〔１〕 時間追跡

【メモ】

・高校範囲で時間追跡可能な運動は，等加速度運動，単振動，空気抵抗型の運動の 3 つである．そのうち，等加速度運動と単振動がエネルギーによる解法が存在する（すなわち別解がある）.

・問 1，問 2 が空気抵抗型の運動方程式に関する問題だが，微分方程式に関する設問はない.

・問 3〜問 6 が単振動に関する設問.

・問 7〜問 9 が等加速度運動に関する設問.

【解答】

問１　運動方程式は，

$$\underline{ma = -bv + mg}\,.$$

問２　運動方程式より，$a=0$ を解いて，

$$v_{\mathrm{f}} = \underline{\frac{mg}{b}}\,.$$

問３　運動方程式は，

$$\underline{ma = -kx + mg}\,.$$

問４　重力の位置エネルギーの基準を $x=0$ と定める．このとき，力学的エネルギー保存則は，

$$\underline{\frac{1}{2}k{L_1}^2 = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{f}}}^2 + mgL_1}\,.$$

問５　運動方程式より，加速度 a は，

$$a = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right)\,.$$

ここで，$x \leq L_1$ より，$|a|$ の最大値は[*1]，

$$|a| = \left|-\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right)\right| \leq \frac{k}{m}\left(L_1 - \frac{mg}{k}\right) < 15g\,, \qquad \therefore k < \underline{\frac{16mg}{L_1}}\,.$$

[*1] 位置 x を時刻 t の関数として表すと，

$$x = \frac{mg}{k} + v_{\mathrm{f}}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) - \frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

となり，その最大値は $\dfrac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{k}{m}\left(\dfrac{v_{\mathrm{f}}}{g}\right)^2}\right)$ とわかる．力学的エネルギー保存則と合わせれば，当然この最大値は L_1 と等しくなる.

問６　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}\frac{16mg}{L_1}{L_1}^2 = \frac{1}{2}m{v_\mathrm{f}}^2 + mgL_1\,, \qquad \therefore L_1 = \frac{{v_\mathrm{f}}^2}{14g}\,.$$

問７　運動方程式は，

$$ma = -F_\mathrm{R} + mg\,.$$

問８　運動方程式より加速度は $a = -\dfrac{F_\mathrm{R}}{m} + g$ である．物体の速度 v が 0 となる時間を求めて，

$$v = v_\mathrm{f} + at = 0\,, \qquad \therefore t = -\frac{v_\mathrm{f}}{a} = \frac{mv_\mathrm{f}}{F_\mathrm{R} - mg}\,.$$

問９　$a = -15g$ のとき，この時刻での位置 x を求めて，

$$L_2 = x = v_\mathrm{f}\left(-\frac{v_\mathrm{f}}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_\mathrm{f}}{a}\right)^2 = \frac{{v_\mathrm{f}}^2}{30g}\,.$$

問１０ (a) （く）　(b) （う）　(c) （か）　(d) （い）　(e) （あ）

（解説）: 緩衝材が潰れていくモデルでは物体の受ける力が一定ゆえ，物体が緩衝材にする仕事は変位（縮む長さ$_{\text{(a)}}$）と力の積となる．このとき，緩衝材される仕事は $F_\mathrm{R} = 16mg$ より，

$$W_2 = 16mgL_2\,.$$

一方，弾性力のモデルでは，$0 \leq x \leq L_1$ において弾性力の大きさの平均値 $\overline{F}$，および弾性力の大きさの最大値 F_max は，

$$\overline{F} = \frac{1}{L_1}\left|\int_0^{L_1}(-kx)\,dx\right| = \frac{1}{2}kL_1\,,$$
$$F_\mathrm{max} = kL_1$$

となり，平均値は最大$_{\text{(b)}}$値より小さく$_{\text{(c)}}$なることがわかる．ここで，小物体が壊れないための条件より $F_\mathrm{max} = 15mg$ ゆえ，小物体の運動方程式から $kL_1 = 16mg$ とわかり，弾性力のする仕事はその平均値を用いて，

$$W_1 = \overline{F}L_1 = 8mgL_1\,.$$

以上より，$W_1 = W_2$ から $L_1 > L_2$ となり，緩衝材$_{\text{(d)}}$の方がばね$_{\text{(e)}}$よりも薄くできることがわかる．

〔２〕 LC 回路，コンデンサの中身

【メモ】

・問 1，問 2 は電気回路に関する設問．振動回路がテーマ．

・問 3 以降は，コンデンサの中身に関する設問．

・コンデンサの中身を見る問題は，電位の関係として $\Delta\phi = \dfrac{Q}{C}$ を使う問題，$\Delta\phi = Ed$ を使う問題（と両方を使い分ける問題）に分類される．ここがコンデンサの中身問題の難しい点の 1 つである．今回はどちらも使う問題となっている．

【解答】

問 1 極板 D の極板 A 側の帯電量を q_1，極板 B 側の帯電量を $q_2 = (q - q_1)$，回路に流れる電流を図の時計回りに i とする．電流の定義より，

$$i = +\frac{dq}{dt} = \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt}\,.$$

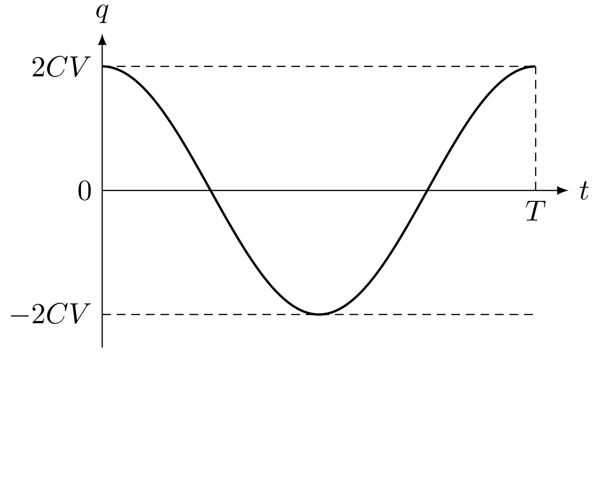
キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} -L\dfrac{di}{dt} - \dfrac{q_1}{C} = 0\,, \\ -L\dfrac{di}{dt} - \dfrac{q_2}{C} = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore\ \frac{d^2}{dt^2}(q_1 + q_2) = -\frac{1}{2LC}(q_1 + q_2)\,.$$

よって，$q = q_1 + q_2$ は角振動数 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{2LC}}$，振動中心 $q = 0$ の単振動を行う．以上から周期 T は，

$$T = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{2\pi\sqrt{2LC}}\,.$$

問 2 始めの帯電量は，キルヒホッフ則より $q_1 = q_2 = CV$ より $q = 2CV$ である．以上を踏まえて，グラフは以下のようになる．



問３　極板 DA で形成されるコンデンサの容量を C_1，極板 DB で形成されるコンデンサの容量を C_2 とする．公式より，

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d-x} = \frac{d}{d-x}C\,,\quad C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d+x} = \frac{d}{d+x}C\,.$$

問４　キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} -\dfrac{q_1}{C_1} + \dfrac{q_2}{C_2} = 0\,, \\ q_1 + q_2 = 2CV\,, \end{cases} \qquad \therefore V_{\mathrm{D}} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{2C}{C_1 + C_2}V = \left\{1 - \left(\frac{x}{d}\right)^2\right\}V\,.$$

問５　平行一様電場ゆえ，電場と電位の関係より，

$$E_{\mathrm{A}} = \frac{V_{\mathrm{D}}}{d-x} = \left(1 + \frac{x}{d}\right)\frac{V}{d}\,,\quad E_{\mathrm{B}} = -\frac{V_{\mathrm{D}}}{d+x} = -\left(1 - \frac{x}{d}\right)\frac{V}{d}\,.$$

問６　各極板が受ける合力を計算して[*2]，

$$F_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2}q_1 E_{\mathrm{A}} - \frac{1}{2}q_2 E_{\mathrm{B}} = \frac{2CV^2}{d^2}x\,.$$

問７　状態方程式より，x 変位した状態での A 側，および B 側の圧力 p_{A}，p_{B} は，

$$\begin{cases} pSd = nRT\,, \\ p_{\mathrm{A}}S(d-x) = nRT\,, \\ p_{\mathrm{B}}(d+x) = nRT\,, \end{cases} \qquad \therefore p_{\mathrm{A}} = \frac{d}{d-x}p\,,\quad p_{\mathrm{B}} = \frac{d}{d+x}p\,.$$

よって，極板が受ける力の合力は，

$$F' = F_{\mathrm{D}} - p_{\mathrm{A}}S + p_{\mathrm{B}}S = -2pS\left\{\frac{1}{1-(x/d)^2} - \frac{CV^2}{pSd^3}\right\}\frac{x}{d}\,.$$

問８　復元力となるには，$0 < x < d$ の範囲で常に $F' < 0$ となればよい．ここで，この範囲では $-\dfrac{x}{d}$ は常に負ゆえ，$\dfrac{1}{1-(x/d)^2} - \dfrac{CV^2}{pSd^3}$ の符号を考えればよい．$u = \dfrac{x}{d}\,(0 < u < 1)$，$f(u) = \dfrac{1}{1-u^2} - \dfrac{CV^2}{pSd^3}$ と定義して，

$$\frac{df(u)}{du} = \frac{2u}{(1-u^2)^2}$$

より，$0 < u < 1$ の範囲では $\dfrac{df(u)}{du} > 0$ がわかり，この区間で $f(u)$ は単調増加であるとわかる．以上より，$x \to 0\,(u \to 0)$ で $f(u) > 0$ を満たしていれば F' は復元力となり，

$$\frac{1}{1-0^2} - \frac{CV^2}{pSd^3} > 0\,,\qquad \therefore p > \frac{CV^2}{Sd}\,.$$

[*2] 各コンデンサ外側の電場は 0 であることに注意．

【補足１】問８：単調増加関数と単調増加関数の積は単調増加関数が自明に思えない人向けに

$g(x)$，$h(x)$ は $a<x<b$ の区間で $g(b)\geq g(a)>0$，$h(b)\geq h(a)>0$ を満たす単調増加関数とする．

さて，$f(x)$ を $g(x)$ と $h(x)$ の積で定義すると，

$$f(b)-f(a)=g(b)h(b)-g(a)h(a)=g(a)\{h(b)-h(a)\}+h(b)\{g(b)-g(a)\}\geq 0$$

と $f(x)$ の単調増加が得られる．

以上より，$a<x<b$ の区間で $g(a)>0$，$h(a)>0$ と選んだ単調増加関数 $g(x)$，$h(x)$ の積で定義された関数 $f(x)=g(x)h(x)$ もまた単調増加関数となることが言える．

問 8 の説明では，$g(x)=\dfrac{1}{1-(x/d)^2}-\dfrac{CV^2}{pSd^3}$，$h(x)=\dfrac{2pS}{d}x$ として，$g(x)$ の単調増加性からそれらの積の単調増加（F' の単調減少）を示し，$0<x<d$ の範囲で F' が負となることを示している．

【補足２】問８：式を **2** つの要素に分けないで計算してもいい

問 7 より F' は，

$$F'=-2pS\left\{\frac{x/d}{1-(x/d)^2}-\frac{CV^2}{pSd}\frac{x}{d}\right\}.$$

ここで，$u=\dfrac{x}{d}\,(0<u<1)$，$a=\dfrac{CV^2}{pSd}$ として，以下の関数 $f(u)$ を定義する．

$$f(u)=\frac{u}{1-u^2}-au\,.$$

このとき，$0<x<d$ において $F'<0$ となるためには $f>0$ であればよい．

さて，$f(u)$ の導関数は，

$$\frac{df(u)}{du}=\frac{1+u^2}{1-u^2}-a$$

であり，$\displaystyle\lim_{u\to 0}f(u)=0$，$\displaystyle\lim_{u\to 1}f(u)=\infty$ より，$0<u<1$ の区間で $\dfrac{df(u)}{du}$ が正の値を取れば $f(u)$ は常に正の値を取る．$\dfrac{df(u)}{du}>0$ を考えて，

$$p>\frac{CV^2}{Sd}\frac{(1-u^2)^2}{1+u^2}\,.$$

よって，$u\to 0$ で上記不等式を満たしていれば常に $f(u)>0$ となり[*3]，

$$p>\frac{CV^2}{Sd}\,.$$

[*3] $g(u)=\dfrac{(1-u^2)^2}{1+u^2}$ は $0<u<1$ で単調減少．

〔３〕 A：固有振動

【メモ】

・固有振動は図を描いて（状況を丁寧に整理して）問題を解く．

【解答】

問１ (a) （う） (b) （え） (c) （き）

（解説）：アンペール力は，フレミング左手則より $\underset{\sim}{z}_{(a)}$ 軸方向にはたらく．z 軸方向に縦波が伝播する．導線の振動を考えれば，粗密が周期 $\dfrac{1}{f}$ の振動で伝播することから，振動数 $\underset{\sim}{f}_{\text{(b)}}$ の $\underset{\sim\sim}{\text{縦波}}_{\text{(c)}}$ が伝播する．

問２ 固体平板には，上面と下面の反射波によって定常波が生じる．境界条件は自由端反射より，境界と導線位置で腹となることから v を縦波の速さ，n を自然数として[*4]，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{v}{f_1}n = \dfrac{d}{2}\,, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{v}{f_2}(n+1) = \dfrac{d}{2}\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \underline{(f_2 - f_1)d}\,.$$

問３ 問３同様に c を横波の速さ，m を自然数として，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{c}{f_4}m = \dfrac{d}{2}\,, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{c}{f_5}(m+1) = \dfrac{d}{2}\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{c}{v} = \frac{(f_5 - f_4)d}{(f_2 - f_1)d} = \underline{\frac{f_5 - f_4}{f_2 - f_1}}\,(<1)\,.$$

[*4] f_1 の次の固有振動では境界と導線位置の間に半波長だけ波の数が増える．

B：核反応

【メモ】

・原子分野では，運動エネルギー K を運動量 p を用いて $K=\dfrac{p^2}{2m}$ のように表したり，逆に運動量 p を運動エネルギー K を用いて $p=\sqrt{2mK}$ のように表したりすることが多いので，行き来に戸惑わないようにしておく．

・核反応は複数物体系の基本に従う．

・反応熱の定義（反応前後の運動エネルギーの変化量）を押さえる．

【解答】

問４　運動量・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} m_\mathrm{p}v+m_\mathrm{d}v=\sqrt{2m_\mathrm{p}E_\mathrm{p}}\,, \\ \dfrac{1}{2}m_\mathrm{p}v^2+\dfrac{1}{2}m_\mathrm{d}v^2+k_0\dfrac{e^2}{r}=E_\mathrm{p} \end{cases} \qquad \therefore v=\underline{\frac{\sqrt{2m_\mathrm{p}E_\mathrm{p}}}{m_\mathrm{p}+m_\mathrm{d}}}\,,\quad r=\underline{\left(1+\frac{m_\mathrm{d}}{m_\mathrm{p}}\right)\frac{k_0e^2}{E_\mathrm{p}}}\,.$$

問５　問５に示した．

問６　問６での結果を $m_\mathrm{p}\to m_\mathrm{d}$，$E_\mathrm{d}\to E_\mathrm{p}$ として，

$$r'=\left(1+\frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{d}}\right)\frac{k_0e^2}{E_\mathrm{d}}\,.$$

これが r と等しいとして，重陽子の質量が陽子の質量の約２倍であるから，

$$\left(1+\frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{d}}\right)\frac{k_0e^2}{E_\mathrm{d}}=\left(1+\frac{m_\mathrm{d}}{m_\mathrm{p}}\right)\frac{k_0e^2}{E_\mathrm{p}}\,,\qquad \therefore \frac{E_\mathrm{d}}{E_\mathrm{p}}=\frac{m_\mathrm{d}}{m_\mathrm{p}}\fallingdotseq\underset{\text{(お)}}{\underline{2}}\,.$$

問７　力学的エネルギー保存則より，

$$Mc^2+\frac{1}{2}MV_\mathrm{h}{}^2+E_\mathrm{G}=m_\mathrm{p}c^2+\frac{p^2}{2m_\mathrm{p}}+m_\mathrm{d}c^2+\frac{p^2}{2m_\mathrm{d}}$$

$$\therefore Q=\left(\frac{1}{2}MV_\mathrm{h}{}^2+E_\mathrm{G}\right)-\left(\frac{p^2}{2m_\mathrm{p}}+\frac{p^2}{2m_\mathrm{d}}\right)=\underline{(m_\mathrm{p}+m_\mathrm{d}-M)c^2}\,.$$

問８　運動量保存則より，

$$MV_\mathrm{h}+\left(-\frac{E_\mathrm{G}}{c}\right)=0\,,\qquad \therefore E_\mathrm{G}=\underline{McV_\mathrm{h}}\ll 1\,.$$

問９　公式，および与えられた数値より，

$$\begin{aligned} E_\mathrm{s}&=9.0\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}\,\frac{(1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{1\times10^{-15}\,\mathrm{m}}\,\frac{1}{1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times1\,\mathrm{V}} \\ &=1.44\times10^6\,\mathrm{eV} \\ &\fallingdotseq\underline{1\times10^6\,\mathrm{eV}}\,. \end{aligned}$$

問１０　題意より，

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{s}} &= E_{\mathrm{s}} = 1.44\times10^{6}\times1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J}\\
\therefore T_{\mathrm{s}} &= \frac{2\times1.44\times10^{6}\times1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J}}{3\times1.4\times10^{-23}\,\mathrm{J/K}}\\
&= \frac{364}{35}\times10^{9}\\
&\fallingdotseq \underline{1\times10^{10}\,\mathrm{K}}\,.
\end{aligned}
$$