〔１〕　単振動，衝突

【メモ】

・問 1，問 2，問 4，問 5，問 5，問 6，問 7 は単振動に関する設問．等加速度運動，単振動だけは，高校範囲で時間追跡可能な運動であり，運動方程式/エネルギーの解法の分岐がある．今回は時刻を問われていないのでエネルギーで考えるのが良い．

・問 5 は衝突に関する設問．

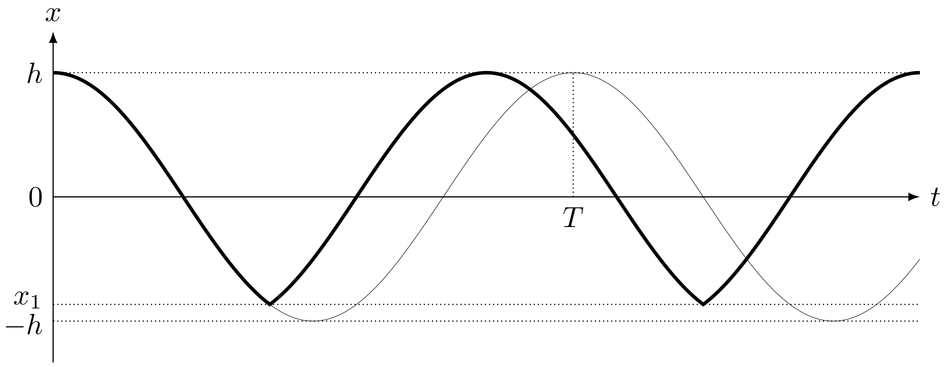
$$\begin{cases}\text{衝突の直前・直後の運動量保存則}\\ \text{問題文の条件}\end{cases}$$

今回は，固定面との衝突ゆえ運動量保存則は成り立たず，条件のみを用いる．

【解答】

問１　$T = \underline{\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$.

問２　衝突の直前・直後で物体の速度は，その大きさは一定のまま向きが反転する．以上を踏まえると次のようなグラフとなる．



問３　衝突の時間間隔は，グラフより $\Delta t = \underline{2t_1}_{(1)}$ であり，時刻 t_1 における回転角 θ_1 は，

$$\theta_1 = \omega t_1 = \underline{2\pi\frac{t_1}{T}}_{(2)} = \underline{\pi\frac{\Delta t}{T}}_{(3)} .$$

このとき，単振動の振幅が h であることから，

$$h\cos\theta_1 = x_1 , \qquad \therefore \cos\theta_1 = \underline{\frac{x_1}{h}}_{(4)} .$$

問４　衝突直前の物体の速さは，エネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \int_h^{x_1}\left\{-k\left(x-\frac{mg}{k}\right)-mg\right\}dx = -\frac{1}{2}k{x_1}^2+\frac{1}{2}kh^2$$

$$\therefore v_0 = \underline{\sqrt{\frac{k}{m}\left(h^2-{x_1}^2\right)}}_{(1)}\ .$$

衝突直後の物体の速度は ev_0 であり，1 回目の床と衝突後の最高点 h_1 はエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}m(ev_0)^2 = \int_{x_1}^{h_1}\left\{-k\left(x-\frac{mg}{k}\right)-mg\right\}dx = -\frac{1}{2}k{h_1}^2+\frac{1}{2}k{x_1}^2$$

$$\therefore h_1 = \underline{\sqrt{{x_1}^2+\frac{m}{k}e^2{v_0}^2}}_{(2)}\ .$$

ここで，1 回目の衝突から 2 回目の衝突までの時間間隔 $\Delta t'$ は，

$$\cos\left(\pi\frac{\Delta t'}{T}\right)=\frac{x_1}{h_1}$$

を満たし，$h>h_1$ であり，$\cos$ は $\dfrac{\pi}{2}$ から π で単調減少ゆえ，

$$\cos\left(\pi\frac{\Delta t'}{T}\right)<\cos\left(\pi\frac{\Delta t}{T}\right),\qquad \therefore \Delta t'>\Delta t\,.$$

よって，非弾性衝突の場合の衝突の時間間隔は，弾性衝突の場合と比べて $\underline{\text{長くなる}}_{(3)}$ ．

問５　n 回目の衝突の直前・直後（または最高点）での物体のエネルギー収支の式，およびはね返り係数の式より[*1]，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}m{v_n}^2 = -\dfrac{1}{2}k{x_1}^2+\dfrac{1}{2}k{h_n}^2\,,\\ v_n-0=-e(-v_{n-1}-0)\,,\end{cases}\qquad \therefore v_n=\underline{e^n v_0}\,,\quad h_n=\underline{\sqrt{{x_1}^2+\frac{m}{k}\left(e^2v_0\right)^2}}\,.$$

問６　問 5 より，

$$v_\infty = 0\,,\quad h_\infty = -x_1\,.$$

よって，<u>振幅 $-x_1$，振動中心 $x=0$ の単振動を行う</u>.

問７　物体，ばね，重力場からなる系の力学的エネルギー変化を計算して，

$$\Delta E = \left\{0+mg(-x_1)+\frac{1}{2}k\left(x_1-\frac{mg}{k}\right)^2\right\}-\left\{0+mgh+\frac{1}{2}k\left(h-\frac{mg}{k}\right)^2\right\}$$

$$\therefore |\Delta E| = \underline{\frac{1}{2}k\left(h^2-{x_1}^2\right)}\,.$$

---

*1 エネルギー収支の式から，n 回目の衝突直前の速度は $-v_{n-1}$ となる（運動の対称性からも明らか）.

〔２〕 電磁誘導ーファラデイ則（相互誘導）

【メモ】

・問 2，設問 II の前半は，自己誘導・相互誘導に関する出題（変圧器）．自己/相互誘導によって生じる誘導起電力は磁場（磁束）の時間変化に由来するため，ファラデイ則一択となる．

・問 3〜問 6，II の (12)，(13) は電気回路の状態決定に関する設問．電気回路の状態は，キルヒホッフ則，電荷保存則，素子の性質によって一意に決まる．

・設問 (12)，(13) の出題は少しあやしいので，**【補足】**，**【参考】**できちんと検討した[*2]．

【解答】

問１　題意に従い，

$$\varPhi = \underset{\sim\sim\sim}{n_1 L_0 I_1}\,.$$

問２　コイル 1 に生じる誘導起電力は，

$$\mathcal{E} = -n_1 \frac{d\varPhi}{dt} = -{n_1}^2 L_0 \frac{dI_1}{dt}\,.$$

よって，コイル 1 の自己インダクタンスは，

$$L_1 = \underset{\sim\sim\sim}{{n_1}^2 L_0}\,.$$

問３　キルヒホッフ則，および素子の性質（電流の連続性）より，

$$\begin{cases} E - RI_0 = 0\,, \\ E - rI_1 - L_1 \dfrac{dI_1}{dt} = 0\,, \\ I_1 = 0 \end{cases} \qquad \therefore \mathcal{E} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} = \underset{\sim\sim}{-E}\,.$$

問４　キルヒホッフ則，および素子の性質（十分時間経過でコイルの電位効果 0）より，

$$\begin{cases} E - RI_0 = 0\,, \\ E - rI_1 - 0 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore I_0 = \frac{E}{R}\,,\quad I_1 = \frac{E}{r}\,.$$

よって，題意に従い，

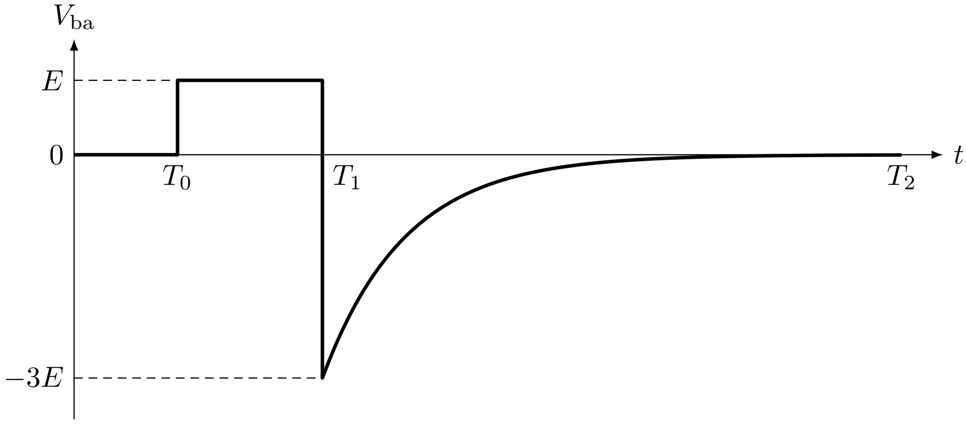
$$\varPhi = \underset{\sim\sim\sim}{n_1 L_0 \frac{E}{r}}\,.$$

問５　キルヒホッフ則，および素子の性質（電流の連続性）より，

$$\begin{cases} -rI_1 - L_1 \dfrac{dI_1}{dt} - RI_1 = 0\,, \\ I_1 = \dfrac{E}{r}\,, \end{cases} \qquad \therefore V_{\mathrm{ba}} = -RI_1 = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{R}{r}E}\,.$$

[*2] 【補足】は高校生でも読めるもの（ものによってはギリギリ），【参考】は高校範囲外．

問６　T_0 から T_1 までは $I_0 = \dfrac{E}{R}$ より $V_{\rm ba} = E$ であり，T_1 から T_2 にかけては，$V_{\rm ba} = -\dfrac{R}{r}E$ となるよう指数関数的に収束する．以上を踏まえると，次のようなグラフとなる．



II.　コイル 1 の電流が $\varDelta I_1$ だけ変化したとき，鉄心内部の磁束の変化量は，

$$\varDelta\varPhi = n_1L_0(I_1 + \varDelta I_1) - n_1L_0I_1 = n_1L_0\varDelta I_1$$

となり，このときコイル 2 に生じる誘導起電力は，

$$\mathcal{E}_2 = -n_2\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t} = \underset{(7)}{\underline{-n_1n_2L_0\frac{\varDelta I_1}{\varDelta t}}}\quad .$$

ここで，実際には鉄心内部の磁束はコイル 2 を流れる電流 I_2 の影響も受けるので，

$$\varDelta\varPhi = L_0\{n_1(I_1 + \varDelta I_1) + n_2(I_2 + \varDelta I_2)\} - L_0(n_1I_1 + n_2I_2) = L_0(n_1\varDelta I_1 + n_2\varDelta I_2)$$

となり，コイル 2 に生じる誘導起電力は，

$$\mathcal{E}_2 = -n_2\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t} = \underset{(8)}{\underline{-{n_2}^2L_0\frac{\varDelta I_2}{\varDelta t} - n_1n_2L_0\frac{\varDelta I_1}{\varDelta t}}}$$

となり，同様にして，コイル 1 に生じる誘導起電力は，

$$\mathcal{E}_1 = -n_2\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t} = \underset{(9)}{\underline{-{n_1}^2L_0\frac{\varDelta I_1}{\varDelta t} - n_1n_2L_0\frac{\varDelta I_2}{\varDelta t}}}\quad .$$

さて，コイル 2 側のキルヒホッフ則より，

$$\mathcal{E}_2 = -{n_2}^2L_0\frac{\varDelta I_2}{\varDelta t} - n_1n_2L_0\frac{\varDelta I_1}{\varDelta t} = 0\,, \qquad \therefore n_1n_2L_0\frac{\varDelta I_2}{\varDelta t} = -{n_1}^2L_0\frac{\varDelta I_1}{\varDelta t}$$

ゆえ，コイル 1 の誘導起電力は，

$$\mathcal{E}_1 = -{n_1}^2L_0\frac{\varDelta I_1}{\varDelta t} - n_1n_2L_0\frac{\varDelta I_2}{\varDelta t} = \underset{(10)}{\underline{0}}$$

であり，磁束の変化は，

$$\mathcal{E}_1 = -n_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0\,, \qquad \therefore\ \Delta\Phi = \underset{(11)}{\underset{\sim}{0}}\,.$$

さて，S_1，S_2 ともに閉じた状況におけるキルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} E - rI_1 - {n_1}^2 L_0 \dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} - n_1 n_2 L_0 \dfrac{\Delta I_2}{\Delta t} = 0\,, \\ -{n_2}^2 L_0 \dfrac{\Delta I_2}{\Delta t} - n_1 n_2 L_0 \dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore\ I_1 = \underset{(12)}{\underset{\sim}{\frac{E}{r}}}\,.$$

また，第 2 式，および電流の連続性（はじめ $I_1 = I_2 = 0$）より，

$$\begin{aligned} \Delta I_2 &= -\frac{n_1}{n_2}\Delta I_1 \\ I_2 - 0 &= -\frac{n_1}{n_2}(I_1 - 0)\,, \qquad \therefore\ I_2 = \underset{(13)}{\underset{\sim}{-\frac{n_1}{n_2}}} \times I_1\,. \end{aligned}$$

【補足 1】設問 II の電流の連続性に関して

設問 (12)，(13) では，コイル 2 側の抵抗がないことに起因して電流の連続性が破れている[*3]．そこで，もう少し丁寧に議論する[*4]．

コイル 2 側に抵抗値 r_2 の抵抗をつなぐ．このとき，キルヒホッフ則は，

$$\begin{cases} E - rI_1 - {n_1}^2 L_0 \dfrac{dI_1}{dt} - n_1 n_2 L_0 \dfrac{dI_2}{dt} = 0\,, \\ -{n_2}^2 L_0 \dfrac{dI_2}{dt} - n_1 n_2 L_0 \dfrac{dI_1}{dt} - r_2 I_2 = 0\,. \end{cases}$$

まず，始状態を考える．本来，素子の性質として，電流の連続性より $I_1(0) = I_2(0) = 0$ である．

続いて，十分時間経過後を考える．素子の性質として，十分時間経過で $\dfrac{dI_1}{dt} = \dfrac{dI_2}{dt} = 0$ ゆえ，

$$\begin{cases} E - rI_1 - 0 - 0 = 0\,, \\ -0 - 0 - r_2 I_2 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore\ I_1 = \frac{E}{r}\,,\quad I_2 = 0\,.$$

なお，一般の時刻 t においては，キルヒホッフ則第 2 式より，

$$I_2 - I_2(0) = -\frac{n_1}{n_2}\{I_1 - I_1(0)\} - \frac{r_2}{{n_2}^2 L_0}\int_0^t I_2\,dt$$

となり，$r_2 \to 0$ では，(13) と一致する．

【補足 2】設問 II に関してさらに掘り下げる

コイル 1，コイル 2 の自己インダクタンスをそれぞれ L_1，L_2，コイル間の相互インダクタンスを M，コイル 1 側の抵抗の抵抗値を r_1，コイル 2 側の抵抗の抵抗値を r_2 とする．設問では $M^2 = L_1 L_2$ を満たしている．

[*3] スイッチの切り替え前後で誘導起電力が無限大に発散しており，現実では火花が飛び散ったりするわけである．

[*4] この問題はここでの議論のように誘導をつけるべきである．

キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} E - L_1\dfrac{dI_1}{dt} - M\dfrac{dI_2}{dt} - r_1 I_1 = 0\,, \\ -L_2\dfrac{dI_2}{dt} - M\dfrac{dI_1}{dt} - r_2 I_2 = 0\,. \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\blacklozenge)$$

第 2 式より，

$$\frac{dI_1}{dt} = -\frac{L_2}{M}\frac{dI_2}{dt} - \frac{r_2}{M}I_2$$

であり，これを第 1 式に代入すれば，

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{E}{r_1} + \frac{M}{r_1}\left(\frac{L_1L_2}{M^2} - 1\right)\frac{dI_2}{dt} + \frac{L_1}{M}\frac{r_2}{r_1}I_2\,, \\ \frac{dI_1}{dt} &= \frac{M}{r_1}\left(\frac{L_1L_2}{M^2} - 1\right)\frac{d^2I_2}{dt^2} + \frac{L_1}{M}\frac{r_2}{r_1}\frac{dI_2}{dt} \end{aligned}$$

を得る．これを再び第 2 式へ代入すれば，I_2 に関する以下の 2 階線形常微分方程式を得る．

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^2I_2}{dt^2} + (r_1L_2 + r_2L_1)\frac{dI_2}{dt} + r_1r_2I_2 = 0 \quad \cdots\cdots(\text{☆})$$

ここで，この設問では $M^2 = L_1L_2$ を満たしているため (☆) 式は，

$$\frac{dI_2}{dt} = -\frac{r_1r_2}{r_1L_2 + r_2L_1}I_2$$

となり，$\gamma = \dfrac{r_1r_2}{r_1L_2 + r_2L_1}$ と置けば，この解は初期条件から決まる未知定数を A として，

$$I_2 = Ae^{-\gamma t}$$

と書ける．続いて，以下の I_1 を得る．

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{E}{r_1} + \frac{M}{r_1}\left(\frac{L_1L_2}{M^2} - 1\right)\frac{dI_2}{dt} + \frac{L_1}{M}\frac{r_2}{r_1}I_2 \\ &= \frac{E}{r_1} + \frac{L_1}{M}\frac{r_2}{r_1}Ae^{-\gamma t}\,. \end{aligned}$$

ここで，問題の条件 $I_2(0) = 0$ を仮定すると $A = 0$ となり，I_1，I_2 はそれぞれ，

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E}{r_1}\,, \\ I_2 = 0\,, \end{cases}$$

となる．また，仮にコイル 1 側の電流の連続性として $I_1(0) = 0$ を仮定すると $A = -\dfrac{ME}{L_1r_2}$ となり，I_1，I_2 はそれぞれ以下のようになる．

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E}{r_1}(1 - e^{-\gamma t})\,, \\ I_2 = -\dfrac{ME}{L_1r_2}e^{-\gamma t}\,. \end{cases}$$

以上から，いずれの場合も問題の設定を再現しないことが確認できる[*5]．

【参考１】設問 II に関してもっと掘り下げる（微分方程式を解く）[*6]

ここでは，微分方程式 (☆) を解くことを考える．なお，ここでは $M = k\sqrt{L_1L_2}\,(0 \le k < 1)$ を考える[*7]．高校数学の範疇を超えるので，計算は追わなくてよい[*8]．

まず，$\dot{I}_2(0) = \left.\dfrac{dI_2}{dt}\right|_{t=0}$ を求める．電流の連続性より $I_1(0) = I_2(0) = 0$ ゆえ，キルヒホッフ則から，

$$\begin{cases} E - L_1\dot{I}_1(0) - M\dot{I}_2(0) - r_1\cdot 0 = 0\,, \\ -L_2\dot{I}_2(0) - M\dot{I}_1(0) - r_2\cdot 0 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore \dot{I}_1(0) = \frac{L_2E}{L_1L_2 - M^2}\,,\quad \dot{I}_2(0) = -\frac{EM}{L_1L_2 - M^2}\,.$$

では，(☆) を解いていく．まず，$I_2(t) = Ae^{\lambda t}$ を仮定して (☆) へ代入し，

$$\begin{aligned} (L_1L_2 - M^2)\lambda^2 Ae^{\lambda t} + (r_1L_2 + r_2L_1)\lambda Ae^{\lambda t} + r_1r_2Ae^{\lambda t} = 0 \\ Ae^{\lambda t}\{(L_1L_2 - M^2)\lambda^2 + (r_1L_2 + r_2L_1)\lambda + r_1r_2\} = 0\,. \end{aligned}$$

この式が自明な解 $A \neq 0$ を除き任意の時刻 t で成り立つような λ は，

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2(L_1L_2 - M^2)}\left\{-(r_1L_2 + r_2L_1) \pm \sqrt{(r_1L_2 + r_2L_1)^2 - 4(L_1L_2 - M^2)r_1r_2}\right\} \\ &= \frac{1}{2(L_1L_2 - M^2)}\left\{-(r_1L_2 + r_2L_1) \pm \sqrt{(r_1L_2 - r_2L_1)^2 + 4M^2r_1r_2}\right\} \\ &= -\alpha,\ -\beta\ (\alpha \text{が} + \text{の方の解}) \end{aligned}$$

となる[*9]．よって，$I_2(t)$ は，積分定数から決まる未知定数を C，D とすれば，以下のように書ける．

$$I_2(t) = Ce^{-\alpha t} + De^{-\beta t}\,.$$

初期条件より，

$$\begin{cases} C + D = 0\,, \\ -\alpha C - \beta D = \dot{I}_2(0)\,, \end{cases} \qquad \therefore C = -D = -\frac{\dot{I}_2(0)}{\alpha - \beta}\,.$$

よって[*10]，

$$I_2(t) = -\frac{ME}{\sqrt{(r_1L_2 - r_2L_1)^2 + 4M^2r_1r_2}}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right)\,.$$

---

*5 $I_2(0) = 0$ の場合では初期条件は問題と一致するが，任意の時刻で設問 (13) を再現しない．また，$I_1(0) = 0$ の場合では，$r_2 \to 0$ で I_2 が発散する．

*6 かなり丁寧に見直しをしましたが，計算ミスがある可能性があります（特に，初期条件を用いて表した最終結果）．

*7 $k = 1$ は【補足２】で扱った．

*8 大学１年くらいでやる誰しもが一度はやる計算です（モデルはもう少し単純なものだとは思います）．

*9 根号の中身が正ゆえ（2 行目から明らか），この解は過減衰となる．また，1 行目から λ がともに負であることもわかる（すなわち α と β は正の定数）．

*10 $\dfrac{1}{\alpha - \beta} = -\dfrac{L_1L_2 - M^2}{\sqrt{(r_1L_2 - r_2L_1)^2 + 4M^2r_1r_2}}\,.$

また，

$$I_1 = \frac{E}{r_1} + \frac{M}{r_1}\left(\frac{L_1L_2}{M^2} - 1\right)\frac{dI_2}{dt} + \frac{L_1}{M}\frac{r_2}{r_1}I_2$$

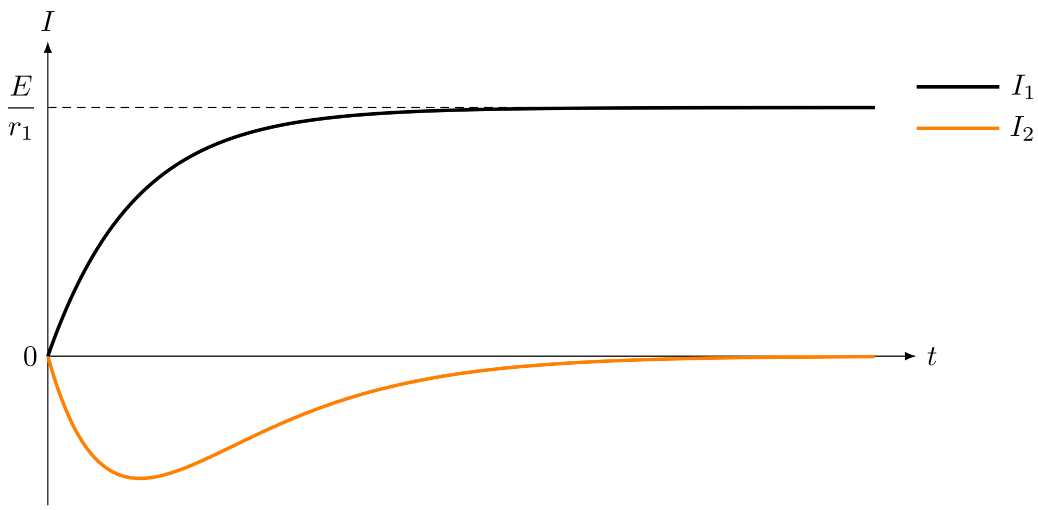
より，

$$I_1 = \frac{E}{r_1}\left[1 - \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{r_1L_2 - r_2L_1}{\sqrt{(r_1L_2 - r_2L_1)^2 + 4M^2r_1r_2}}\right)e^{-\alpha t} + \left(1 + \frac{r_1L_2 - r_2L_1}{\sqrt{(r_1L_2 - r_2L_1)^2 + 4M^2r_1r_2}}\right)e^{-\beta t}\right\}\right].$$

なお，α，β はそれぞれ以下のように定義していた．

$$\alpha = \frac{1}{2(L_1L_2 - M^2)}\left\{(r_1L_2 + r_2L_1) - \sqrt{(r_1L_2 - r_2L_1)^2 + 4M^2r_1r_2}\right\} > 0\,,$$
$$\beta = \frac{1}{2(L_1L_2 - M^2)}\left\{(r_1L_2 + r_2L_1) + \sqrt{(r_1L_2 - r_2L_1)^2 + 4M^2r_1r_2}\right\} > 0\,.$$

以上から，I_1，I_2 はそれぞれ十分時間経過で $I_1(\infty) = \dfrac{E}{r_1}$，$I_2(\infty) = 0$ と収束し，全体の時間変化は以下のようなグラフとなる．グラフ（または関数形）からわかるように，この結果は（少なくとも高校範囲で習う）コイルの性質をきちんと与えている（電流の連続性，十分時間経過で電位降下後の振る舞い）．



【参考２】相互誘導のエネルギー

キルヒホッフ則 (◆) 式の第 1 式に I_1，第 2 式に I_2 をかけて和を取れば，

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1{I_1}^2 + \frac{1}{2}L_2{I_2}^2 + MI_1I_2\right)}_{\text{コイル全体のエネルギーの時間変化率}} + \underbrace{r_1{I_1}^2 + r_2{I_2}^2}_{\text{消費電力の合計}} = \underbrace{EI_1}_{\text{電源の仕事率}}\,.$$

コイルのエネルギー第 1 項，第 2 項がコイル 1，コイル 2 それぞれの自己誘導によるエネルギーの寄与，そして第 3 項が相互誘導による寄与である．

〔３〕 熱力学の基本操作，断熱過程，どこまでを１つの系とみるか

【メモ】

・問 3 までが基本操作，問 4 以降が準静的な断熱操作に関する設問．熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な操作での定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算．

・問 3 までは基本操作だが，定石通りの問題ではない．このような場合，定石を思い出し，消去法的に使える式を絞っていく（可動部分のつりあいが自明な式のため，状態方程式，熱力学第 1 法則の 2 つ）．・問 4 以降は準静的な断熱過程に関する問題．準静的な断熱過程では，ポアソンの公式から圧力か体積の決定，状態方程式から温度の決定．熱力学第 1 法則は仕事の決定方程式となる．

・問 8 を主に，全体的にどこまでを 1 つの系と見るか，熱力学系のとらえ方の練習となる問題．

【解答】

問１ ピストンのつりあいより，両側の気体の圧力は等しい．状態方程式より，

$$\begin{cases} P\cdot 2V_0 = RT_{\mathrm{A}}\,, \\ PV_0 = RT_{\mathrm{B}}\,, \end{cases} \qquad \therefore T_{\mathrm{A}} = 2T_{\mathrm{B}}\,.$$

問２ 状態方程式より，

$$\begin{cases} PV_1 = RT_1\,, \\ P(3V_0 - V_1) = RT_1\,, \end{cases} \qquad \therefore V_1 = \frac{3}{2}V_0\,.$$

問３ A，B 合わせた系のした仕事，および吸熱量はともに 0 である．熱力学第 1 法則より，

$$0 = \mathit{\Delta} U + 0 = C_{\mathrm{V}}(T_1 - T_{\mathrm{A}}) + C_{\mathrm{V}}(T_1 - T_{\mathrm{B}})\,, \qquad \therefore T_1 = \frac{3}{2}T_{\mathrm{B}}\,.$$

問４ A，B 合わせた系のした仕事，および吸熱量はともに 0 である．熱力学第 1 法則より，

$$0 = \mathit{\Delta} U + 0 = C_{\mathrm{V}}(T_2 - T_{\mathrm{A}}) + C_{\mathrm{V}}(T_2 - T_{\mathrm{B}})\,, \qquad \therefore T_2 = \frac{3}{2}T_{\mathrm{B}}\,.$$

問５ B 系の熱力学第 1 法則より，

$$Q_{\mathrm{B}} = \mathit{\Delta} U_{\mathrm{B}} + 0 = C_{\mathrm{v}}(T_2 - T_{\mathrm{B}}) = \frac{1}{2}C_{\mathrm{V}}T_{\mathrm{B}}\,.$$

問６ 状態方程式より，ピストン固定時の各系の圧力は，

$$\begin{cases} P_{\mathrm{A}}\cdot 2V_0 = RT_2\,, \\ P_{\mathrm{B}}V_0 = RT_2\,, \end{cases} \qquad \therefore P_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\frac{RT_2}{V_0}\,, \quad P_{\mathrm{B}} = \frac{RT_2}{V_0}\,.$$

よって，ポアソンの公式より，

$$\begin{cases} p_3(3V_0-V_3)^{\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{RT_2}{V_0}(2V_0)^{\frac{5}{3}}\,, \\ p_3{V_3}^{\frac{5}{3}} = \dfrac{RT_2}{V_0}{V_0}^{\frac{5}{3}}\,, \end{cases} \qquad \therefore p_3 = \underline{\left(\frac{V_0}{V_3}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{RT_2}{V_0}}\,,\quad V_3 = \underline{\frac{3}{1+\alpha^2}}V_0\,.$$

なお，V_3 を代入すれば，

$$p_3 = \left(\frac{1+\alpha^2}{3}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{RT_2}{V_0}\,.$$

問７　問６に示した．

問８　A，B 合わせた系の熱力学第１法則を考える．

Ｉの場合，系は外部に仕事をせず，断熱容器ゆえ吸熱量も０である．したがって，系の内部エネルギー変化 ΔU_{I} は，

$$\Delta U_{\mathrm{I}} = 0\,.$$

II の場合，系はピストンを介して外部に正の仕事 W をし[*11]，断熱容器ゆえ吸熱量は０である．したがって，系の内部エネルギー変化 ΔU_{II} は，

$$\Delta U_{\mathrm{II}} + W = 0\,,\qquad \therefore \Delta U_{\mathrm{II}} = -W < 0\,.$$

以上から，ア．

理由：I，II ともに断熱過程である．A，B 合わせた系は，I では外部に仕事をせず内部エネルギーは変化しない．一方，II では外部に正の仕事をするため内部エネルギー変化は負となり，$T_1 > T_4$ が言える．

【補足１】問８を計算で頑張る（電卓使います）

ピストンの移動が済んだ後の状態方程式より，

$$\begin{cases} p_3(3V_0-V_3) = RT_{\mathrm{A}}^*\,, \\ p_3V_3 = RT_{\mathrm{B}}^*\,, \end{cases} \qquad \therefore T_{\mathrm{A}}^* = \frac{3}{2}\left(\frac{1+\alpha^2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}T_{\mathrm{B}}\,,\quad T_{\mathrm{B}}^* = \alpha^2 T_{\mathrm{A}}^*\,.$$

その後，A，B 合わせた系のした仕事，および吸熱量はともに０である．よって，熱力学第１法則より，

$$0 = C_{\mathrm{V}}(T_4 - T_{\mathrm{A}}^*) + C_{\mathrm{V}}(T_4 - T_{\mathrm{B}}^*)\,,\qquad \therefore T_4 = \frac{9}{4}\left(\frac{1+\alpha^2}{3}\right)^{\frac{5}{3}}T_{\mathrm{B}}\,.$$

[*11] はじめ B 側の方が圧力が高いため，外力は図の右方向に作用させる．ピストンは左側に動くため外力は負の仕事をする（系は正の仕事をする）ことがわかる．

以上より，

$$\begin{aligned} T_1 &\gtrless T_4 \\ \frac{3}{2}T_{\mathrm{B}} &\gtrless \frac{9}{4}\left(\frac{1+\alpha^2}{3}\right)^{\frac{5}{3}} T_{\mathrm{B}} \\ 72 &\gtrless \left(1+2^{\frac{1}{5}}\right)^5 \\ 72 &\gtrless 67.\cdots \end{aligned}$$

であるので，上の不等式が正しく，$T_1 > T_4$ がわかる．

【補足２】問８での仕事を２通りで計算

気体が外部にした仕事を，断熱過程の定石である熱力学第 1 法則から逆算する方法と，定義から直接計算する方法の 2 通りで求める．

まず，全体の熱力学第 1 法則から逆算する方法で求める．**【補足１】**の結果を利用して[*12]，

$$W = -\mathit{\Delta} U_{\mathrm{II}} = \frac{3}{2}R(T_4 - T_{\mathrm{A}}) + \frac{3}{2}R(T_4 - T_{\mathrm{B}}) = \frac{9}{4}\left\{2 - 3\left(\frac{1+\alpha^2}{3}\right)^{\frac{5}{3}}\right\} RT_{\mathrm{B}}\,.$$

続いて，定義から計算する．ピストンを動かす断熱過程の始状態と終状態の間の任意の状態における A，B それぞれの体積を V_{A}，$V_{\mathrm{B}}\,(=3V_0 - V_{\mathrm{A}})$ とすると，内部気体の圧力はポアソンの公式より，

$$\begin{cases} P_{\mathrm{A}} {V_{\mathrm{A}}}^{\frac{5}{3}} = \dfrac{3}{4}\dfrac{RT_{\mathrm{B}}}{V_0}(2V_0)^{\frac{5}{3}}\,, \\ P_{\mathrm{B}} {V_{\mathrm{B}}}^{\frac{5}{3}} = \dfrac{3}{2}\dfrac{RT_{\mathrm{B}}}{V_0}{V_0}^{\frac{5}{3}}\,, \end{cases} \qquad \therefore P_{\mathrm{A}} = \frac{3}{4}\left(\frac{2V_0}{V_{\mathrm{A}}}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{RT_{\mathrm{B}}}{V_0}\,,\quad P_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2}\left(\frac{V_0}{V_{\mathrm{B}}}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{RT_{\mathrm{B}}}{V_0}\,.$$

よって，各系のする仕事の総和は[*13]，

$$\begin{aligned} W &= \int_{2V_0}^{3V_0 - V_3} P_{\mathrm{A}}\,dV_{\mathrm{A}} + \int_{V_0}^{V_3} P_{\mathrm{B}}\,dV_{\mathrm{B}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{RT_{\mathrm{B}}}{V_0}\left[-\frac{3}{2}(2V_0)^{\frac{5}{3}}V^{-\frac{2}{3}}\right]_{2V_0}^{3V_0 - V_3} + \frac{RT_{\mathrm{B}}}{V_0}\left[-\frac{3}{2}{V_0}^{\frac{5}{3}}V^{-\frac{2}{3}}\right]_{V_0}^{V_3} \\ &= -\frac{9}{4}\frac{RT_{\mathrm{B}}}{V_0}\left\{\left(1 + 2^{\frac{2}{3}}\alpha^{-\frac{4}{3}}\right){V_0}^{\frac{5}{3}}{V_3}^{-\frac{2}{3}} - 2V_0\right\} \\ &= -\frac{9}{4}\frac{RT_{\mathrm{B}}}{V_0}\left\{(1+\alpha^2)\left(\frac{1+\alpha^2}{3}\right)^{\frac{5}{3}}V_0 - 2V_0\right\} \\ &= \frac{9}{4}\left\{2 - 3\left(\frac{1+\alpha^2}{3}\right)^{\frac{5}{3}}\right\}RT_{\mathrm{B}}\,. \end{aligned}$$

[*12] ポアソンの公式の比熱比から単原子分子理想気体と判断できる．

[*13] $2^{\frac{2}{3}}\alpha^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{2}{3} - \frac{4}{15}} = 2^{\frac{2}{5}} = \alpha^2\,.$