，

$$U_2 - U_1 = \frac{3}{2}(\nu_2 - n_0)RT_0 = \frac{3}{2}\frac{a-1}{a+1}P_0 V_1\,.$$

(4) 状態 2 における右室（狭い）のモル数 n_2 は，状態方程式より，

$$P_2 V_2 = n_2 RT_0\,, \qquad \therefore n_2 = \frac{2}{a+1}n_0\,.$$

状態 2 から状態 3 の間で，圧力が P_0 となった状態を状態 2^* とすると，このときの体積は状態方程式より，

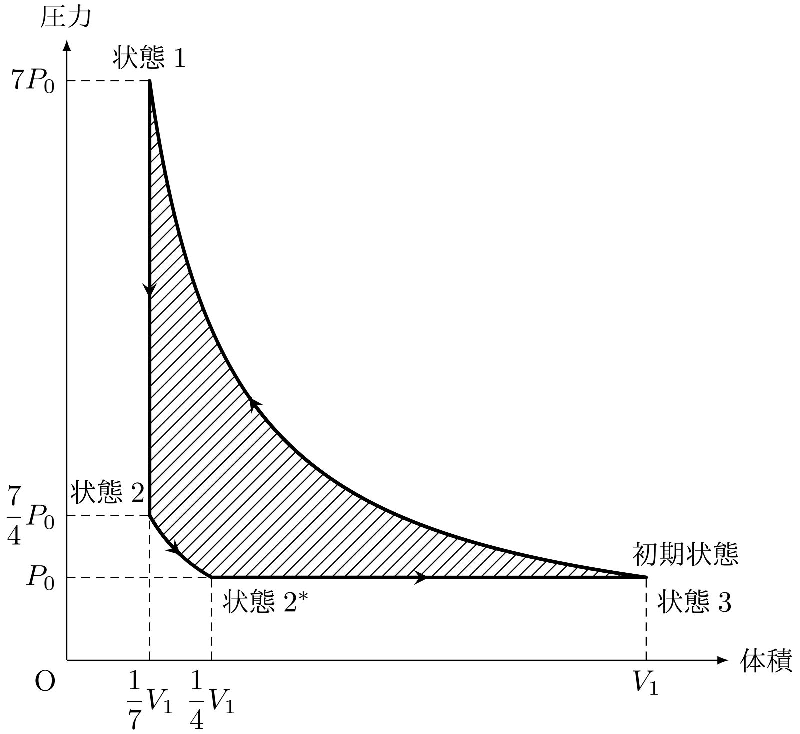
$$P_0 V^* = n_2 RT_0\,, \qquad \therefore \frac{V^*}{V_2} = \frac{2a}{a+1}\,.$$

(5) 圧力一定より，$P-V$ 図の面積評価をすれば，

$$W = P_0(V_1 - V^*) = \frac{a-1}{a+1}P_0 V_1\,.$$

[*3] 途中，内部エネルギー変化や仕事が問われているが，状態方程式さえきちんと使えていれば結果を代入するだけの設問である

(6) 初期状態 (P_0, V_1) から状態 1$\left(aP_0, \dfrac{1}{a}V_1\right)$ は等温過程，状態 1 から状態 2$\left(\dfrac{2a}{a+1}P_0, \dfrac{1}{a}V_1\right)$ は定積過程，状態 2 から状態 $2^*\left(P_0, \dfrac{2}{a+1}V_1\right)$ は等温過程，状態 2^* から状態 $3(P_0, V_1)$ は定圧過程である．以上を踏まえ，$a = 7$ を代入すれば以下のようなグラフとなる．



(7) 問 6 に示した．

(8) $2k-1$ 状態の狭い側のモル数を n_{2k-1}，圧力を P_{2k-1} とすると，状態方程式より，

$$P_{2k-1}V_2 = n_{2k-1}RT_0\,.$$

なお，このとき，広い側のモル数は $\nu_{2k-1} = n_0$ である．

続いて，$2k$ 状態（$2k-1$ 状態からバルブを開く）を考えると，全体の状態方程式より，

$$P_{2k}(V_1 + V_2) = (n_{2k-1} + \nu_{2k-1})RT_0 = (n_{2k-1} + n_0)RT_0$$

$$\therefore P_{2k} = \frac{a}{a+1}\left(1 + \frac{n_{2k-1}}{n_0}\right)P_0\,.$$

よって，広い側のモル数 ν_{2k} は状態方程式より，

$$P_{2k}V_1 = \nu_{2k}RT_0\,, \qquad \therefore \nu_{2k} = \frac{a}{a+1}(n_0 + n_{2k-1})\,.$$

さて，$2k+1$ 状態では，狭い側のモル数は $n_{2k+1} = \nu_{2k}$ であり，狭い側の圧力 P_{2k+1} は全体の

状態方程式より，

$$
\begin{aligned}
&P_{2k+1}V_2 = \nu_{2k}RT_0 \\
&\therefore P_{2k+1} = \frac{a}{a+1}\frac{RT_0}{V_1/a}n_{2k-1} + \frac{a}{a+1}\frac{n_0RT_0}{V_1} \\
&\qquad\quad\; = \frac{a}{a+1}P_{2k-1} + \frac{a^2}{a+1}P_0\,.
\end{aligned}
$$

$a>1$ より，数列 $\{P_{2k-1}\}$ は収束することがわかり，無限回操作後の圧力を P_∞ とすれば[*4*5]，

$$
P_\infty = \frac{a}{a+1}P_\infty + \frac{a^2}{a+1}P_0\,, \qquad \therefore P_\infty = a^2P_0 \overset{a=7}{=} \underset{\sim\sim\sim}{49P_0}\,.
$$

*4 モル数の漸化式を立てて同じような議論をしてもよい．モル数の漸化式は次のようになる．

$$
n_{2k+1} = \nu_{2k} = \frac{a}{a+1}(n_0 + n_{2k-1})\,.
$$

あとは同様の議論から収束先の値を用いて状態方程式を立てればよい．

*5 漸化式から一般項を求めると，

$$
P_{2k-1} = \left(\frac{a}{a+1}\right)^{k-1}P_1 + a^2P_0\left\{1-\left(\frac{a}{a+1}\right)^{k-1}\right\} = a^2\left\{1-\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{a}{a+1}\right)^{k-1}\right\}P_0\,.
$$