〔１〕 等速円運動

【メモ】

・問 2，問 3，問 5 は等速円運動に関する問題．等速円運動は以下の式を連立．

$$\begin{cases} \text{運動方程式の中心成分} \\ \text{力のつりあい} \end{cases}$$

今回の問題は，中心方向以外に力ははたらいていないため，力のつりあいは考える必要がない．・問 4 は，非円軌道の万有引力の下での運動ゆえ，保存則を用いるほかない．

【解答】

問 1　速度の接線成分の式と 1 周に要する時間を考えて，

$$\begin{cases} v_{\mathrm{s}}T = 2\pi R_{\mathrm{s}}\,, \\ v_{\mathrm{s}} = R_{\mathrm{s}}\omega_{\mathrm{s}}\,, \end{cases} \qquad \therefore \omega_{\mathrm{s}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{24\times 60\times 60\,\mathrm{s}}$$

$$= 7.2...\times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s} \fallingdotseq \underline{7\times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}}\,.$$

問 2　運動方程式の中心成分より，

$$mR_{\mathrm{s}}{\omega_{\mathrm{s}}}^2 = G\frac{Mm}{{R_{\mathrm{s}}}^2}\,, \qquad \therefore R_{\mathrm{s}} = \underline{\left(\frac{GM}{{\omega_{\mathrm{s}}}^2}\right)^{\frac{1}{3}}}\,.$$

問 3　運動方程式の中心成分より，

$$mR_{\mathrm{s}}{\omega_{\mathrm{s}}}^2 = T + G\frac{Mm}{{R_{\mathrm{s}}}^2}\,, \qquad \therefore T = \underline{mR_1{\omega_{\mathrm{s}}}^2 - G\frac{Mm}{{R_1}^2}}\,.$$

問 4　無限遠で速さ（運動エネルギー）が 0 より大きければよい．力学的エネルギー保存則より，

$$K_\infty + 0 = \frac{1}{2}(r'\omega_{\mathrm{s}})^2 + \left(-G\frac{Mm}{r'}\right) > 0\,, \qquad \therefore r' > \underline{\left(\frac{2GM}{{\omega_{\mathrm{s}}}^2}\right)^{\frac{1}{3}}}\,.$$

問 5　運動方程式の中心成分より，

$$\varDelta m r_i{\omega_{\mathrm{s}}}^2 = F_i + G\frac{M\varDelta m}{{r_i}^2}\,, \qquad \therefore F_i = \underbrace{\varDelta m r_i{\omega_{\mathrm{s}}}^2 - G\frac{M\varDelta m}{{r_i}^2}}_{\text{(a)}}\,.$$

ここで，図 4(i) より，

$$\varDelta m = \underbrace{\lambda\varDelta r}_{\text{(b)}}$$

ゆえ,

$$
\begin{aligned}
F &= \sum_{i=1}^{N}\left(\lambda r_i {\omega_\mathrm{s}}^2 \mathit{\Delta} r - G\frac{Mm}{{r_i}^2}\mathit{\Delta} r\right) \\
&\fallingdotseq -GM\lambda({R_2}^{-1} - {R_0}^{-1}) - \frac{1}{2}\lambda {\omega_\mathrm{s}}^2({R_2}^2 - {R_0}^2) \\
&= \underbrace{\frac{R_2 - R_0}{R_2 R_0}GM\lambda\left\{1 - \frac{{\omega_\mathrm{s}}^2}{2GM}R_2 R_0(R_2 + R_0)\right\}}_{\text{(c)}} .
\end{aligned}
$$

また，F_i の定義より，

$$
F = \sum_{i=1}^{N}(T_i - T_{i-1}) = T_N - T_0 = \underbrace{0}_{\text{(d)}} .
$$

問 6　　$F = 0$ より，$R_2 \neq R_0$ ゆえ，

$$
\begin{aligned}
\frac{R_2 - R_0}{R_2 R_0}GM\lambda\left\{1 - \frac{{\omega_\mathrm{s}}^2}{2GM}R_2 R_0(R_2 + R_0)\right\} &= 0 \\
R_2 R_0(R_2 + R_0) &= 2{R_\mathrm{s}}^3 \\
\left(\frac{R_2}{R_0}\right)^2 + \frac{R_2}{R_0} - 2\left(\frac{R_\mathrm{s}}{R_0}\right)^3 &= 0 \\
\therefore \frac{R_\mathrm{s}}{R_0} &= -\frac{1}{2}\left\{-1 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{R_\mathrm{s}}{R_0}\right)}\right\} .
\end{aligned}
$$

また，$R_\mathrm{s} = 7R_0$ では，

$$
\frac{R_2}{R_0} = -\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 8\cdot 7^2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2745} - 1) \fallingdotseq \frac{1}{2}(52 - 1) \fallingdotseq 25.5 .
$$

よって，(え).

〔２〕 電気回路

【メモ】

・問 1，問 3 は電気回路の状態決定に関する問題．電気回路の状態は，以下の 3 つで一意に決まる．

$$
\begin{cases}
\text{キルヒホッフ則} \\
\text{電荷保存則} \\
\text{素子の性質}
\end{cases}
$$

・問 4 は交流回路のうち，異種の素子が 2 つ以上直列となった交流回路に関する問題で，この場合，電流を $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \theta)$ のように振幅の未知量 I_0 と位相の未知量 θ を仮定し，この $I(t)$ をキルヒホッフ則に代入することで I_0，θ を決定する[*1]． ・問 2，問 4 は時間平均に関する問題．以下の時間平均の値は，覚えておくのが良い（忘れてしまったときのために，定義もセット覚えておくのが一番良い）．

$$
\overline{\sin(\omega t)} = \overline{\cos(\omega t)} = 0\,,\quad \overline{\sin^2(\omega t)} = \overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2}\,.
$$

【解答】

問 1　消費地の抵抗に流れる電流 i_r はキルヒホッフ則より，

$$
ri_\mathrm{r}(t) = v(t)\,, \qquad \therefore i_\mathrm{r}(t) = \frac{V}{r}\sin(\omega t)\,.
$$

よって，消費電力（単位時間に生じるジュール熱）は，

$$
P_\mathrm{A} = r\{i_\mathrm{r}(t)\}^2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{V^2}{r}\sin^2(\omega t)}\,.
$$

問 2　消費電力の時間平均は，

$$
\overline{P_\mathrm{A}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V^2}{r}\sin^2(\omega t)\,dt = \frac{V^2}{2r}\frac{1}{T}\left[t - \frac{1}{\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T = \frac{V^2}{2r}
$$

$$
\therefore r = \frac{V^2}{2\overline{P_\mathrm{A}}}\,.
$$

よって，問 1 より，

$$
I_\mathrm{r} = \frac{V}{r} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2\overline{P_\mathrm{A}}}{V}}\,.
$$

問 3　キルヒホッフ則より，

$$
0 = v(t) - \frac{Q(t)}{C}\,, \qquad \therefore i_\mathrm{C}(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \omega CV\cos(\omega t)\,.
$$

[*1] 電流ではなく，電位差を $V = V_0\sin(\omega t + \theta)$ のように仮定する誘導もある．

よって，振幅は，

$$I_C = \underset{\sim\sim\sim}{\omega CV}\,.$$

問 4　分岐点における電荷保存則（キルヒホッフ第 1 法則）より，

$$\begin{aligned} I(t) &= i_r(t) + i_C(t) \\ &= \frac{V^2}{r}\sin^2(\omega t) + \omega CV\cos(\omega t) \\ &= \sqrt{(\omega CV)^2 + \left(\frac{V}{r}\right)^2}\sin(\omega t + \theta) \\ &= \sqrt{(\omega CV)^2 + \left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)^2}\sin(\omega t + \theta)\,. \end{aligned}$$

ここで，$\tan\theta = r\omega C$ である．よって，振幅は，

$$I_R = \underline{\sqrt{(\omega CV)^2 + \left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)^2}}\,.$$

問 5　送電線における消費電力は，

$$P_B = R\{I(t)\}^2 \times 2 = 2R\left\{(\omega CV)^2 + \left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)^2\right\}\sin^2(\omega t)\,.$$

よって，時間平均は，

$$\overline{P_B} = 2R\left\{(\omega CV)^2 + \left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)^2\right\}\overline{\sin^2(\omega t)} = \underline{R\left\{(\omega CV)^2 + \left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)^2\right\}}\,.$$

問 6　問 5 より，

$$\overline{P_B} = R\left\{(\omega CV)^2 + \left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)^2\right\} \geq 2R\sqrt{(\omega CV)^2\left(\frac{2\overline{P_A}}{V}\right)} = \underline{4\omega CR\overline{P_A}}\,.$$

また，等号成立時は，

$$(\omega CV_{\mathrm{min}})^2 = \left(\frac{2\overline{P_A}}{V_{\mathrm{min}}}\right)^2, \qquad \therefore V_{\mathrm{min}} = \underline{\sqrt{\frac{2\overline{P_A}}{\omega C}}}\,.$$

問 7　1 km で 0.10 Ω より $R = 10\,\Omega$，$C = 10\,\mu\mathrm{F}$ であり，$V = 5\times10^5\,\mathrm{V}$，$\omega = 2\pi f = 120\pi\,/\mathrm{s}$,

$\overline{P_{\mathrm{A}}} = 1 \times 10^{9}\,\mathrm{W}$ より，

$$\begin{aligned}\overline{P_{\mathrm{B}}} &= 10 \times \left\{ (120\pi\,/\mathrm{s} \times 10 \times 10^{-6}\,\mu\mathrm{F} \times 5 \times 10^{5}\,\mathrm{V})^{2} + \left(\frac{2 \times 1 \times 10^{9}\,\mathrm{W}}{5 \times 10^{5}\,\mathrm{V}} \right)^{2} \right\} \\ &= 36\pi^{2} \times 10^{5} + 16 \times 10^{7} \\ &\fallingdotseq 36 \times 10^{6} + 16 \times 10^{7} \\ &= 19.6 \times 10^{6} \\ &\fallingdotseq 2 \times 10^{5}\mathrm{kW}\,.\end{aligned}$$

よって，(え).

〔３〕 **A**：熱力学の基本処理

【メモ】

・問 1〜問 4 は，熱力学の基本処理（熱が絡むゆっくりとした過程）に関する問題．この過程の定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算する．

【解答】

問 1　体積一定より気体が外部にする仕事は 0．よって，熱力学第 1 法則より，

$$\Delta Q = \Delta U + W = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}nR\Delta T}\,.$$

問 2　ピストンのつりあい，および状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = PS - kx\,, \\ PSx = nRT\,, \end{cases} \qquad \therefore\ x = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{nRT}{k}}}\,,\quad P = \frac{1}{S}\sqrt{knRT}\,.$$

問 3　気体の温度が $T + \Delta T$ のときのピストンを位置 X とし，このときの気体の圧力を P とする．ピストンのつりあい，および状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = PS - kX\,, \\ PSX = nR(T+\Delta T)\,, \end{cases} \qquad \therefore\ X = \sqrt{\frac{nR}{k}(T+\Delta T)}\,,\quad P = \frac{1}{S}\sqrt{knR(T+\Delta T)}\,.$$

この間の内部エネルギー変化 ΔU は公式より，

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T\,.$$

気体が外部にした仕事は $P-V$ 図より，

$$W = \frac{1}{2}k(X^2 - x^2) = \frac{1}{2}nR\Delta T\,.$$

よって，熱力学第 1 法則より，

$$\Delta Q = \Delta U + W = 2nR\Delta T\,.$$

熱容量はその定義より，

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \underset{\sim\sim}{2nR}\,.$$

問 4　ピストンのつりあい，および状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = PS - kx + F\,, \\ PSx = nRT\,, \end{cases}$$

$$\therefore x = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{F}{2k}\left(1+\sqrt{1+\frac{4knRT}{F^2}}\right)}, \quad P = \frac{F}{2S}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4knRT}{F^2}}\right).$$

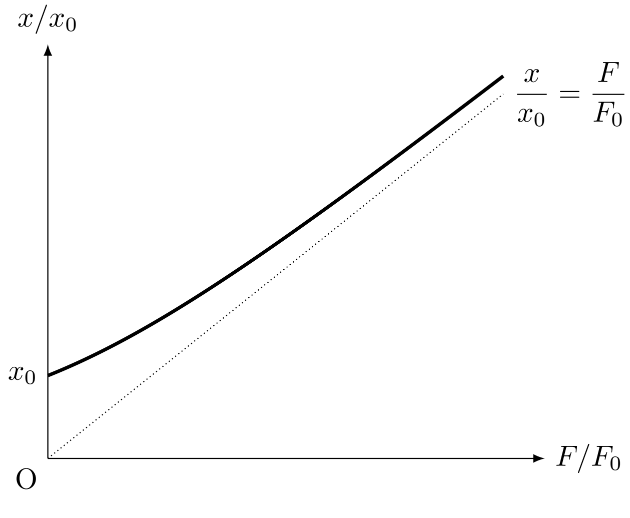
問 5　$F=0$ のとき（問 2 の状況），

$$x_0 = \sqrt{\frac{nRT}{k}}, \quad F_0 = kx_0 = \sqrt{knRT}$$

であり，問 4 より，

$$\frac{x}{x_0} = \sqrt{\frac{k}{nRT}}\,\frac{F}{2k}\left(1+\sqrt{1+\frac{4knRT}{F^2}}\right) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{F}{2F_0}+\sqrt{\left(\frac{F}{2F_0}\right)^2+1}}\,.$$

$\dfrac{x}{x_0}$ は，$\dfrac{F}{2F_0} \to \infty$ の下では $\dfrac{F}{F_0}$ に漸近し，グラフは以下のようになる．



問 6　問 5 より，$F \to F + \varDelta F$ の下では，

$$
\begin{aligned}
\frac{x+\varDelta x}{x_0} &= \frac{F+\varDelta F}{2F_0} + \sqrt{\left(\frac{F+\varDelta F}{2F_0}\right)^2} \\
&\fallingdotseq \frac{F+\varDelta F}{2F_0} + \sqrt{1+\left(\frac{F}{2F_0}\right)^2 + \frac{F}{2F_0}\frac{\varDelta F}{F_0}} \\
&= \frac{F+\varDelta F}{2F_0} + \sqrt{1+\left(\frac{F}{2F_0}\right)^2}\sqrt{1+\frac{F/2F_0}{1+(F/2F_0)^2}\frac{\varDelta F}{F_0}} \\
&\fallingdotseq \frac{F+\varDelta F}{2F_0} + \sqrt{1+\left(\frac{F}{2F_0}\right)^2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{F/2F_0}{\sqrt{1+(F/2F_0)^2}}\frac{\varDelta F}{F_0}\right) \\
\therefore\ \frac{\varDelta x}{x_0} &= \frac{\varDelta F}{2F_0} + \frac{1}{2}\frac{F/2F_0}{\sqrt{1+(F/2F_0)^2}}\frac{\varDelta F}{F_0}\,.
\end{aligned}
$$

（a）　F/F_0 が十分大きいとき，

$$
\begin{aligned}
\frac{\varDelta x}{x_0} &= \frac{\varDelta F}{2F_0} + \frac{1}{2}\frac{F/2F_0}{\sqrt{1+(F/2F_0)^2}}\frac{\varDelta F}{F_0} \\
&= \frac{\varDelta F}{2F_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(2F_0/F)^2+1}}\frac{\varDelta F}{F_0} \\
&\fallingdotseq \frac{\varDelta F}{2F_0} + \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{\varDelta F}{F_0} \\
&= \frac{\varDelta F}{F_0}\,.
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\frac{k_{\mathrm{eff}}}{k} = \frac{\varDelta F/\varDelta x}{F_0/x_0} = \underset{\sim}{1}\,.
$$

（b）　$F/F_0 = 0$ のとき，

$$
\frac{\varDelta x}{x_0} = \frac{\varDelta F}{2F_0} + \frac{1}{2}\frac{0}{\sqrt{1+0}}\frac{\varDelta F}{F_0} = \frac{\varDelta F}{2F_0}\,.
$$

よって，

$$
\frac{k_{\mathrm{eff}}}{k} = \frac{\varDelta F/\varDelta x}{F_0/x_0} = \underset{\sim}{2}\,.
$$

【補足】問 6 について

問 5 より，

$$
\frac{x}{x_0} = \frac{F}{2F_0} + \sqrt{\left(\frac{F}{2F_0}\right)^2 + 1}
$$

であり，$F/F_0 \to \infty$ では，

$$\frac{x}{x_0} = \frac{F}{2F_0} + \frac{F}{2F_0}\sqrt{1+\left(\frac{2F_0}{F}\right)^2} \fallingdotseq \frac{F}{F_0}$$

と F/F_0 に漸近する．

さて，$F=0$ での x の微分係数は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_0}\frac{dx}{dF} &= \frac{d}{dF}\left\{\frac{F}{2F_0} + \sqrt{\left(\frac{F}{2F_0}\right)^2 + 1}\right\} \\ &= \frac{1}{2F_0}\left(1 + \frac{F/2F_0}{\sqrt{(F/2F_0)^2+1}}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{x_0}\left.\frac{dx}{dF}\right|_{F=0} = \frac{1}{2F_0}\,.$$

ここで，$\dfrac{dF}{dx} = \left(\dfrac{dx}{dF}\right)^{-1}$ より，

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{2F_0}{x_0}\,.$$

以上から，

$$\frac{k_{\mathrm{eff}}}{k} = \frac{dF/dx}{F_0/x_0} = 2\,.$$

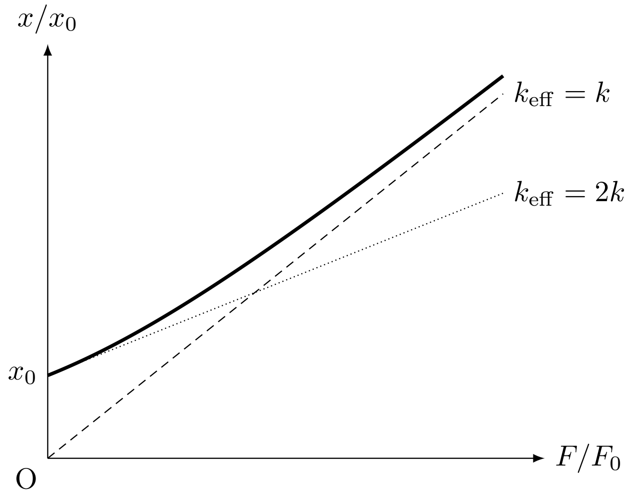
また，$F \to \infty$ での x の微分係数は，

$$\frac{1}{x_0}\left.\frac{dx}{dF}\right|_{F=\infty} = \frac{1}{F_0}$$

ゆえ，同様にして，

$$\frac{k_{\mathrm{eff}}}{k} = \frac{dF/dx}{F_0/x_0} = 1\,.$$

これは，問 5 のグラフの $F=0$，$F\to\infty$ おける接線の傾きの逆数を計算していることに相当する．



B：ボーアの原子モデル

【メモ】

・ボーアの原子モデルは，

$$\begin{cases} \text{運動方程式の中心成分} \\ \text{量子条件} \end{cases}$$

によって，r_n または v_n が決まる．この結果を利用してエネルギー準位が定まる．

・電子が異なる軌道の間を遷移する際，エネルギー準位の差に等しいエネルギーを持つ 1 個の光子がやりとりされる（振動数条件）．

【解答】

問 1　始状態での荷電粒子の位置を $r=r$ とし，$r=r$ での荷電粒子の速さを v，$r=R$ での荷電粒子の速さを V とする．荷電粒子のエネルギー収支より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mV^2-\frac{1}{2}mv^2&=\int_r^R(-kr)\,dr\\&=-\frac{1}{2}kR^2+\frac{1}{2}kr^2\\ \therefore\ \frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}kR^2&=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kr^2.\end{aligned}$$

よって，両辺第 2 項をこの引力による位置エネルギーと見なし，$r=0$ で $U=0$ となるようにすれば，

$$U=\underbrace{\frac{1}{2}kr^2}_{\text{(a)}}.$$

運動方程式の中心成分より，

$$M\frac{v^2}{r}=\underbrace{kr}_{\text{(b)}}.$$

系の力学的エネルギーは，

$$E=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}kr^2=\frac{1}{2}kr^2+\frac{1}{2}kr^2=\underbrace{kr^2}_{\text{(c)}}.$$

物質波の波長は，公式より，

$$\lambda_{\mathrm{B}}=\frac{h}{Mv}=\underbrace{\frac{h}{\sqrt{kM}}\frac{1}{r}}_{\text{(d)}}.$$

ボーアの量子条件より，

$$mr_nv_n = n\frac{h}{2\pi}\,, \qquad \therefore r_n = \underline{\sqrt{\frac{h}{2\pi\sqrt{kM}}n}}_{\text{(e)}} \quad .$$

よって，量子数 n に対応するエネルギー準位 E_n は，

$$E_n = k{r_n}^2 = \underline{\frac{h}{2\pi\sqrt{kM}}n}_{\text{(f)}} \quad .$$

ここで，エネルギー準位の差は，

$$\varDelta E_{\ell n} = E_\ell - E_n = \underline{\frac{h}{2\pi\sqrt{kM}}(\ell - n)}_{\text{(g)}}$$

であり，振動数条件から，

$$\frac{hc}{\lambda_{\ell n}} = \frac{h}{2\pi\sqrt{kM}}(\ell - n)\,, \qquad \therefore \lambda_{\ell n} = \underline{\frac{2\pi c}{\ell - n}\sqrt{\frac{M}{k}}}_{\text{(h)}} \quad .$$

【補足】位置エネルギーは以下のように計算しても構わない

力 $\vec{f}$ に対して，以下の積分の値がその積分路によらず一意に決まるとき，U を $\vec{f}$ による位置エネルギーと呼ぶ（$\vec{r} = (x, y, z)$ は位置ベクトル）．

$$U(\vec{r}) = -\int_{\text{基準点}}^{\vec{r}} \vec{f}\cdot d\vec{r} = -\int_{\text{基準点}}^{\vec{r}} (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz)\,.$$

さて，今の場合，A から B に向かう向きに r 軸を定めれば（A を原点とする），基準点は $r = 0$ であり，r 軸負の向きに大きさ kr の力がはたらく．上記の式通りに計算すれば，

$$U = -\int_0^r (-kr)\,dr = \frac{1}{2}kr^2\,.$$