〔1〕 時間追跡（単振動，時間追跡）

【メモ】

・高校範囲では，等加速度運動，単振動，空気抵抗型の運動が時間追跡可能な運動である[*1]．前者 2 つの運動は，運動方程式/エネルギーの解法の分岐があり，今回の問題では，前後半でそれぞれ使い分けるのが良い．・問 1〜問 5 は運動の時間追跡に関する設問．時刻が問われているので時間追跡で処理するほかない．問 1，問 2 が単振動，問 3，問 4 が等加速度運動に関する設問．

・問 6 以降も等加速度運動と単振動を組み合わせた運動に関する設問だが，時刻 t が問われていないためエネルギーで考えるのが良い．エネルギーで考える場合，特にどこまでを 1 つの系と見るかが重要となる[*2]．

【解答】

問 1　物体の質量を m，ばね定数を k とすると，円板の運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -kx - mg = -k\left(x - \frac{m}{k}g\right), \qquad \therefore \ddot{x} = -\omega^2\left(x - \frac{g}{\omega^2}\right).$$

$t = 0$ で $x(0) = -\dfrac{3g}{\omega^2}$，$\dot{x}(0) = 0$ より，

$$x = -\frac{g}{\omega^2} - \frac{2g}{\omega^2}.\cos(\omega t), \qquad \therefore a = \underset{\sim\sim}{-\frac{2g}{\omega^2}}, \quad b = \underset{\sim\sim}{-\frac{g}{\omega^2}}.$$

問 2　$x = 0$ を解いて，

$$-\frac{g}{\omega^2} - \frac{2g}{\omega^2}.\cos(\omega t) = 0, \qquad \therefore t = \underset{\sim\sim}{\frac{2\pi}{3\omega}}.$$

問 3　$x = 0$ を通過後，ばねは自然長に戻るため，円板はばねから離れる．ばねと離れた後の円板は，x 軸負の向きに大きさ g の加速度を受けて等加速度運動を行う．$t = \dfrac{2\pi}{3\omega}$ において円板の速度は，

$$\dot{x} = \frac{2g}{\omega}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}\,g}{\omega}$$

であり，時刻 t における円板の位置 x の式より[*3]，

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}\,g}{\omega}\left(t - \frac{2\pi}{3\omega}\right) - \frac{1}{2}g\left(t - \frac{2\pi}{3\omega}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2}g\left\{\left(t - \frac{2\pi}{3\omega}\right) - \frac{\sqrt{3}}{\omega}\right\}^2 + \frac{3g}{2\omega^2}, \qquad \therefore \max\{x\} = \underset{\sim\sim}{\frac{3g}{2\omega^2}}. \end{aligned}$$

[*1] 加速度が t の冪乗でかけていれば時間追跡可能であるが，積分を要するため問題文に誘導が付く．

[*2] 仕事の計算が関係してくる．

[*3] $v = 0$ を解いて x に代入してもよい．

問４　再度 $x=0$ を通過する時刻 t は，

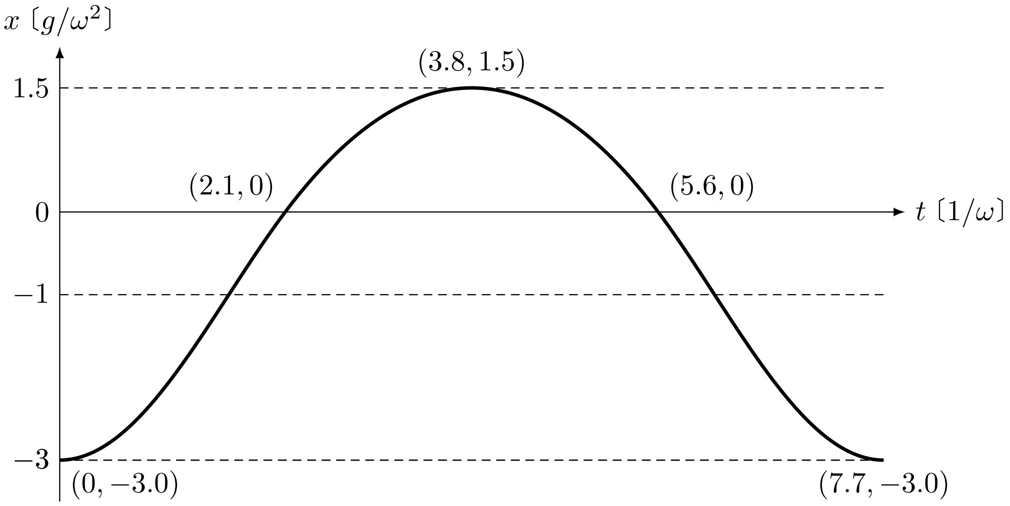
$$\frac{\sqrt{3}\,g}{\omega}\left(t-\frac{2\pi}{3\omega}\right)-\frac{1}{2}g\left(t-\frac{2\pi}{3\omega}\right)^2=0\,,\qquad \therefore t=\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2\sqrt{3}}{\omega}\,.$$

よって，

$$\mathit{\Delta} t_{x=0}=\left(\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2\sqrt{3}}{\omega}\right)-\frac{2\pi}{3\omega}=\frac{2\sqrt{3}}{\omega}\,.$$

問５　2 回目に $x=0$ を通過してから $x=-\dfrac{3g}{\omega^2}$ に達するまでの時間は $\dfrac{2\pi}{3\omega}$ ゆえ，運動の周期 T は，

$$T=\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2\sqrt{3}}{\omega}+\frac{2\pi}{3\omega}=\left(\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)\frac{1}{\omega}\,.$$



問６　重力の位置エネルギーの基準を $x=0$ に定める．円板，重力場，ばねからなる系の始状態における力学的エネルギー E_0 は，

$$E_0=\frac{1}{2}m\cdot 0^2+mg\left(-\frac{3g}{\omega^2}\right)+\frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{3g}{\omega^2}\right)^2=\frac{3}{2}\frac{mg^2}{\omega^2}\,.$$

1 回目に最高点に達するまでに円板が外部（壁のと摩擦力）からされた仕事は，最高点の位置を x_1 とすれば，

$$W=-\alpha mgx_1\,.$$

よって，系の力学的エネルギー収支を考えて，

$$\left\{\frac{1}{2}m\cdot 0^2+mgx_1+\frac{1}{2}m\omega^2\cdot 0^2\right\}-\frac{3}{2}\frac{mg^2}{\omega^2}=-\alpha mgx_1\,,\qquad \therefore x_1=\frac{3g}{2(1+\alpha)\omega^2}\,.$$

問 7　円板が 1 回目にばねから離れて再びばねと接するときの系の力学的エネルギー E_1 は，最高点 x_1 から $x=0$ に達するまでの間に円板が壁からされた仕事を考慮すれば，

$$E_1 = mgx_1 - \alpha mgx_1 \,.$$

よって，2 回目の最高点の位置 x_2 は，1 回目同様にして，

$$mgx_2 - (mgx_1 - \alpha mgx_1) = -\alpha mgx_2 \,, \qquad \therefore x_2 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}x_1 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{3g}{2(1+\alpha)\omega^2} \,.$$

問 8　問 7 と同様に，n 回目の最高点の位置 x_n は，

$$mgx_n - (mgx_{n-1} - \alpha mgx_{n-1}) = -\alpha mgx_n$$

$$\therefore x_n = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}x_{n-1} = \cdots = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-1} x_1 \,.$$

よって，最終的な最高点の位置は $x_\infty = 0$ であり，最下点の位置は，系の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + mgx + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + mg\cdot 0 + \frac{1}{2}m\omega^2\cdot 0^2 \,, \qquad \therefore x = -\frac{2g}{\omega^2}$$

であり，最高点と最下点の高さの差は $\dfrac{2g}{\omega^2}$ とわかる．

〔2〕 コンデンサの中身

【メモ】

・電場の計算は，点電荷の作る電場（公式），形状のある帯電体の作る電場（ガウス則），電位分布から逆算の 3 通り．

・電荷 Q が一様に帯電した面積 S 平板の作る電場 E はガウス則より，真空の誘電率を ε_0 として[*4]，

$$E \cdot 2S = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

これは，導出ができる状態にしておきながら覚えておきたい「公式」．

・平行平板コンデンサ（間隔 d）の内部電場は平行一様電場と見なせるため，コンデンサの電位差 $\Delta\phi$ と極板間電場 E の間には次の関係がある．

$$\Delta\phi = Ed.$$

ここにガウス則を合わせれば，

$$Q = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\Delta\phi.$$

となり，静電容量 $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$ を得る[*5]．

・コンデンサの中身を見る問題は，電位の関係として $\Delta\phi = \dfrac{Q}{C}$ を使う問題，$\Delta\phi = Ed$ を使う問題（と両方を使い分ける問題）に分類される．ここがコンデンサの中身問題の難しい点の 1 つである．

【解答】

問 1　点電荷を中心とした半径 r の球面上の電場はガウス則より，文字指定に従い，

$$E = \underbrace{\frac{N}{4\pi r^2}}_{=n} B = \frac{AB}{4\pi}\frac{Q}{r^2}.$$

問 2　$0 < a < R$ では Q_2 は r 軸負方向に，$R < a$ では Q_2 は r 軸正方向に電場を作る．よって，ガウス則より，

$$E = \begin{cases} \dfrac{AB}{4\pi}\left(\dfrac{Q_1}{a^2} - \dfrac{Q_2}{(a-R)^2}\right) & (0 < a < R), \\ \dfrac{AB}{4\pi}\left(\dfrac{Q_1}{a^2} + \dfrac{Q_2}{(a-R)^2}\right) & (a < R). \end{cases}$$

[*4] ここでは，平板の端の影響を考えていない．

[*5] 他の形状のコンデンサの容量を求める場合も，ガウス則より E と Q の関係，電位の関係（キルヒホッフ則）より $\Delta\phi$ と E の関係を得て，これらを組み合わせることで Q と $\Delta\phi$ の関係を作り，この比例係数から容量を読み取る流れとなる．

問３　ガウス則より，

$$E = \frac{N}{2LM}B = \frac{AB}{2}q_1\,.$$

問４　ガウス則より，各極板の作る電場は，

$$E_1 = \begin{cases} -\dfrac{AB}{2}q_1 & (z<0)\,, \\ \dfrac{AB}{2}q_1 & (0<z)\,, \end{cases} \qquad E_2 = \begin{cases} -\dfrac{AB}{2}q_2 & (z<d)\,, \\ \dfrac{AB}{2}q_2 & (d<z)\,. \end{cases}$$

よって，各領域では，

$$E = \begin{cases} -\dfrac{AB}{2}(q_1+q_2) & (z<0)\,, \\ \dfrac{AB}{2}(q_1-q_2) & (0<z<d)\,, \\ \dfrac{AB}{2}(q_1+q_2) & (d<z)\,. \end{cases}$$

問５　上側の極板が下側の極板から受ける力は，極板の全電荷が $\pm LMq$ であることに注意して，

$$F_2 = -LMq_2\frac{1}{2}E_1 = -\frac{1}{2}ABLMq^2\,.$$

よって，上側の極板にはこの力とつりあうように外力を加えればよい．z 軸正方向に加える外力を F_{ex} とすると，この外力のする仕事を計算して，

$$W = F_{\mathrm{ex}}d = (-F_2)d = \frac{1}{2}ABLMq^2d\,.$$

問６　平行一様電場ゆえ，電位差 $\varDelta\phi$ は，

$$\varDelta\phi = Ed = ABqd\,.$$

また，この式より，

$$LMq = \frac{LM}{ABd}\varDelta\phi\,, \qquad \therefore C = \frac{LM}{ABd}\,.$$

問７　題意より，この場合の電位差 $\varDelta\phi$ は，

$$\varDelta\phi^* = f\varDelta\phi = fABqd\,.$$

よって，極板間（誘電体内部）の電場 E^* は，

$$E^* = \frac{\varDelta\phi^*}{d} = fABq\,.$$

ここで，誘電体内部の電場は，極板上の電荷密度 $\pm LMq$ と分極電荷 $\pm LM\sigma$（誘導分極より図の上側に $+\sigma$ の面電荷密度が生じる）の合成電場であり，

$$E^* = ABq - AB\sigma$$

と書ける．以上より，下側の面に生じた分極の電荷密度 $-\sigma$ は，

$$ABq - AB\sigma = fABq\,, \qquad -\sigma = -(1-f)q\,.$$

また，この系をコンデンサと見たときの電気容量は，

$$LMq = \frac{LM}{fABd}\Delta\phi\,, \qquad \therefore C = \frac{LM}{fABd}\,.$$

問８　誘電体側の極板の電気密度を σ_1，極板の右側の帯電量を σ_2 とする．キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} 0 = fAB\sigma_1 d - AB\sigma_2 d\,, \\ Mb\sigma_1 + M(L-b)\sigma_2 = LMq\,, \end{cases} \qquad \therefore \sigma_1 = \frac{L}{b+(L-b)f}q\,, \quad \sigma_2 = \frac{fL}{b+(L-b)f}q\,.$$

問９　電位差は前問の結果を用いて，

$$\Delta\phi = fAB\sigma_1 d = \frac{ABfLdq}{b+(L-b)f}\,.$$

また，この系をコンデンサと見たときの電気容量は，

$$LMq = \frac{b+(L-b)f}{ABfd}M\Delta\phi\,, \qquad \therefore C = \frac{b+(L-b)f}{ABfd}M\,.$$

よって，コンデンサの蓄える静電エネルギーは，

$$U = \frac{1}{2}\frac{(LMq)^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{ABML^2fdq^2}{b+(L-b)f}\,.$$

〔３〕 熱力学の基本操作

【メモ】

・全て基本操作（むらがなく熱あり）に関する問題（一部 B がゆっくりとした断熱操作だが，断熱操作の計算はしない）．基本操作の定石は可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化は公式，仕事は $P-V$ グラフの面積評価（要するに積分），熱力学第 1 法則を通じて熱を計算．

・方針に迷ったとしても使える式は，(i) 可動部分のつりあい，(ii) 状態方程式，(iii) 熱力学第 1 法則しかないことを思い出す．特に熱力学第 1 法則は熱の計算に使うので，状態決定で詰まっている場合は (i) か (ii) のどちらかである[*6]．

【解答】

問１　ピストンのつりあいより，

$$0 = P_{\mathrm{A}}S - mg - PS\,, \qquad \therefore P_{\mathrm{A}} = P + \frac{mg}{S}\,.$$

問２　ピストンのつりあいより，この間圧力は一定である．$P-V$ 図（図略）の面積評価をして，

$$W_1 = P_{\mathrm{A}}\Delta V = \left(P + \frac{mg}{S}\right)\Delta V\,.$$

内部エネルギー変化は公式，および状態方程式より，

$$\Delta U_1 = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}\left(P + \frac{mg}{S}\right)\Delta V\,.$$

よって，熱力学第 1 法則より，

$$Q_1 = \Delta U_1 + W_1 = \frac{5}{2}\left(P + \frac{mg}{S}\right)\Delta V\,.$$

問３　ピストンのつりあいより，B の圧力が p のときの A の圧力 P_{A} は[*7]，

$$0 = P_{\mathrm{A}}S - mg - pS\,, \qquad \therefore P_{\mathrm{A}} = p + \frac{mg}{S}\,.$$

よって，A，B の始状態，終状態におけるそれぞれの状態方程式は，

$$\text{始状態}：\begin{cases} \left(P + \dfrac{mg}{S}\right)V_2 = n_{\mathrm{A}}RT_2\,, \\ PV_2 = n_{\mathrm{B}}RT_2\,, \end{cases} \qquad \text{終状態}：\begin{cases} \left(P_{\mathrm{B}} + \dfrac{mg}{S}\right)(2V_2 - V_{\mathrm{B}}) = n_{\mathrm{A}}RT_{\mathrm{A}}\,, \\ P_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{B}} = n_{\mathrm{B}}RT_{\mathrm{B}}\,. \end{cases}$$

[*6] 気体にむらが生じているわけでもないのに全体のエネルギー保存則を用いる，ということもなくはないが，複合系の内部エネルギーが保存するような場合に例外として用いる（どこまでを 1 つの系と見るかがポイントとなるような設定）．

[*7] 問 3，問 4 の解答での文字使いに注意．P_{A} は操作途中の任意の状態での圧力を指しているが，P_{B} は問題で指示された文字であり，終状態の圧力を指す．なお，問 5 以降では B 側の操作途中の任意の状態での圧力として P_{B} を用いた．

よって，A の内部エネルギー変化は，

$$\Delta U_{\rm A} = \frac{3}{2}n_{\rm A}R(T_{\rm A}-T_2) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}\left\{\left(P_{\rm B}+\frac{mg}{S}\right)(2V_2-V_{\rm B})-\left(P+\frac{mg}{S}\right)V_2\right\}}.$$

同様に，B の内部エネルギー変化は

$$\Delta U_{\rm B} = \frac{3}{2}n_{\rm B}R(T_{\rm B}-T_2) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}(P_{\rm B}V_{\rm B}-PV_2)}.$$

問 4　この間ピストンは上向きに $\dfrac{V_2-V_{\rm B}}{S}$ 上昇する．題意に従い[*8]，

$$\begin{aligned} Q_{\rm A} &= \Delta U_{\rm A} + W_{\rm A} \\ &= \Delta U_{\rm A} + \Delta U_{\rm B} + \Delta U_{\rm p} \\ &= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{3(P_{\rm B}-P)V_2 + \frac{5}{2}\frac{mg}{S}(V_2-V_{\rm B})}. \end{aligned}$$

問 5　ピストンのつりあいより，A，B の圧力 $P_{\rm A}$，$P_{\rm B}$ はそれぞれ，

$$P_{\rm B} = P + \frac{mg}{S}, \quad P_{\rm A} = P_{\rm B} + \frac{mg}{S} = P + \frac{2mg}{S}.$$

ピストンのつりあいから，この過程の間，ともに圧力は上記の値で一定値を取る．

さて，状態 (a)，(b) における状態方程式は，

$$\text{(a)}:\begin{cases}\left(P+\dfrac{2mg}{S}\right)V_3 = n_{\rm A}RT_3, \\ \left(P+\dfrac{mg}{S}\right)V_3 = n_{\rm B}RT_3,\end{cases} \qquad \text{(b)}:\begin{cases}\left(P+\dfrac{2mg}{S}\right)\cdot\dfrac{3}{2}V_3 = n_{\rm A}RT_{\rm b}, \\ \left(P+\dfrac{mg}{S}\right)\cdot V_{\rm B} = n_{\rm B}RT_{\rm b}.\end{cases}$$

ここで，状態方程式より $V_{\rm B} = \dfrac{3}{2}V_3$ を得る．よって，それぞれの内部エネルギー変化は，

$$\Delta U'_{\rm A} = \frac{3}{2}n_{\rm A}R(T_{\rm b}-T_3) = \frac{3}{2}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)\left(\frac{3}{2}V_3-V_3\right) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{4}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)V_3},$$

$$\Delta U'_{\rm B} = \frac{3}{2}n_{\rm B}R(T_{\rm b}-T_3) = \frac{3}{2}\left(P+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{3}{2}V_3-V_3\right) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{4}\left(P+\frac{mg}{S}\right)V_3}.$$

また，圧力一定下ゆえ，各気体がした仕事は，

$$W'_{\rm A} = \left(P+\frac{2mg}{S}\right)\left(\frac{3}{2}V_3-V_3\right) = \frac{1}{2}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)V_3,$$

$$W'_{\rm B} = \left(P+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{3}{2}V_3-V_3\right) = \frac{1}{2}\left(P+\frac{mg}{S}\right)V_3.$$

よって，A，B を合わせて 1 つと見た系の熱力学第 1 法則より，

$$Q_3 = (\Delta U'_{\rm A}+\Delta U'_{\rm B}) + (W'_{\rm A}+W'_{\rm B}) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{5}{2}\left(P+\frac{3}{2}\frac{mg}{S}\right)V_3}.$$

[*8] 仕事の関係は【補足】を参照．

問 6　(c) における B のモル数を n_{B}^{*} とする[*9]．(c) における状態方程式より，温度は (b) から変わらないので[*10]，

$$
\text{(c)}:\begin{cases}\left(P+\dfrac{2mg}{S}\right)\cdot\dfrac{3}{2}V_3=n_{\mathrm{A}}RT_{\mathrm{b}}\,,\\[2mm] \left(P+\dfrac{mg}{S}\right)\cdot\dfrac{1}{2}V_3=n_{\mathrm{B}}^{*}RT_{\mathrm{b}}\,,\end{cases}
$$

$$
\therefore n_{\mathrm{B}}^{*}=\frac{1}{2}\frac{V_3}{RT_{\mathrm{b}}}\left(P+\frac{mg}{S}\right)\overset{(b)}{=}\frac{1}{2}\frac{V_3}{V_{\mathrm{B}}}n_{\mathrm{B}}\overset{(a)}{=}\underline{\frac{1}{3}\frac{V_3}{RT_3}\left(P+\frac{mg}{S}\right)}\,.
$$

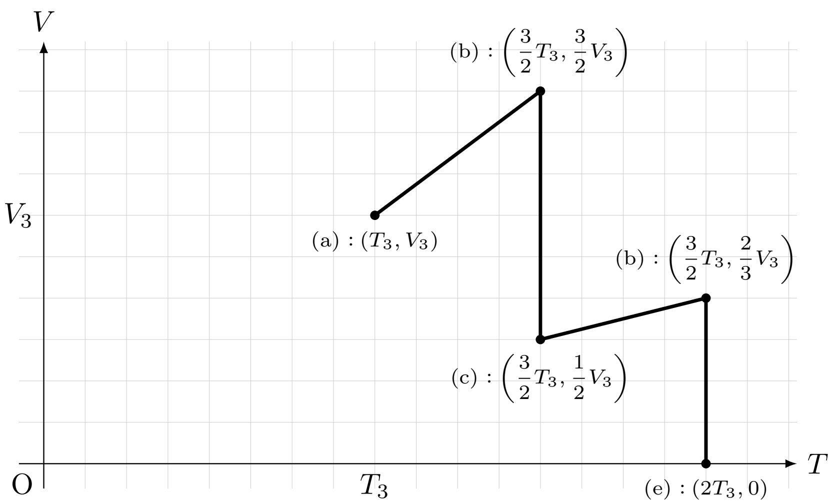
問 7　ピストンのつりあいより，(a) → (b)，(c) → (d) は A，B ともに圧力一定である．また，題意より (b) → (c)，(d) → (e) も圧力一定と見なせる[*11]．よって，(d) における状態方程式より，

$$
\text{(d)}:\begin{cases}\left(P+\dfrac{2mg}{S}\right)\cdot 2V_3=n_{\mathrm{A}}RT_{\mathrm{d}}\,,\\[2mm] \left(P+\dfrac{mg}{S}\right)V_{\mathrm{B}}=n_{\mathrm{B}}^{*}RT_{\mathrm{d}}=\dfrac{1}{3}n_{\mathrm{B}}RT_{\mathrm{d}}\,,\end{cases}\qquad \therefore T_{\mathrm{A}}\overset{(a)}{=}2T_3\,,\quad V_{\mathrm{B}}=\frac{2}{3}V_3\,.
$$

以上から，状態 (a)～(e) における B 側の気体の体積，温度は以下のようになる[*12]．

$$
\text{(a)}:(T_3,V_3)\,,\quad \text{(b)}:\left(\frac{3}{2}T_3,\frac{3}{2}V_3\right)\,,\quad \text{(c)}:\left(\frac{3}{2}T_3,\frac{1}{2}V_3\right)\,,\quad \text{(d)}:\left(T_3,\frac{2}{3}V_3\right)\,,
$$

$$
\text{(e)}:(2T_3,0)\,.
$$



[*9] 問題文では n_{B} と指示されているが，こちらであらかじめ置いていた文字と被ってしまったため（本来であれば別の文字で定義しておくべきだったが，より良い（自然な）文字が思い浮かばなかったため）．

[*10] 以降，式数が多くわかりにくい式変形の等号の上には使った状態方程式の状態の記してある（記さなくてもわかりそうなものには明記していない）．

[*11] すなわち，問題文中の「ゆっくり」とは，ピストンの力のつりあいが保たれるような力学的な意味でのゆっくりも含む．

[*12] 状態 (e) は，わずかに気体が残っている状況を考えていると思えばよい（体積，モル数ともにざっくり 0 に近い値）．ただし，あまりに 0 に近いと（例えばピストンの間隔が分子数個程度だとか）その系はマクロな性質を示さなくなり，今のような熱力学で扱うのは少し危ういためそのような状況は考えない．

問８　(c) から (d) の間の吸熱量 Q_{cd} は，Q_3 同様に，

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Delta} U_{\mathrm{A}} &= \frac{3}{2}n_{\mathrm{A}}R\left(T_{\mathrm{d}}-\frac{3}{2}T_3\right) = \frac{3}{4}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)V_3\,, \\
\mathit{\Delta} U_{\mathrm{B}} &= \frac{3}{2}\frac{1}{3}n_{\mathrm{B}}R\left(T_{\mathrm{d}}-\frac{3}{2}T_3\right) = \frac{1}{4}\left(P+\frac{mg}{S}\right)V_3\,, \\
W_{\mathrm{A}} &= \left(P+\frac{2mg}{S}\right)\left(2V_3-\frac{3}{2}V_3\right) = \frac{1}{2}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)V_3\,, \\
W_{\mathrm{B}} &= \left(P+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{2}{3}V_3-\frac{1}{2}V_3\right) = \frac{1}{6}\left(P+\frac{mg}{S}\right)V_3\,, \\
\therefore Q_{\mathrm{cd}} &= (U_{\mathrm{A}}+U_{\mathrm{B}})+(W_{\mathrm{A}}+W_{\mathrm{B}}) = \frac{5}{4}\left(P+\frac{2mg}{S}\right)V_3+\frac{5}{12}\left(P+\frac{mg}{S}\right)V_3 \\
&= \frac{5}{3}\left(P+\frac{7}{4}\frac{mg}{S}\right)V_3\,.
\end{aligned}
$$

よって，

$$
Q_3' = Q_3+Q_{\mathrm{cd}} = \frac{5}{2}\left(P+\frac{3}{2}\frac{mg}{S}\right)V_3+\frac{5}{3}\left(P+\frac{7}{4}\frac{mg}{S}\right)V_3 = \underline{\frac{25}{6}\left(P+\frac{8}{5}\frac{mg}{S}\right)V_3}\,.
$$

【補足１】問４の仕事の関係について

以下では，気体 A，B のした仕事を W_{A}，W_{B} とする[*13]．過程途中の A，B の圧力をそれぞれ p_{A}，p_{B}，体積を v_{A}，v_{B} と記す．

まず，ピストンのつりあいより，

$$
p_{\mathrm{A}}S = p_{\mathrm{B}}S+mg
$$

が成り立つ．ピストンの上昇した長さを $x\,(0\leq x\leq (V_2-V_{\mathrm{B}})/S)$ とすると，両辺 0 から x まで積分すれば，

$$
\underbrace{\int_0^x p_{\mathrm{A}}S\,dx}_{W_{\mathrm{A}}} = \underbrace{\int_0^x p_{\mathrm{B}}S\,dx}_{-W_{\mathrm{B}}}+\underbrace{\int_0^x mg\,dx}_{\mathit{\Delta} U_{\mathrm{p}}}\,.
$$

これは問題で与えられた関係に他ならない．なお，W_{B} が負の理由については，$v_{\mathrm{B}}=V_2-Sx$ から $\dfrac{dx}{dv_{\mathrm{B}}}=-\dfrac{1}{S}$ より，

$$
\int_0^x p_{\mathrm{B}}S\,dx = \int_0^x p_{\mathrm{B}}S\,\frac{dx}{dv_{\mathrm{B}}}dv_{\mathrm{B}} = -\int_{V_2}^{V_2-V_{\mathrm{B}}} p_{\mathrm{B}}\,dv_{\mathrm{B}} = -W_2
$$

と確認できる（A についても同様）．

---

*13 問 4 の問題文では，W_{B} はされた仕事として定義されていたことに注意．

ここで，B についてポアソンの公式より，

$$p_{\mathrm{B}}{v_{\mathrm{B}}}^{\frac{5}{3}} = P{V_2}^{\frac{5}{3}}, \qquad \therefore p_{\mathrm{B}} = P\left(\frac{V_2}{v_{\mathrm{B}}}\right)^{\frac{5}{3}}$$

が成り立ち，これを仕事の式に代入すれば W_{A}，W_{B} ともに直接計算することができる．