〔 1 〕　時間追跡（単振動，時間追跡），動く座標系

【メモ】

・高校範囲では，等加速度運動，単振動，空気抵抗型の運動が時間追跡可能な運動である[*1]．

・問 6 以降は動く座標系に関する問題．見かけの重力加速度に関する話題を含む．

【解答】

問 1　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgh = mgH\,, \qquad \therefore v_0 = \sqrt{2g(H-h)}\,.$$

問 2　地面に固定された座標系として鉛直上向きに y 軸，水平右向きに x を定める（原点を台車の O の位置に定める）．O 上を通過した時刻を $t=0$ とすれば，小物体の位置は，

$$\begin{cases} x = v_0 t\,, \\ y = h - \dfrac{1}{2}gt^2\,, \end{cases} \qquad \therefore t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,,\quad x = v_0 t = 2\sqrt{h(H-h)}\,.$$

問 3　台の運動方程式より，加速度静止摩擦力の大きさを R，台が床から受ける垂直抗力の大きさを N とすると[*2]，

$$\begin{cases} M\cdot 0 = \mu_1 mg - R\,, \\ M\cdot 0 = N - Mg - mg\,, \end{cases} \qquad \therefore R = \mu_1 mg\,,\quad N = (M+m)g\,.$$

よって，滑りが生じない条件を考えて，

$$\mu_1 mg \geq \mu_0 (M+m)g\,, \qquad \therefore \mu_0 \leq \frac{m}{M+m}\mu_1\,.$$

また，滑りが生じた後のそれぞれの運動方程式は小物体の加速度を b，台の加速度を a とすると，

$$\begin{cases} mb = -\mu_1 mg\,, \\ Ma = \mu_1 mg - \mu_2 (M+m)g\,, \end{cases} \qquad \therefore b = -\mu_1 g\,,\quad a = -\mu_2 g + (\mu_1 - \mu_2)\frac{m}{M}g\,.$$

問 4　相対運動を考えて[*3]，

$$x - X = \left(v_0 t + \frac{1}{2}bt^2\right) - \left(\frac{1}{2}at^2\right) = \ell\,,$$

$$\therefore T = \underbrace{\frac{v_0}{a+\mu_1 g}\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{2(a+\mu_1 g)\ell}{{v_0}^2}}\right\}}_{\text{問 5}}\,.$$

[*1] 加速度が t の冪乗でかけていれば時間追跡可能であるが，積分を要するため問題文に誘導が付く．

[*2] 台が小球から受ける垂直抗力の大きさは，鉛直方向のつりあいから mg である．

[*3] 以降，台に関する物理量が大文字，小物体に関する物理量は小文字．

また，この瞬間の台に対する小物体の速度は，

$$v - V = v_0 + (a - A)t = \underset{\text{問4}}{\sqrt{{v_0}^2 - 2(a + \mu_1 g)\ell}} \quad .$$

問５　問 4 に示した．

問６　台に固定した座標系での運動方程式（中心成分，接線成分）より，

$$\begin{cases} m \cdot 0 = N - mg\cos\theta - m\alpha\sin\theta\,, \\ m \cdot 0 = mg\sin\theta - m\alpha\cos\theta\,, \end{cases} \qquad \therefore\ \alpha = g\tan\theta\,.$$

問７　台に固定した座標系として鉛直上向きに Y 軸，水平右向きに X を定める（原点を台車の O の位置に定める）．固定系での運動方程式より，

$$\begin{cases} m\ddot{X} = N\sin\theta - m\alpha\,, \\ m\ddot{Y} = N\cos\theta - mg\,. \end{cases}$$

運動方程式の形から，台固定系では物体の位置エネルギー U は O を基準とすれば*4*5，

$$U = mgY + m\alpha X$$

と書ける．よって，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mV^2 + mg \cdot 0 + m\alpha(H - h) = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mg(H - h) + m\alpha \cdot 0\,,$$
$$\therefore\ V = \sqrt{2(1 - \tan\theta)(H - h)g}\,.$$

問８　台固定系で考える．X 方向，Y 方向の加速度はそれぞれ $-\alpha$，$-g$ であり，O 上通過時を $t = 0$ とすれば小物体の位置は，

$$\begin{cases} X = V_0 t - \dfrac{1}{2}\alpha t^2\,, \\ Y = h - \dfrac{1}{2}gt^2\,. \end{cases}$$

よって，$Y = 0$ を満たす時刻 t は $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ であり，この時刻における速度の X 成分は，

$$\dot{X} = V_0 - \alpha t = V_0 - \alpha\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

台固定系における小物体の力学的エネルギーは保存し，再び台の O 上を同じように通過するには運動が対称であればよいので落下の瞬間 $\dot{X} = 0$ となればよい．よって，

$$V_0 - \alpha\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0\,, \qquad \therefore\ V_0 = V_1 = \alpha\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

*4 【補足１】を参照．
*5 見かけの重力加速度を考えて，見かけの重力加速度に沿った座標軸を定めてもよい（詳しくは補講内で説明します）．

【補足１】問７：加速座標系内部での物体の位置エネルギー

固定系での運動方程式は，

$$
\begin{cases} m\ddot{X} = N\sin\theta - m\alpha\,, \\ m\ddot{Y} = N\cos\theta - mg\,. \end{cases}
$$

このとき，台固定系での物体の位置 $\vec{R}$，および速度 $\vec{V}$ は[*6]，

$$
\vec{R} = \begin{pmatrix} -(H-h)\sin\theta \\ -(H-h)\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(H-h)\dot{\theta}\cos\theta \\ +(H-h)\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}.
$$

よって，この系での物体のエネルギー収支の式は，

$$
\begin{aligned}
m\dot{X}\ddot{X} + m\dot{Y}\ddot{Y} &= -m\alpha\dot{X} - mg\dot{Y} \\
\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m(\dot{X}^2+\dot{Y}^2) + m\alpha X + mgY\right\} &= 0 \\
\therefore\ \frac{1}{2}m(\dot{X}^2+\dot{Y}^2) + \underbrace{m\alpha X + mgY}_{\text{位置エネルギー}} &= \text{const}\,.
\end{aligned}
$$

【補足２】問８：素直に計算

台と衝突した直後の時刻を $t=0$ とする．$t=0$ での位置，および速度は問 8 での結果から

$$
\begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} - \dfrac{\alpha}{g}h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{X}(0) \\ \dot{Y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 - \alpha\sqrt{\dfrac{2h}{g}} \\ \sqrt{2gh} \end{pmatrix}.
$$

よって，台固定系における物体の位置，および速度はそれぞれ，

$$
\begin{cases} X = V_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} - \dfrac{\alpha}{g}h + \left(V_0 - \alpha\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right)t - \dfrac{1}{2}\alpha t^2\,, \\ Y = \sqrt{2gh}\,t - \dfrac{1}{2}gt^2\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{X} = V_0 - \alpha\sqrt{\dfrac{2h}{g}} - \alpha t\,, \\ \dot{Y} = \sqrt{2gh} - gt\,. \end{cases}
$$

$Y=h$ を満たす時刻は $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ より，この時刻で $X=0$ となるように V_0 を求めて，

$$
V_0\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{\alpha}{g}h + \left(V_0 - \alpha\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{1}{2}\alpha\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 = 0\,, \qquad \therefore V_0 = \alpha\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.
$$

また，この時刻での台固定系での小物体の速さは，

$$
\dot{Y} = 0\,, \quad \dot{X} = \alpha\sqrt{\frac{2h}{g}} - 2\alpha\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\alpha\sqrt{\frac{2h}{g}}\,, \qquad \therefore V_1 = \sqrt{\dot{X}^2+\dot{Y}^2} = \alpha\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.
$$

[*6] 地面固定系に対しては相対位置，相対速度である．

〔２〕 電気回路

【メモ】

・電気回路の状態は，以下の 3 つで一意に決まる．

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

【解答】

I　C_1 のうち，図の左側のコンデンサの帯電量を q，右側の帯電量を q^* とする．キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_0 - RI - \dfrac{q}{C_1} = 0\,, \\ V_0 - RI - \dfrac{q^*}{C_1} = 0\,. \end{cases}$$

2 式より $q = q^*$ がわかる．題意より，$q = Q$ の下での I は，

$$I = \underbrace{-\frac{1}{RC_1}(Q - C_1V_0)}_{(1)} \,.$$

続いて，この状況からコンデンサの電位差が $\varDelta V_\mathrm{B}$ だけ変化したとき，両のコンデンサにおける帯電量の変化量を $\varDelta q$，$\varDelta q^*$，各コンデンサを流れる電流をそれぞれ i，i^* とすると，

$$I = i + i^* = \frac{\varDelta q}{\varDelta t} + \frac{\varDelta q^*}{\varDelta t} = \frac{\varDelta (C_1 V_\mathrm{B})}{\varDelta t} + \frac{\varDelta (C_1 V_\mathrm{B})}{\varDelta t} = 2C_1 \frac{\varDelta V_\mathrm{B}}{\varDelta t}\,.$$

ここで，題意より $\varDelta t$ 間電流の値が一定と見なせるとすれば，

$$2C_1 \frac{\varDelta V_\mathrm{B}}{\varDelta t} = -\frac{1}{RC_1}(Q - C_1V_0)\,, \qquad \therefore \frac{\varDelta V_\mathrm{B}}{\varDelta t} = \underbrace{-\frac{1}{2RC_1}\left(\frac{Q}{C_1} - V_0\right)}_{(2)} \,.$$

$V_\mathrm{B} = \dfrac{Q}{C_1}$ より，

$$\frac{dV_\mathrm{B}}{dt} = -\frac{1}{2RC_1}(V_\mathrm{B} - V_0)$$

となり，これは指数関数的に $V_\mathrm{B} = V_0$ に漸近する曲線となり，グラフは $\underbrace{\text{[a]}}_{(3)}$ が適当[*7]．

[*7] 微分方程式を解きたい人は各自で．

II　コンデンサの上側の極板に帯電している電荷を正とし，$\mathrm{C_1}$ の電荷は前の設問の解答に倣い，$\mathrm{C_2}$ は Q とする．キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{q}{C_1}+\dfrac{q^*}{C_1}-L\dfrac{dI}{dt}-\dfrac{Q}{C_2}=0\,, \\ -q+q^*=0\,, \\ q^*+Q=C_1V_0\,. \end{cases}$$

まず，$t=0$ で $q=q^*=C_1V_0$，$Q=0$ より，

$$\frac{C_1V_0}{C_1}+\frac{C_1V_0}{C_1}-L\frac{dI}{dt}-0=0\,, \qquad \therefore \frac{\mathit{\Delta} I}{\mathit{\Delta} t}=\underbrace{\frac{2C_1V_0}{L}}_{(4)}\,.$$

また，$t=t_1$ で $L\dfrac{dI}{dt}=0$，$Q=C_2V_1$ より，

$$\begin{cases} \dfrac{q}{C_1}+\dfrac{q^*}{C_1}-0-\dfrac{C_2V_1}{C_2}=0\,, \\ -q+q^*=0\,, \\ q^*+C_2V_1=C_1V_0\,, \end{cases} \qquad \therefore V_1=\underbrace{\frac{2C_1}{C_1+2C_2}V_0}_{(5)}\,, \quad q=q^*=\frac{{C_1}^2}{C_1+2C_2}V_0\,.$$

このとき全てのコンデンサが蓄える静電エネルギーの総和は $q=q^*=\dfrac{1}{2}C_1V_1$ より，

$$U_{\text{tot}}=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1}+\frac{1}{2}\frac{{q^*}^2}{C_1}+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2}=\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{2}C_1V_1\right)^2+\frac{1}{2C_2}(C_2V_1)^2=\underbrace{\frac{1}{4}(C_1+2C_2){V_1}^2}_{(6)}\,.$$

よって，系のエネルギー保存則より電流の最大値は，

$$\frac{1}{2}L{I_{\max}}^2+0=0+U_{\text{tot}}\,, \qquad \therefore I_{\max}=\underbrace{\frac{C_1V_0}{\sqrt{L(C_1+2C_2)}}}_{(7)}\,.$$

続いて，$Q_2=C_2V_2$ では電荷保存則より[*8]，

$$q=q^*=\underbrace{C_1V_0-C_2V_2}_{(8)}\,.$$

系のエネルギー保存則より $I=0$ に留意して，

$$\frac{q^2}{C_1}+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{2C_1}+0=U_{\text{tot}}=C_1{V_0}^2\,, \qquad \therefore V_2=\underbrace{\frac{4C_1}{C_1+2C_2}V_0}_{(9)}=\frac{4}{1+2C_2/C_1}V_0\fallingdotseq 4V_0\,.$$

[*8] キルヒホッフ則からはコイルの電位降下 $L\dot{I}$ が求まる．

〔３〕 熱力学の基本操作，どこまでを１つの系と見るか

【メモ】

・全て基本操作（むらがなく熱あり）に関する問題（一部 B がゆっくりとした断熱操作だが，断熱操作の計算はしない）．基本操作の定石は可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化は公式，仕事は $P-V$ グラフの面積評価（要するに積分），熱力学第 1 法則を通じて熱を計算．この問題では圧力の決定式が問題文で与えられているため，与えられた圧力の式と状態方程式を連立することで体積と温度の関係を付ける流れとなっている（体積，温度を決定することはしない）．

・仕事の計算では，どこまでを 1 つの系と見なすかが大事となる設定になっている．

【解答】

I　気体 A の体積変化は，状態方程式より，

$$\begin{cases}(P+a)V_{\mathrm{A}}=n_{\mathrm{A}}RT\,,\\(P+a)(V_{\mathrm{A}}+\mathit{\Delta}V_{\mathrm{A}})=n_{\mathrm{A}}R(T+\mathit{\Delta}T)\,,\end{cases}\qquad \therefore\ \mathit{\Delta}V_{\mathrm{A}}=\underbrace{\frac{R}{P+a}n_{\mathrm{A}}\mathit{\Delta}T}_{(1)}\,.$$

また，この間の風船ゴムの蓄える内部エネルギー変化はエネルギー収支より[*9][*10]，

$$\mathit{\Delta}U_{\mathrm{bal}}=W_{\mathrm{A}}+W_{\mathrm{B,bal}}=(P+a)\mathit{\Delta}V_{\mathrm{A}}+P(-\mathit{\Delta}V_{\mathrm{A}})=\underbrace{a\mathit{\Delta}V_{\mathrm{A}}}_{(2)}\,.$$

よって，気体 B のした仕事 W_{B} は，

$$W_{\mathrm{B}}=P\mathit{\Delta}V_{\mathrm{B}}=W_{\mathrm{B,bal}}+W_{\mathrm{B,pis}}=-P\mathit{\Delta}V_{\mathrm{A}}+W_{\mathrm{B,pis}}$$
$$\therefore\ W_{\mathrm{B,pis}}=\underbrace{P\mathit{\Delta}V_{\mathrm{B}}+P\mathit{\Delta}V_{\mathrm{A}}}_{(3),(4)}\ (=\mathit{\Delta}W)\,.$$

以上より，気体 A，気体 B からなる系の熱力学第 1 法則を考えて[*11]，

$$\mathit{\Delta}Q=\mathit{\Delta}U_{\mathrm{gas}}+W=\mathit{\Delta}U_{\mathrm{gas}}+\mathit{\Delta}U_{\mathrm{bal}}+\mathit{\Delta}W=\underbrace{\frac{5}{2}n_{\mathrm{B}}RT+\frac{5}{2}n_{\mathrm{A}}RT}_{(5),(6)}\,.$$

II　気体 A の体積変化は，状態方程式より，

$$\begin{cases}(P+b-cV_{\mathrm{A}})V_{\mathrm{A}}=n_{\mathrm{A}}RT\,,\\(P+b-cV_{\mathrm{A}})(V_{\mathrm{A}}+\mathit{\Delta}V_{\mathrm{A}}')=n_{\mathrm{A}}R(T+\mathit{\Delta}T')\,,\end{cases}\qquad \therefore\ \mathit{\Delta}T'=\underbrace{\frac{P+b-2cV_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{A}}R}\mathit{\Delta}V_{\mathrm{A}}'}_{(7)}\,.$$

---

*9 気体 A のした仕事を W_{A}，気体 B が風船にした仕事を $W_{\mathrm{B,bal}}$，ピストンにした仕事を $W_{\mathrm{B,pis}}$ と記す．

*10 気体 B のする仕事は 1 つのまとまった形で（式として）書かれる．各要素の仕事の総和が全体の仕事と解釈するのではなく，計算した仕事の各項を見てこの項は〇〇のした仕事と解釈できる，と言った方が適当に思う（実際に測定されるのは全体の仕事なので）．

*11 系のする仕事 W は，$W=W_{\mathrm{A}}+W_{\mathrm{B}}=\mathit{\Delta}U_{\mathrm{bal}}+\mathit{\Delta}U_{\mathrm{pis}}$ である．なお，ピストンのエネルギー収支を考えれば，ピストンの位置エネルギー変化 $\mathit{\Delta}U_{\mathrm{pis}}$ は気体 B がピストンにした仕事 $W_{\mathrm{B,pis}}=\mathit{\Delta}W$ と等しい．また，ゴムの熱力学的性質がわかっていればその温度変化などから $\mathit{\Delta}U_{\mathrm{gas}}$ が測定でき，ピストンの質量がわかっていれば $\mathit{\Delta}U_{\mathrm{pis}}$ が測定できる．

この間の風船ゴムの蓄える内部エネルギー変化はエネルギー収支より，

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Delta} U'_{\mathrm{bal}} &= W'_{\mathrm{A}} + W'_{\mathrm{B,bal}} \\
&= \frac{1}{2}\left[(P+b-cV_{\mathrm{A}}) + \{P+b-c(V_{\mathrm{A}}+\mathit{\Delta} V'_{\mathrm{A}})\}\right]\mathit{\Delta} V'_{\mathrm{A}} + P(-\mathit{\Delta} V'_{\mathrm{A}}) \\
&\fallingdotseq \underline{b\mathit{\Delta} V'_{\mathrm{A}} - cV_{\mathrm{A}}\mathit{\Delta} V'_{\mathrm{A}}} \\
&= (b-cV_{\mathrm{A}})\mathit{\Delta} V'_{\mathrm{A}} \\
&= \frac{b-cV_{\mathrm{A}}}{p_0} n_{\mathrm{A}} R \mathit{\Delta} T' \,.
\end{aligned}
$$

気体 A，B の内部エネルギー変化は，

$$
\mathit{\Delta} U'_{\mathrm{gas}} = \frac{3}{2}(n_{\mathrm{A}}+n_{\mathrm{B}})R\mathit{\Delta} T' \,.
$$

気体 B がピストンにした仕事 $W_{\mathrm{B,pis}}$ は[12]，

$$
W'_{\mathrm{B,pis}} = P\mathit{\Delta} V'_{\mathrm{B}} - P(-\mathit{\Delta} V'_{\mathrm{A}}) = n_{\mathrm{B}} R\mathit{\Delta} T' + \frac{P}{p_0} n_{\mathrm{A}} R\mathit{\Delta} T' \,.
$$

以上より，気体 A，気体 B からなる系の熱力学第 1 法則を考えて，

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Delta} Q' &= \mathit{\Delta} U'_{\mathrm{gas}} + W' \\
&= \mathit{\Delta} U'_{\mathrm{gas}} + \mathit{\Delta} U'_{\mathrm{bal}} + \mathit{\Delta} W' \\
&= \underline{\frac{5}{2} n_{\mathrm{B}} R\mathit{\Delta} T' + \left(\frac{3}{2} + \frac{P+b-cV_{\mathrm{A}}}{p_0}\right) n_{\mathrm{A}} R\mathit{\Delta} T'}_{(8),(9)} \,.
\end{aligned}
$$

よって，各状況における熱量量はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
C_{\mathrm{I}} &= \frac{\mathit{\Delta} Q}{\mathit{\Delta} T} = \frac{5}{2}(n_{\mathrm{A}}+n_{\mathrm{B}})R \,, \\
C_{\mathrm{II}} &= \frac{\mathit{\Delta} Q'}{\mathit{\Delta} T'} = \frac{5}{2}(n_{\mathrm{A}}+n_{\mathrm{B}})R + \frac{cV_{\mathrm{A}}}{p_0} n_{\mathrm{A}} R > C_{\mathrm{I}} \,,
\end{aligned}
$$

であり，大小関係としては (ア) が適当である．

[12] B の体積変化 $\mathit{\Delta} V'_{\mathrm{B}}$ は，状態方程式より $\mathit{\Delta} V'_{\mathrm{B}} = \frac{n_{\mathrm{B}} R}{P}\mathit{\Delta} T'$ である．