〔1〕 非等速円運動，等加速度運動（時間追跡），複数物体系

【メモ】

・問 1，問 2 は非等速円運動の問題．非等速円運動は以下の 2 式を連立．

$$\begin{cases} \text{運動方程式の中心成分} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

・問 3，問 4，問 9 は複数物体系の問題．複数物体系は，以下の 2 式連立が基本．

$$\begin{cases} \text{外力のない方向成分の運動量保存則} \\ \text{全体の力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

しかし，問 3，問 4 は分離の問題ゆえ衝突の分類に含み，例外的に以下のように処理する．

$$\begin{cases} \text{衝突（分離）の直前直後の運動量保存則} \\ \text{問題で与えられた条件} \end{cases}$$

・問 6，問 7，問 8 は等加速度運動の時間追跡に関する問題．等加速度運動と単振動は，時間追跡でもエネルギーでも解くことができるが，今回の問題では時刻が問われているため時間追跡一択となる．

【解答】

問 1　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{B}}}^2 + mg\cdot 2R = 0 + mg(h+2R)\,, \qquad \therefore v_{\mathrm{B}} = \sqrt{2gh}\,.$$

問 2　運動方程式の中心成分より，

$$m\frac{{v_{\mathrm{B}}}^2}{R} = N + mg$$

$$\therefore N = m\frac{2gh}{R} - mg \leq 0\,, \qquad \therefore h \leq \frac{R}{2}\,(= h_0)\,.$$

問 3　軽い小物体の速度が $\vec{0}$ より，分離の直前・直後の運動量保存則から重い小物体の速度の鉛直方向も 0 とわかる．すなわち，ともに鉛直方向には速度成分 0 で落下するので，落下時間は等しい．よって，(あ)．

問 4　運動量保存則（水平方向成分），および条件（軽い物体の速度 $\vec{0}$）より，

$$\frac{1}{4}m\cdot 0 + \frac{3}{4}mv_{\mathrm{D}} = mv_{\mathrm{C}}\cos\theta\,, \qquad \therefore v_{\mathrm{D}} = \frac{4}{3}v_{\mathrm{C}}\cos\theta\,.$$

問 5　点 D の位置は，点 C から $\dfrac{L}{2}$ の位置にある．分離後，軽い物体の速度は $\vec{0}$ ゆえ，水平方向に運動しない．よって，$\dfrac{L}{2}$.

問 6　速さ v_C で角度 θ 方向に斜方投射した物体の時刻 t での位置は,

$$\begin{cases} x = v_\mathrm{C}\cos\theta t\,, \\ y = v_\mathrm{C}\sin\theta t - \dfrac{1}{2}gt^2\,, \end{cases}$$

であり，$y=0$ を満たす時刻は $t = \dfrac{2v_\mathrm{C}\sin\theta}{g}$ ゆえ，L は,

$$L = v_\mathrm{C}\cos\theta\frac{2v_\mathrm{C}\sin\theta}{g} = \frac{2{v_\mathrm{C}}^2\sin\theta\cos\theta}{g}\,.$$

さて，改めて分離した時刻を $t=0$ とすると，分離後の重い小物体の位置は,

$$\begin{cases} x = \dfrac{L}{2} + \dfrac{4}{3}v_\mathrm{C}\cos\theta t\,, \\ y = \dfrac{{v_\mathrm{C}}^2\sin^2\theta}{2g} - \dfrac{1}{2}gt^2\,, \end{cases}$$

であり，$y=0$ を満たす時刻は $t = \dfrac{v_\mathrm{C}\sin\theta}{g}$ ゆえ，落下地点は,

$$x = \frac{L}{2} + \frac{4}{3}v_\mathrm{C}\cos\theta\frac{v_\mathrm{C}\sin\theta}{g} = \frac{L}{2} + \frac{2}{3}L = \underset{\sim\sim}{\frac{7}{6}}L\,.$$

問 7　摩擦面上での物体の運動方程式は，加速度を a として,

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}ma = -\mu N\,, \\ 0 = N - \dfrac{3}{4}mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = -\mu g\,.$$

よって，点 E を通過する瞬間を改めて $t=0$ として,

$$v = \frac{4}{3}v_\mathrm{C}\cos\theta - \mu g t = 0\,, \qquad \therefore t_\mathrm{S} = \underline{\frac{4v_\mathrm{C}}{3\mu g}\cos\theta}\,.$$

問 8　物体の位置 x は,

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{3}v_\mathrm{C}\cos\theta t - \frac{1}{2}\mu g t^2 \\ &= -\frac{1}{2}\mu g\left(t - \frac{4v_\mathrm{C}}{3\mu g}\cos\theta\right)^2 + \frac{8}{9}\frac{{v_\mathrm{C}}^2}{\mu g}\cos^2\theta \\ \therefore t &= \underline{\frac{4v_\mathrm{C}}{3\mu g}\cos\theta\left(1 - \sqrt{1 - \frac{9}{8}\frac{\mu g}{{v_\mathrm{C}}^2\cos^2\theta}x}\right)}\,. \end{aligned}$$

問 9　始状態（点 A での状態）における弾性エネルギーを U とする．始状態での系（物体，重力場，ばねからなる系）の力学的エネルギー E_ini は,

$$E_\mathrm{ini} = mg(h+2R) + U\,.$$

分離の前後で，系の力学的エネルギーが保存することから，点 D の水平面からの高さを H とすれば[*1]，

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}m\left(\frac{4}{3}v_{\mathrm{C}}\cos\theta\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{4}m\cdot 0^2+mgH+0=\frac{1}{2}m(v_{\mathrm{C}}\cos\theta)^2+mgH+U$$

$$\therefore U=\frac{1}{6}m{v_{\mathrm{C}}}^2\cos^2\theta=\frac{1}{3}g(h+2R)\cos^2\theta\,.$$

よって，終状態のエネルギーは $E_{\mathrm{fin}}=0$ ゆえ，

$$\begin{aligned}-\mathit{\Delta}E=E_{\mathrm{ini}}-E_{\mathrm{fin}}&=mg(h+2R)+\frac{1}{3}g(h+2R)\cos^2\theta\\&=\underline{mg(h+2R)\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\theta\right)}\,.\end{aligned}$$

[*1] C を通過する瞬間の物体の速さ v_{C} は，力学的エネルギー保存則より $v_{\mathrm{C}}=\sqrt{2g(h+2R)}$.

〔２〕 電気回路，例外素子（ダイオード）

【メモ】

・電気回路の状態は，キルヒホッフ則，電荷保存則，素子の性質によって一意に決まる．

・問 6，問 7 以外は，全て上記の 3 式で決定．

・問 7 は単振動の時間追跡に関する問題．

【解答】

問 1　キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C_1} - \dfrac{Q_2}{C_2} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{Q_2}{C_2} = \underline{\frac{C_1}{C_1+C_2}}E\,.$$

問 2　キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} -\dfrac{Q_2}{C_2} - \dfrac{Q_3}{C_3} = 0\,, \\ Q_2 + Q_3 = \dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}E\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{Q_2}{C_2} = \underline{\frac{C_1C_2}{(C_1+C_2)(C_2+C_3)}}E\,.$$

問 3　キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C_1} - \dfrac{Q_2}{C_2} = 0\,, \\ E - \dfrac{Q_1}{C_1} - \dfrac{Q_3}{C_3} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{Q_2}{C_2} = \underline{\frac{C_1}{C_1+C_2+C_3}}E\,.$$

問 4　誘電体挿入後の各コンデンサに帯電している電荷は，問 3 において $C_3 \to \varepsilon_\mathrm{r} C_3$ とすれば，

$$Q_1 = \frac{C_1(C_2+\varepsilon_\mathrm{r}C_3)}{C_1+C_2+\varepsilon_\mathrm{r}C_3}E\,,\quad Q_2 = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2+\varepsilon_\mathrm{r}C_3}E\,.$$

題意より，$\dfrac{Q_2}{C_2} = 2\dfrac{Q_1}{C_1}$ ゆえ，

$$\frac{C_1}{C_1+C_2+\varepsilon_\mathrm{r}C_3}E = \frac{2(C_2+\varepsilon_\mathrm{r}C_3)}{C_1+C_2+\varepsilon_\mathrm{r}C_3}E\,,\qquad \therefore \varepsilon_\mathrm{r} = \underline{\frac{C_1-2C_2}{2C_3}}\,.$$

問 5　ダイオード D に電流が流れないと仮定すると，キルヒホッフ則より，回路に流れる電流を反時計回りを正として，

$$\begin{cases} -\dfrac{Q}{C} - L\dfrac{dI}{dt} = 0\,, \\ I = \dfrac{dQ}{dt}\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q\,.$$

よって，Q は振動中心 $Q=0$ の単振動を行い，初期条件 $Q(0)=CE$，$I(0)=0$ より，

$$\begin{cases} Q = CE\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right), \\ I = -E\sqrt{\dfrac{C}{L}}\,\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right). \end{cases}$$

さて，ダイオードの下の分岐点を B，抵抗の上の分岐点を A とすると，B に対する A の電位 V_{BA} は，

$$V_{\mathrm{BA}} = +\frac{Q}{C} = E\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

であり，$\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right) < 0$ となる $t = \pi\sqrt{LC}$ まではダイオードに電流が流れないことがわかる．よって，回路に流れる電流の大きさの最大値は，はじめの振動回路（LC 回路）のときに最大値をとり[*2]，

$$I_0 = \underset{\sim\sim\sim}{E\sqrt{\frac{C}{L}}}\,.$$

問 6　問 5 より，振動電流の大きさが最大のときを考えて，公式より，

$$H_0 = \underset{\sim}{nI_0}\,.$$

問 7　問 5 より，$\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right) = 1$ を満たす時刻を考えて，

$$\frac{t}{\sqrt{LC}} = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \therefore t = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}}\,.$$

問 8　キルヒホッフ則より，回路に流れる電流を時計回りを正として，

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t} - RI_0 = 0\,, \qquad \therefore \frac{\Delta I}{I_0\Delta t} = \underset{\sim\sim}{-\frac{R}{L}}\,.$$

問 9　キルヒホッフ則より，

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t} - RI_0 = 0\,, \qquad \therefore \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I\,.$$

この微分方程式から，I は時間とともに減少していくことがわかる．さらに，I の時間変化率は I に比例していることから，I の時間変化率の大きさは時間の増加とともに減少していく．

以上より，$t=t_0$ までは sin 型のグラフとなり (あ) のようになり，$t=t_0$ 以降は減少していくが，その減少の割合は時間発展とともに小さくなっていくので (か) のようになる．

[*2] 今は上の議論から振動電流の振幅をそのまま用いたが，回路のエネルギー保存則より決定してもよい．

【補足】問９のグラフ

$t = t_0$ までの，コイルに流れる電流の大きさは問 5 より，

$$|I(t)| = E\sqrt{\frac{C}{L}}\left|\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right|.$$

$t = t_0$ 以降は，キルヒホッフ則より，

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$

であり，$t = t_0$ で $I(t_0) = E\sqrt{\frac{C}{L}}$ ゆえ[*3][*4]，

$$I(t) = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}.$$

以上をまとめて，

$$|I(t)| = \begin{cases} E\sqrt{\dfrac{C}{L}}\left|\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right| & (0 \leq t < t_0), \\ E\sqrt{\dfrac{C}{L}}\,e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} & (t_0 \leq t). \end{cases}$$

[*3] コイルの性質である電流の連続性による．

[*4] ここでは，電流の正の向きは時計回りを正としている．

〔３〕 **A**：熱力学の基本処理，断熱過程，熱気球

【メモ】

・問 1，問 2，問 5 は熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題．定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算．今回は，温度が与えられていて，ピストンの面積が不明なため，体積（始状態では面積，それ以降は高さ）の決定方程式となる．

・問 3，問 4 は準静的な断熱過程に関する問題．準静的な断熱過程では，ポアソンの公式から圧力か体積の決定，状態方程式から温度の決定．熱力学第 1 法則は仕事の決定方程式となる．

・熱効率は定義を押さえる．

【解答】

問 1　始状態の状態方程式より，ピストンの面積は，

$$p_0SL = RT_0\,,\qquad \therefore S = \frac{RT_0}{p_0L}\,.$$

ピストンのつりあいより内部気体の圧力は p_0 であり，状態方程式より，

$$p_0\cdot\frac{1}{2}SL = RT_{\rm B}\,,\qquad \therefore T_{\rm B} = \frac{1}{2}T_0\,.$$

問 2　内部エネルギー変化は公式より，

$$\mathit{\Delta} U_{\rm AB} = \frac{3}{2}R(T_{\rm B}-T_0) = -\frac{3}{4}RT_0\,.$$

気体が外部にした仕事は $p-V$ グラフより，

$$W_{\rm AB} = p_0\left(\frac{1}{2}SL - SL\right) = -\frac{1}{2}RT_0\,.$$

よって，吸熱量は熱力学第 1 法則より，

$$Q_1 = \mathit{\Delta} U_{\rm AB} + W_{\rm AB} = -\frac{5}{4}RT_0\,.$$

問 3　状態 C におけるピストンの位置を z とすると，ポアソンの公式，および状態方程式より，

$$\begin{cases} \alpha p_0(Sz)^\gamma = p_0(SL/2)^\gamma\,, \\ \alpha p_0Sz = RT_{\rm C}\,, \end{cases}\qquad \therefore z = \frac{1}{2}\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}L\,,\quad T_{\rm C} = \frac{1}{2}\alpha^{1-\frac{1}{\gamma}}T_0\,.$$

問 4　ポアソンの公式より，

$$\alpha p_0(Sz_{\rm D})^\gamma = p_0(SL)^\gamma\,,\qquad \therefore z_{\rm D} = \alpha^{-\frac{1}{\gamma}}L\,.$$

問 5　状態方程式より，状態 D における温度 T_{D} は，

$$\alpha p_0 S \alpha^{-\frac{1}{\gamma}} L = RT_{\mathrm{D}}\,, \qquad \therefore T_{\mathrm{D}} = \alpha^{1-\frac{1}{\gamma}} T_0\,.$$

よって，内部エネルギー変化は公式より，

$$\mathit{\Delta} U_{\mathrm{CD}} = \frac{3}{2}R(T_{\mathrm{B}} - T_{\mathrm{C}}) = \frac{3}{4}\alpha^{1-\frac{1}{\gamma}} RT_0\,.$$

気体が外部にした仕事は $p-V$ グラフより，

$$W_{\mathrm{CD}} = \alpha p_0 (Sz_{\mathrm{D}} - Sz) = \frac{1}{2}\alpha^{1-\frac{1}{\gamma}} RT_0\,.$$

以上から，吸熱量は熱力学第 1 法則より，

$$Q_2 = \mathit{\Delta} U_{\mathrm{CD}} + W_{\mathrm{CD}} = \underline{\frac{5}{4}\alpha^{1-\frac{1}{\gamma}} RT_0}\,.$$

問 6　定義より，

$$e = \frac{W_{1\,周}}{Q_{吸収}} = \frac{Q_{吸収} - Q_{放出}}{Q_{吸収}} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{5RT_0/4}{5\alpha^{1-\frac{1}{\gamma}} RT_0/4} = \underline{1 - \alpha^{\frac{1}{\gamma}-1}}\,.$$

問 7　問 6 より，

$$1 - \alpha^{\frac{1}{\gamma}-1} \leq \frac{1}{2}\,, \qquad \therefore \alpha \geq \underline{4\sqrt{2}}\,(= \alpha_{\min})\,.$$

B：光の干渉

【メモ】

・干渉条件は，位相差で考える．

$$(\text{位相差}) = \frac{2\pi}{\lambda}(\text{経路差}) = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強めあい}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱めあい}). \end{cases}$$

ここで，m は整数であり，屈折率 n の媒質中では $\lambda \to \dfrac{\lambda}{n}$ とし，反射によって位相が π ずれた場合，左辺の位相差に π を足せばよい．

【解答】

問 1　解答図 1 のように射線で考えて，

$$\ell_x = \underline{\ell - x\sin\theta}\,.$$

問 2　経路 Y の光の光路長を ℓ_{Y} とし，m 次の明線が生じる位置を x_m とする．強め合いの条件は[*5]，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\{\ell_{\mathrm{Y}} - (\ell - x_m\sin\theta)\} = 2m\pi\,.$$

よって，明線間隔は，

$$\begin{cases} x_m\sin\theta = m\lambda - \ell_{\mathrm{Y}} + \ell\,, \\ x_{m+1}\sin\theta = (m+1)\lambda - \ell_{\mathrm{Y}} + \ell,, \end{cases} \qquad \therefore x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda}{\underline{\sin\theta}}\,.$$

問 3　m 次の明線の位置を x'_m とすると，強め合いの条件は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\{\ell_{\mathrm{Y}} - (\ell - x'_m\sin\theta + 2D)\} = 2m\pi\,.$$

よって，明線のずれは，

$$\begin{cases} x_m\sin\theta = m\lambda - \ell_{\mathrm{Y}} + \ell\,, \\ x'_m\sin\theta = m\lambda - \ell_{\mathrm{Y}} + \ell + 2D,, \end{cases} \qquad \therefore \mathit{\Delta} x_1 = x'_m - x_m = \frac{2D}{\underline{\sin\theta}}\,.$$

問 4　容器 A の寄与を除いた光路長を ℓ' とする．m 次の明線の位置を x''_m とすると，強め合いの条件は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}[\ell_{\mathrm{Y}} - \{\ell' - x''_m\sin\theta + 2D + 2(1+\alpha)L\}] = 2m\pi\,.$$

よって，明線のずれは，

$$\begin{cases} x'_m\sin\theta = m\lambda - \ell_{\mathrm{Y}} + \ell' + 2D + 2L\,, \\ x''_m\sin\theta = m\lambda - \ell_{\mathrm{Y}} + \ell' + 2D + 2(1+\alpha)L\,, \end{cases} \qquad \therefore \mathit{\Delta} x_2 = x''_m - x'_m = \frac{2\alpha L}{\underline{\sin\theta}}\,.$$

[*5] 鏡による位相のずれがあるが，それぞれ π ずつずれているため，位相差を計算すれば反射による位相のずれの寄与は 0 となる．

問 5　時刻 t において，$x=0$ に各経路から届く電場は，それぞれ，

$$E_{\mathrm{X}}(t)=E_{\mathrm{Y}}(t)=E_0\sin(\omega t)\,.$$

経路 X から届く光（伝播速度 c）について，位置 $x=0$ に波面が届く時間を t とすると，位置 x に同一の波面が届く時刻は t より $\dfrac{x\sin\theta}{v}$ だけ早い時刻に届くので，位置 x で観測される電場の振動は，

$$\begin{pmatrix}\text{位置 } x \text{ での}\\ \text{今の電場}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x=0 \text{ での}\\ x\sin\theta/c \text{ 後の電場}\end{pmatrix}$$

ゆえ，

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{X}}(x,t)&=E_{\mathrm{X}}\left(0,t+\frac{x\sin\theta}{c}\right)\\&=E_0\sin\left\{\omega\left(t+\frac{x\sin\theta}{c}\right)\right\}\\&=E_0\sin\left(\omega t+\frac{2\pi\sin\theta}{\lambda}x\right).\end{aligned}$$

よって，位置 x で観測される電場の強度は，

$$\begin{aligned}I(x)&=\overline{\{E_{\mathrm{X}}(x,t)+E_{\mathrm{Y}}(x,t)\}^2}\\&={E_0}^2\,\overline{\left\{\sin\left(\omega t+\frac{2\pi\sin\theta}{\lambda}x\right)+\sin(\omega t)\right\}^2}\\&={E_0}^2\,\overline{\left\{\sin(\omega t)\cos\left(\frac{2\pi\sin\theta}{\lambda}x\right)+\cos(\omega t)\sin\left(\frac{2\pi\sin\theta}{\lambda}x\right)+\sin(\omega t)\right\}^2}\\&={E_0}^2\left\{1+\cos\left(\frac{2\pi\sin\theta}{\lambda}x\right)\right\}.\end{aligned}$$