

〔1〕 地球を周回する物体の運動について考えよう。

赤道上空の円軌道を地球の自転と同じ向きに同じ周期で周回している人工衛星は静止衛星と呼ばれ、地上からは静止して見える。静止衛星は気象観測や放送・通信など様々な目的に利用されているが、地上から宇宙空間へ到達するワイヤーを静止衛星と周回させることができれば、このワイヤーを使って宇宙空間へ人や物資を運ぶことのできる「軌道エレベーター」を実現できる可能性がある。

ここでは、静止衛星が地球を周回する角速度 ω_s とおき、地球の質量を M 、地球の半径を R_0 、万有引力定数を G とする。さらに、地球の中心から距離に比べると大きさを無視することのできる小さな静止衛星が、地球を周回する円軌道の半径を R_s と表すことにする。

ただし、万有引力については、地球と地球を周回する物体の間にはたらく引力のみを考え、物体同士にはたらく引力は無視する。地球は球形であるとし、太陽や月など地球以外の天体による影響は考えない。また、地球の大気による影響も無視する。

I. 以下の問に答えよ。

問1 ω_s の値をラジアン毎秒 [rad/s] の単位で求めよ。ただし、有効数字は1桁とせよ。

問2 図1のように、質量 m の小さな人工衛星が、静止衛星として地球を周回している。 m 、 M 、 G 、 ω_s のうち、必要なものを用いて表せ。

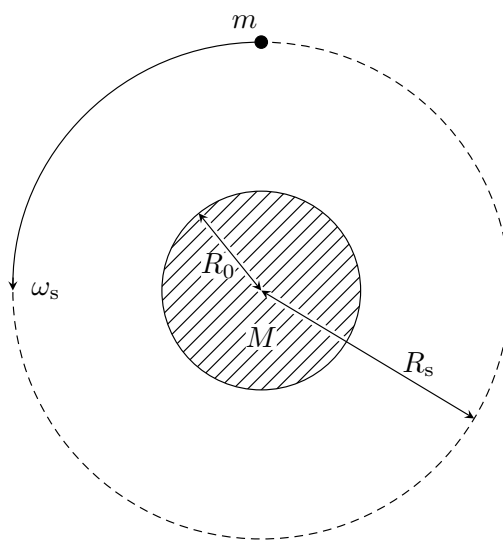


図1

- II. 質量 m の小さな人工衛星を R_s とは異なる半径の円軌道上で運動させると、この人工衛星の運動は、地上から静止して見える静止衛星としての条件を満たせない。しかし、図2に示すように、鉛直で下端が赤道上の地表面に固定されたワイヤーを、この人工衛星に接続して適切な初速度を与えれば、 R_s よりも大きな半径 R_1 の円軌道上であっても、人工衛星を静止衛星として運動させることができる。

以下の問に答えよ。ただし、ワイヤーは伸び縮みせず、その質量を無視してよいものとする。

- 問3 図2において、ワイヤーにはたらいっている張力の大きさを R_0 , R_1 , m , M , G , ω_s のうち、必要なものを用いて表せ。

- 問4 図3に示すように、ワイヤー上の半径 r' ($R_0 < r' < R_1$) の位置に質量 m' をもつ小物体をとりつけた。このとき、ワイヤーと人工衛星は地上から見て静止したままであった。このあと、静かに小物体をワイヤーから切り離すと、小物体はワイヤーとは独立に運動をし地球から無限遠へと遠ざかった。小物体を、地球を周回する軌道から離脱させ、再び地球へ接近させないために必要な最小の r' を R_0 , R_1 , m , m' , M , G , ω_s のうち、必要なものを用いて表せ。

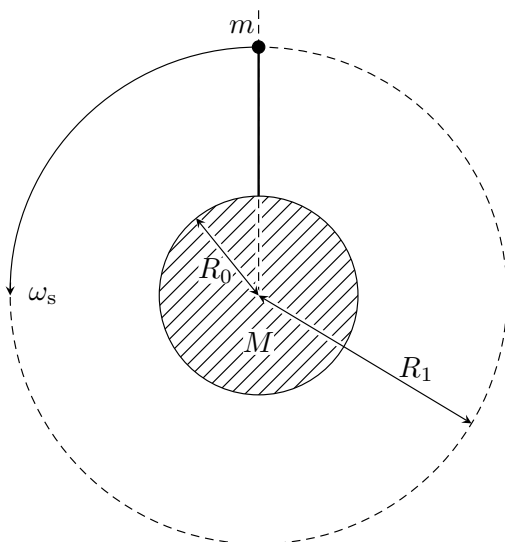


図2

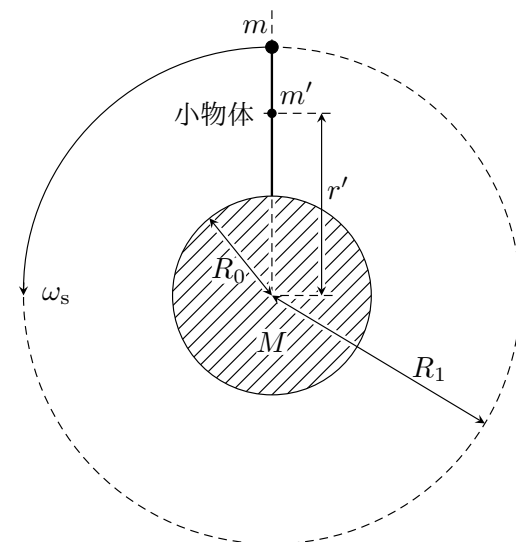


図3

III. 次に、ワイヤーが質量をもつ場合を考えよう。図 4 上に示すように、赤道上の地表面から単位長さあたり λ の質量をもつワイヤーが、上空へ向かって伸びている。II での状況とは異なり、ワイヤーは地表面に固定されておらず、ワイヤーの上端に人工衛星は取り付けられていない。このワイヤーは、鉛直を保ったまま伸び縮みすることなく地球の周りを周回しており、ワイヤーの上端は半径 R_2 の円軌道上を運動しているが、地上から見ると静止している。

図 4(i) に示すように、ワイヤーを等しい長さ Δr をもつ N の要素に分割して考えよう。 N を十分に大きくして Δr を小さくすれば、それぞれの要素を、その重心に質量が集中した質点とみなすことができる。このとき、ワイヤー全体は、図 4(ii) に示すように、長さ Δr の質量の無視できる短いひもでつながれた、 N 個の質点の集合となる。地表面から数えて i 番目の質点は半径 $r_i = R_0 + i\Delta r$ の円軌道上を運動する。

問 5 次の文章を読んで、 ~ に適した式または数字をそれぞれの解答欄に記入せよ。

地表面から数えて i 番目の質点が、ひもから鉛直上向きに受ける張力の大きさを T_i 、鉛直下向きに受ける張力の大きさを T_{i-1} とする。

$$F_i = T_i - T_{i-1}$$

のように T_i と T_{i-1} の差を F_i とおき、質点の質量を Δm とする。質点の運動方程式を考えると、 F_i は G , M , Δm , r_i , ω_s を用いて

$$F_i = \boxed{\text{(a)}}$$

と表される。また、 Δm を λ と Δ を用いて表せば

$$\Delta m = \boxed{\text{(b)}}$$

となる。 N が十分に大きいときに $n \neq -1$ に対して成り立つ近似式

$$\sum_{i=1}^N r_i^n \Delta r \doteq \frac{1}{n+1} (R_2^{n+1} - R_0^{n+1})$$

を用いれば、すべての質点に対する F_i の和 F は、 λ , G , M , R_0 , R_2 , ω_s を用いて

$$F = \sum_{i=1}^N F_i = \boxed{\text{(c)}}$$

と表すことができる。一方、0 番目と $N+1$ 番目の質点が存在しないことを考えると、 $T_0 = T_N = 0$ であるので、 F は

$$F = \boxed{\text{(d)}}$$

のように数字のみで表すこともできる.

問 6 $\frac{R_2}{R_0}$ を R_0 と問 2 で考えた R_s を用いて表せ. ただし, $R_2 > R_0$ であることに留意せよ.

また, $\frac{R_2}{R_0}$ の値に最も近いものを以下の選択肢から選び, (あ) ~ (こ) の記号で答えよ. ここでは, $R_s = 7R_0$ と近似してよい.

- | | | | | |
|---------|-------|--------|--------|---------|
| (あ) 2.5 | (い) 5 | (う) 10 | (え) 25 | (お) 125 |
| (か) 3.5 | (き) 7 | (く) 14 | (け) 49 | (こ) 343 |

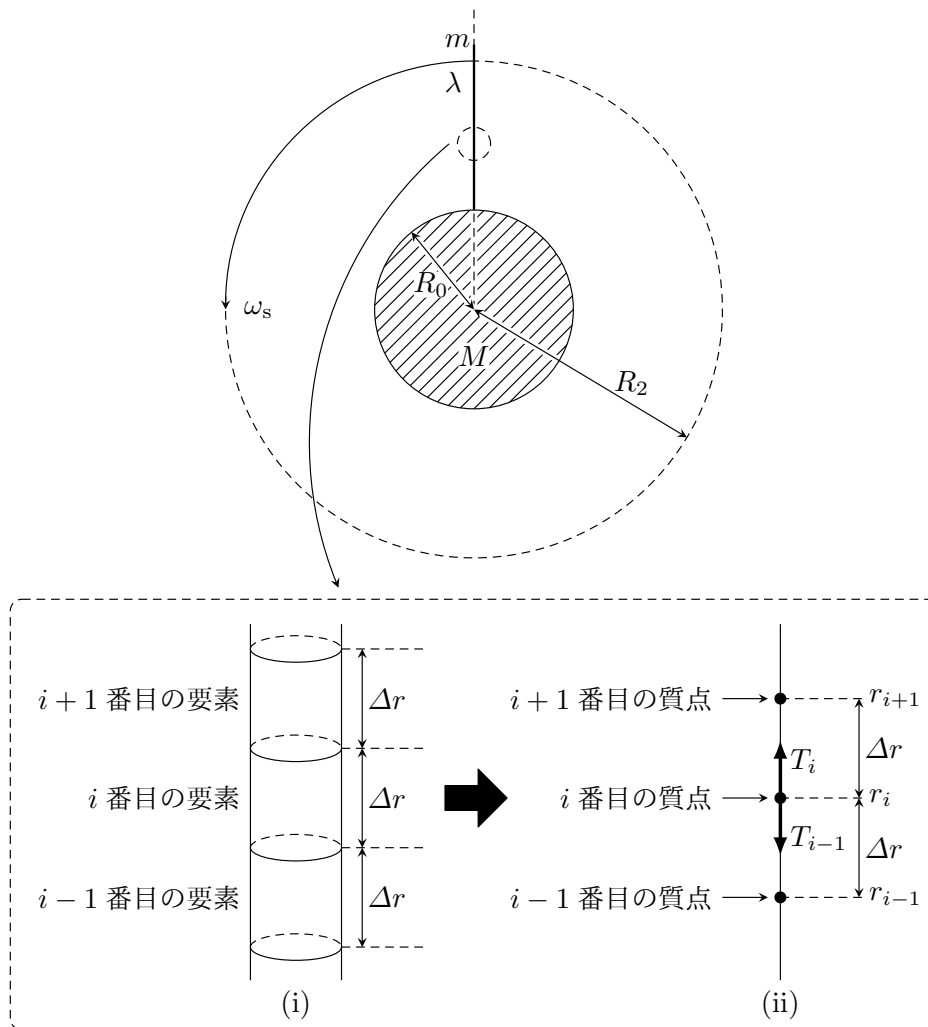


図 4

〔2〕 図1のように，発電所から遠方の電力の消費地へ，2本の送電線を用いて電力を送る場合を考える．送電線には長さに比例した電気抵抗（以降，抵抗という）がある．また，送電線を電極と考えると，平板電極の場合と同様に，並んだ2本の送電線はコンデンサーとして考えることができ，長さに比例した電気容量がある．これらの抵抗と電気容量は送電線に一樣に分布している．この電気容量があるため，送電線での消費電力は，送電線の抵抗だけでは決まらない．

そこで，この送電線での消費電力量を考えるため，図2に示すように抵抗は直列に合成して電線あたりに1個の抵抗とし，電気容量は並列に合成して送電線の消費地側の端に置かれた1つのコンデンサーとして近似する．これは，抵抗と電気容量が一樣に分布している実際の場合をよく近似している．合成した抵抗値をそれぞれ R [Ω]，コンデンサーの電気容量を C [F] とし，消費地では抵抗値 r [Ω] の抵抗で電力を消費しているものとする．発電所から角周波数 ω [rad/s] の正弦波の交流で送電する．ただし， $\omega > 0$ とする．消費地での電圧の最大値を V [V]，1周期で時間平均した消費電力（以降，時間平均消費電力という）を $\overline{P_A}$ [W] とする．なお， $\sin^2 \omega t$ や $\cos^2 \omega t$ の時間平均は $\frac{1}{2}$ であることを用いてよい．以下の問に答えよ．

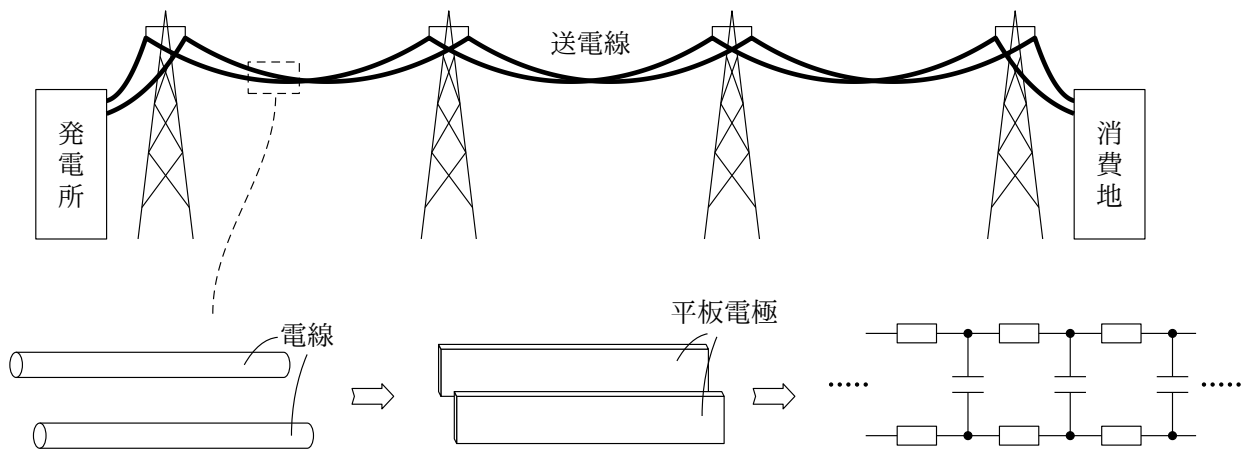


図1

- 問1 消費地での時刻 t での電圧を $v(t) = V \sin \omega t$ とする場合，時刻 t に消費地で消費する電力 $P_A(t)$ を， V ， r ， ω ， t を用いて表せ．
- 問2 図2の消費地の抵抗を流れる電流の最大値 I_r を， r を用いずに， V と，消費地での消費電力 $P_A(t)$ の時間平均消費電力 $\overline{P_A}$ を用いて求めよ．
- 問3 図2のコンデンサーを流れる電流の最大値 I_C を， ω ， C ， V を用いて求めよ．
- 問4 図2の消費地の抵抗を流れる電流とコンデンサーを流れる電流の位相は，図3のように $\frac{\pi}{2}$ 異

なっている．これらを合成した電流が送電線を通る．送電線を通る電流の最大値 I_R を， ω ， C ， V ， $\overline{P_A}$ を用いて求めよ．

問5 2本の送電線全体で消費する時間平均消費電力 $\overline{P_B}$ を， ω ， C ， V ， $\overline{P_A}$ ， R を用いて求めよ．

問6 $\overline{P_A}$ と ω と C を固定した場合に，送電線で消費する時間平均消費電力 $\overline{P_B}$ を最小にする V の値 V_{\min} と，そのときの $\overline{P_B}$ を， ω ， C ， $\overline{P_A}$ ， R のうち，必要なものを用いて表せ．ただし，相加相乗平均の不等式を用いてもよい．

問7 発電所から 100 km 離れた消費地での交流電圧の最大値が 500 kV になるように，60 Hz の正弦波の交流を送電する．送電線の抵抗は 1 km あたり 0.10Ω とする．送電線間の電気容量は 1 km あたりに $0.1 \mu\text{F}$ とし，図 2 のように 100 km 分合成して消費地側に集めて考えよう．消費地で 100 万 kW の時間平均消費電力を消費しているときの，2本の電線全体での時間平均消費電力に最も近いものを，以下の選択肢から選び，(あ)～(こ)の記号で答えよ．

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| (あ) 5 万 kW | (い) 10 万 kW | (う) 15 万 kW |
| (え) 20 万 kW | (お) 25 万 kW | (か) 30 万 kW |
| (き) 35 万 kW | (く) 40 万 kW | (け) 45 万 kW |

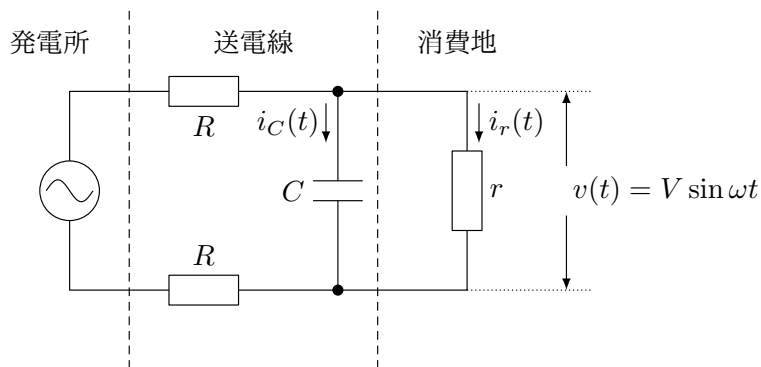


図 2

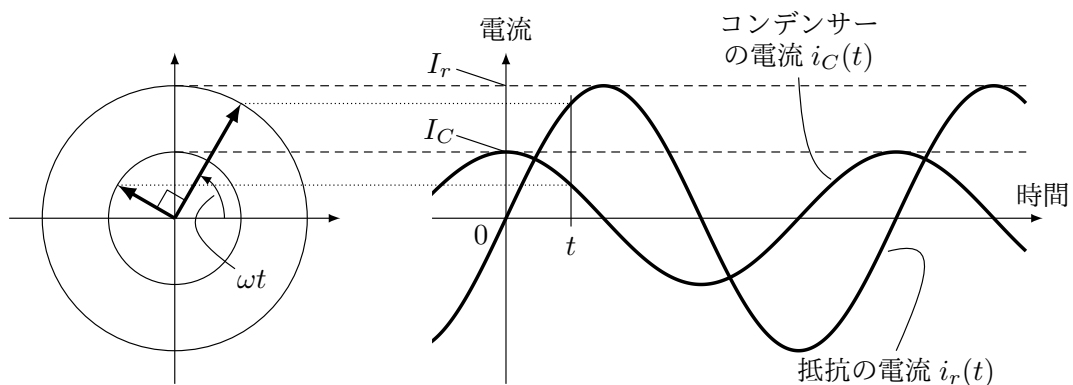


図 3

〔3〕 以下の **A** と **B** の両方の問題に解答せよ。なお **A** と **B** は独立した内容の問題である。

A. 空気が入ったゴム風船 (図 1 左) は、外からはたらく圧力や、温度に応じて、大きさが変わる。このふるまいを、以下のように単純化したモデルで考えよう。

図 1 の右のように断面積 S の固定されたシリンダー内に、なめらかに動くピストンがある。シリンダーの底面の位置を原点として、ピストンの位置を x ($x \geq 0$) とする。ピストンはシリンダーの底面とばねでつながれている。このばねは風船のゴムを模した仮想的なもので、その体積は無視できる。また、ばね定数は k ($k > 0$) であり、ピストンは、このばねから大きさ kx の力を x 軸の負の向きに受ける。以下、ピストンとシリンダーとばねを合わせたものを、装置とよぶ。シリンダーには n モルの単原子分子理想気体が入っており、シリンダーの外部は真空である。このピストンに対し、外力 F を作用させる。ただし、外力は図の矢印の向きを正とし、正負どちら向きにもかけられる。 F が負の場合、 F は大気中に置かれた風船に大気が外から及ぼす力を模している。また、気体と装置からなる系全体は常に一樣な温度であり、その温度 T は変化させることができる。ただし、装置の熱容量は無視できる。以下ではすべての操作を十分にゆっくりと行う。また気体定数を R とする。以下の問に答えよ。

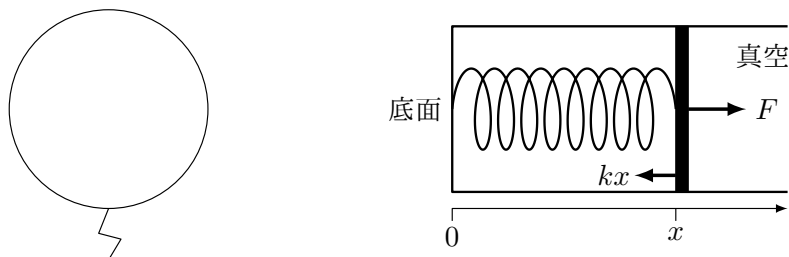


図 1

I. まず、ピストンを固定した場合を考える。

問 1 温度を T から $T + \Delta T$ に微小変化させたとき、気体に流入する熱量 ΔQ を求めよ。

II. 次に、ピストンを固定せず自由に動けるようにした場合を考える。ただし、外力は作用させず、 $F = 0$ とする。

問 2 温度 T において力がつりあい、ピストンが静止した場合の x を、 k , n , R , T を用いて表せ。

問 3 温度を T から $T + \Delta T$ に微小に変化させたとき、気体とばねからなる系全体に流入する熱量 ΔQ を求めよ。また、この結果を用いて、系全体の熱容量 C を求めよ。

III. さらに、ピストンを自由に動けるようにしたまま、外力 F を作用させる場合を考える。必要ならば、 $|X|$ が 1 より十分小さいとき、 a を正の実数として $(1+X)^a \doteq 1+aX$ 、 X が 1 より十分に大きいとき、 $(1+X)^a \doteq X^a$ と近似できることを用いよ。

問 4 温度 T 、外力 F の下でピストンが静止している場合の、ピストンの位置 x を求めよ。

問 5 問 4 の結果を図示しよう。 $F=0$ での x を x_0 とし、 $F_0 = kx_0$ とする。これらを用いて $\frac{x}{x_0}$ を $\frac{F}{F_0}$ だけの関数として表せ。次に、横軸を $\frac{F}{F_0}$ 、縦軸を $\frac{x}{x_0}$ として、その概形を解答用紙のグラフに図示せよ。

問 6 温度 T を一定に保ったまま、外力を F から $F + \Delta F$ まで微小に変化させたとき、ピストンの位置が x から $x + \Delta x$ まで微小に変化した。このとき、 $k_{\text{eff}} = \frac{\Delta F}{\Delta x}$ は気体とばねからなる系の、実効的なばね定数とみなせる。なお、 $\left| \frac{\Delta F}{F_0} \right|$ は 1 よりも十分に小さく、 $\frac{\Delta F}{F_0}$ の 2 次の項は無視してよい。

以下の場合について、比 $\frac{k_{\text{eff}}}{k}$ を求めよ。

- (a) $\frac{F}{F_0}$ が限りなく大きい場合
- (b) $\frac{F}{F_0} = 0$ の場合

B. 図2のように、電気的に中性の粒子 A と、それと比較して十分に軽い質量 M の荷電粒子 B があり、それらの間に、ある引力がはたらいっている物理系を考える。この引力によって、荷電粒子 B は中性粒子 A の周りを半径 r 、速さ v で等速円運動しているとする。その引力の大きさ F は、互いの距離に比例し

$$F = kr \quad (k > 0)$$

で表される。中性粒子 A は原点に静止していると考えてよい。重力の効果は無視する。

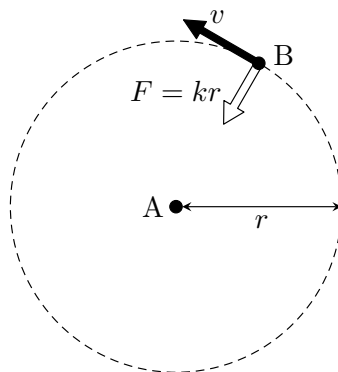


図2

問7 以下の文章の空欄 (a)~(h) に入るべき数式を解答欄に記入せよ。

この引力による荷電粒子の位置エネルギー U は、原点を基準点にとったとき、

$$U = \boxed{\text{(a)}}$$

と与えられる。一方、荷電粒子 B の回転の中心方向の運動方程式が、

$$\frac{Mv^2}{r} = \boxed{\text{(b)}}$$

と与えられることから、荷電粒子 B の運動エネルギー K も求まる。よって、この荷電粒子 B の力学的エネルギー $E = K + U$ は、 k と r を用いて

$$E = \boxed{\text{(c)}}$$

と表すことができる。

ド・ブロイによると、ミクロな世界では、粒子には波としての性質が現れ、その波長は粒子の運動量の大きさの逆数に比例する。今考えている物理系が原子と同程度に小さいとすると、荷電粒子 B にも波としての性質が現れてくる。この波の波長 λ_B は、プランク定数を h とおくと、 M 、 k 、 h 、 r を用いて

$$\lambda = \boxed{\text{(d)}}$$

で与えられる.

さて、ボーアの水素原子の理論の場合にならって、この物理系に量子条件と振動数条件を課すことを考えよう.

まず、次の量子条件を課す.

「荷電粒子 **B** の軌道の一周の長さが、波長 λ_B の自然数倍 (n 倍) である場合にのみ、定常状態 (定常波) が実現する」

この場合に、許される軌道の半径は、 n に対応した、とびとびの値をとる. これを r_n として、 M , k , h , n を用いて表すと、

$$r_n = \boxed{\text{(e)}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる. 結局、 n 番目の軌道を回る荷電粒子 **B** のもつ全エネルギー E_n は、 M , k , h , n を用いて、

$$E_n = \boxed{\text{(f)}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と与えられる.

さらに、この物理系において、次の振動数条件を課すとして.

「荷電粒子 **B** が ℓ 番目の定常状態から、エネルギーがより低い n 番目の定常状態に移る時に、格子 **1** 個が放出される」

この場合に、 ℓ と n の 2 つの定常状態の間のエネルギー差 $\Delta E_{\ell n} = E_{\ell} - E_n$ は、 M , k , h , n , ℓ を用いて、

$$\Delta E_{\ell n} = \boxed{\text{(g)}} \quad (\ell > n)$$

となるから、真空中での光の速さを c とすると、放出される光の波長 $\lambda_{\ell n}$ は、 M , k , n , ℓ , c を用いて

$$\lambda_{\ell n} = \boxed{\text{(h)}} \quad (\ell > n)$$

と与えられる.