

〔 1 〕 単振動の時間追跡（単振り子）、動く座標系、複数物体系

【メモ】

・問 2, 問 4, 問 5, 問 6 は, 単振動の時間追跡に関する設問. 単振動の微分方程式は, f は t の関数とし, ω は角振動数, f_c は振動中心として以下の通り.

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2(f - f_c).$$

ここで, f が上記の微分方程式を満たすとき, f は以下の形に限られる (C, D は初期条件から決まる定数).

$$f = f_c + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t).$$

・問 4, 問 5, 問 6 は動く座標系に関する設問 (上記で触れたように単振動も含む). 加速度 \vec{a} で運動する座標系内部では, 加速度 \vec{a} の向きと逆向きに慣性力 (架空の力) $m\vec{a}$ が生じているように見える.
 ・問 7, 問 8 は複数物体系の問題. 複数物体系は, 以下の 2 式連立が基本*¹.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{外力のない方向成分の運動量保存則} \\ \text{全体の力学的エネルギー保存則} \end{array} \right.$$

【解答】

問 1 運動方程式は,

$$\left\{ \begin{array}{l} ma_x = \underbrace{-S \sin \theta}_{(a)}, \\ ma_y = \underbrace{S \cos \theta - mg}_{(b)}. \end{array} \right.$$

問 2 三角関数を θ の 1 次まで近似すれば,

$$x = \ell \sin \theta \doteq \ell \theta, \quad y = -\ell \cos \theta \doteq 0.$$

すなわち, 加速度の各成分は $a_x = \ddot{x} = \ell \ddot{\theta}$, $a_y = \ddot{y} = 0$ であり, 運動方程式から,

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ell \ddot{\theta} \doteq -S\theta, \\ m \cdot 0 = S - mg, \end{array} \right. \quad \therefore \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \theta$$

を得る. 以上より, この近似的な単振動の周期 T は,

$$T = 2\pi \sqrt{\underbrace{\frac{\ell}{g}}}$$

*¹ 束縛条件が単純な場合 (三角台など) や, 基本的な計算に帰着できる特別な場合 (ばね連結 2 物体など) は運動方程式での誘導が付くことも多い. また, 相対運動や重心系での運動を円運動に帰着させる問題もある.

問3 半周期後の B の位置 x , および速度 v は,

$$\begin{cases} x = 0 + 0 \cdot \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\alpha T^2, \\ v = 0 + \alpha \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\alpha T. \end{cases}$$

よって, 時刻 T における物体の位置 x_1 , および速度 v_1 は,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}\alpha T^2 + \frac{1}{2}\alpha T \frac{T}{2} + \frac{1}{2}(-\alpha) \left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\alpha T^2, \\ v_1 = \frac{1}{2}\alpha T - \alpha \frac{T}{2} = 0. \end{cases}$$

以上から, 1 周期毎に $\frac{1}{4}\alpha T^2$ 変位するので,

$$x_n = \frac{\alpha T^2}{4} n.$$

問4 $0 < t < T/2$ では, A とともに動く座標系から観測した B には, x 方向に $\underbrace{-ma}_{(c)}$ の慣性力がはたらく. このとき, A とともに動く座標系内での B の運動方程式より, A に対する B の相対位置を $x_{\text{rel}} = x - X = \ell \sin \theta$ とすると (A の位置を X , B の位置を x と記した),

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{\text{rel}} &= -mg \sin \theta - m\alpha \cos \theta \\ m\ell\ddot{\theta} &= -mg\theta - m\alpha \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{\ell} \left(\theta + \frac{\alpha}{g} \right). \end{aligned}$$

よって, θ は $\theta = -\frac{\alpha}{g}$ を振動中心とした単振動をすることが分かり, 物体 A とともに動く座標系での B の位置 x_{rel} に直せば,

$$x_{\text{rel}} = \ell\theta = -\frac{\alpha}{\underbrace{g}_{(d)}} \ell.$$

以上から, 時刻 t ($0 < t < T/2$) における θ は, 初期条件 $\theta = 0, \omega = \dot{\theta} = 0$ を考慮すれば,

$$\theta = -\frac{\alpha}{g} + \frac{\alpha}{g} \cos \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right)$$

と求まり, $t = \frac{T}{2}$ における角度 θ は*2,

$$\theta = -\frac{2\alpha}{\underbrace{g}_{(e)}}.$$

*2 初期位置 $\theta = 0$, 振動中心 $\theta = -\frac{\alpha}{g}$ より振幅が $\frac{\alpha}{g}$ と求まり, 運動の様子を図示したりして (イメージすることで) 求めてもよい.

問5 $T/2 < t < T$ では, A とともに動く座標系内での B の運動方程式より,

$$m\ddot{x}_{\text{rel}} = -mg \sin \theta + m\alpha \cos \theta$$

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\theta + m\alpha$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \left(\theta - \frac{\alpha}{g} \right)$$

となり, 振動中心 $\theta = \frac{\alpha}{g}$ で単振動をすることが分かる. $t = \frac{T}{2}$ で $\theta = -\frac{2\alpha}{g}$ より, θ は振幅が $\frac{3\alpha}{g}$ の単振動を行うので,

$$\theta_1 = \frac{\alpha}{g} + \frac{3\alpha}{g} = \frac{4\alpha}{g}.$$

以上から, 1 周期毎に $\frac{4\alpha}{g}$ 回転角が増加するので,

$$\theta_n = \frac{4\alpha}{g} n.$$

問6 問4 で求めた θ に $t = \frac{T}{6}$ を代入して,

$$\theta = -\frac{\alpha}{g} + \frac{\alpha}{g} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\alpha}{2g}.$$

A の x 方向, および B の鉛直方向 (1 次近似して $\ddot{y} = 0$) の運動方程式より,

$$\begin{cases} M\alpha = F_{\text{ex}} + S \sin \theta \doteq F_{\text{ex}} + S\theta, \\ m \cdot 0 = S \cos \theta - mg \doteq S - mg, \end{cases} \quad \therefore F_{\text{ex}} = M\alpha - mg\theta = M\alpha - mg \left(-\frac{\alpha}{2g} \right) \\ = \left(M + \frac{1}{2}m \right) \alpha.$$

問7 束縛条件は,

$$\begin{cases} x - X = \ell \sin \theta, \\ Y - y = \ell \cos \theta, \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} v_x - V = \ell \dot{\theta} \cos \theta, \\ 0 - v_y = -\ell \dot{\theta} \sin \theta. \end{cases}$$

B が最高点に達したとき, $v_y = 0$ より, $\dot{\theta} = 0$ となり, $v_x = V$ を得る. A, B, 重力場 (と糸) からなる系の運動量保存則 (x 成分), および力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases} mv_x + MV = mv_0, \\ \frac{1}{2}m(v_x^2 + 0^2) + \frac{1}{2}Mv^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_0^2, \\ v_x = V \end{cases} \\ \therefore V = v_x = \frac{m}{M+m}v_0, \quad H = \frac{Mv_0^2}{2(M+m)g}.$$

問8 前問の解答に示した.

【補足1】問3, 問5を漸化式を立てて解く

n 回目に加速度が α となつてから半周期後の B の位置 x_n^* , および速度 v_n^* は,

$$\begin{cases} x_n^* = x_{n-1} + v_{n-1} \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{T}{2} \right)^2, \\ v_n^* = v_{n-1} + \alpha \frac{T}{2}, \end{cases}$$

であり, n 回目に加速度が $-\alpha$ となつた瞬間の B の位置 x_n , および速度 v_n は,

$$\begin{cases} x_n = x_n^* + v_n^* \frac{T}{2} - \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{T}{2} \right)^2, \\ v_n = v_n^* - \alpha \frac{T}{2}. \end{cases}$$

ここで, 速度に関する漸化式から, $v_1^* = \frac{\alpha T}{2}$ より $v_n^* = \frac{\alpha T}{2}$, $v_n = 0$ であり,

$$\begin{cases} x_n^* = x_{n-1} + \frac{1}{8} \alpha T^2, \\ x_n = x_n^* + \frac{1}{8} \alpha T^2, \end{cases} \quad \therefore x_n = x_{n-1} + \frac{1}{4} \alpha T^2 = \frac{\alpha T^2}{4} n.$$

続いて θ は, A の加速度の向きが変わるごとに振動中心が $\frac{\alpha}{g}$ と $-\frac{\alpha}{g}$ で変化するので, 半周期毎に振幅は $\frac{2\alpha}{g}$ 増加する. すなわち, 1 周期では $\frac{4\alpha}{g}$ だけ振幅は増加し, n 回目の振幅は,

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \frac{4\alpha}{g} = \theta_{n-2} + \frac{4\alpha}{g} \times 2 = \dots = \theta_0 + \frac{4\alpha}{g} n = \frac{4\alpha}{g} n.$$

【補足2】問7, 問8の保存則について

物体 A に関する物理量を大文字, B に関する物理量を小文字で記す. 各物体の運動方程式は, 張力の大きさを T として,

$$\begin{cases} M \frac{dV}{dt} = T \sin \theta, \\ m \frac{dv_x}{dt} = -T \sin \theta, \\ m \frac{dv_y}{dt} = T \cos \theta - mg. \end{cases}$$

また, 束縛条件は,

$$\begin{cases} x - X = \ell \sin \theta, \\ Y - y = \ell \cos \theta, \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} v_x - V = \ell \dot{\theta} \cos \theta, \\ 0 - v_y = -\ell \dot{\theta} \sin \theta. \end{cases}$$

なお, 速度の束縛条件から以下の恒等式が成り立つ.

$$(v_x - V) \sin \theta + v_y \cos \theta = 0.$$

さて、運動方程式の x 成分に関する 2 式の和を取ると、

$$M \frac{dV}{dt} + m \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(MV + mv_x) = 0, \quad \therefore MV + mv_x = \text{const} = mv_0.$$

これは x 方向の運動量保存則を示す。

続いて、運動方程式にそれぞれに対応する速度成分をかけて和を取れば、

$$MV \frac{dV}{dt} + mv_x \frac{dv_x}{dt} + mv_y \frac{dv_y}{dt} = T\{(V - v_x) \sin \theta + v_y \cos \theta\} - mgv_y$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}M(V^2 + 0^2) + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mgy \right\} = T\{(V - v_x) \sin \theta + v_y \cos \theta\}.$$

ここで、束縛条件より、張力の仕事率は 0 に相殺し、

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}M(V^2 + 0^2) + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mgy \right\} = 0$$

$$\therefore \underbrace{\frac{1}{2}M(V^2 + 0^2)}_{\text{物体 A}} + \underbrace{\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)}_{\text{物体 B}} + \underbrace{mgy}_{\text{重力場}} = \text{const} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

〔2〕 電気回路

【メモ】

・電気回路は、以下の3つで一意に決まる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{array} \right.$$

・問4は例外素子に関する問題。例外素子は、問題文で素子の性質の関数形を与えるか、グラフ（特性曲線）を与えるか、のどちらかとなる。本問では、グラフで与えられたため、グラフ上で連立方程式を解く。

・問5以降は、異種の素子が2つ以上直列となった交流回路の問題。異種の素子が2個以上直列となった場合の交流回路は、電流を $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \theta)$ のように振幅の未知量 I_0 と位相の未知量 θ を仮定し、この $I(t)$ をキルヒホッフ則に代入することで I_0 , θ を決定する*3。

【解答】

問1 キルヒホッフ則より、

$$\left\{ \begin{array}{l} E - R_1 I_1 - R_2 I_1 = 0, \\ E - R_3 I_2 - R_4 I_2 = 0, \\ -R_1 I_1 + R_3 I_2 = 0, \end{array} \right. \quad I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = \frac{E}{R_3 + R_4}, \quad R_2 R_3 = R_1 R_4.$$

よって、

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E, \quad V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E, \quad \therefore \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{\underbrace{R_1}}.$$

問2 前問の結果（キルヒホッフ則）より、

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{\underbrace{R_1}}.$$

問3 キルヒホッフ則より、

$$E - V_X - R_2 I_X = 0, \quad \therefore I_X = -\frac{1}{\underbrace{R_2}} (V_X - E).$$

問4 (a) 前問の式に与えられた数値を代入して、

$$I_X = -V_X + 4.$$

*3 電流ではなく、電位差を $V = V_0 \sin(\omega t + \theta)$ のように仮定する誘導もある。

このキルヒホッフ則の式と電球の素子の性質（特性曲線）を（グラフ上で）連立して、

$$V_X = \underline{1.2\text{V}}, \quad I_X = 2.8\text{A}.$$

また、キルヒホッフ則より、

$$\begin{cases} 4 - V_X - I_X = 0, \\ 4 - 2I_Y - V_Y = 0, \\ -V_X + 2I_Y = 0. \end{cases}$$

であり、ここに $V_X = 1.2\text{V}$ を代入して、

$$V_Y = \underline{2.8\text{V}}.$$

(b) キルヒホッフ則より、

$$\begin{cases} I_X = -V_X + 4, \\ I_Y = -\frac{1}{2}V_Y + 2 \end{cases}$$

をグラフ上に図示してその交点を読む。 V_Y の値の最大値は 2V であるから、 $V_X + V_Y = 4\text{V}$ を満たすような交点の組み合わせとして V_X は (う) か (え) しかあり得ず、このうち V_X が (え)、 V_Y が (う) のときのみ 2 つの和が 4V となる。よって、 V_X は (う)、 V_Y は (え) である。

問5 素子の性質より、

$$V_5 = \underbrace{RI_5 \cos(\omega t - \phi)}_{(a)}, \quad V_L = L \frac{dI_5(t)}{dt} = \underbrace{-L\omega I_5 \sin(\omega t - \phi)}_{(b)}.$$

よって、キルヒホッフ則より、

$$\begin{aligned} E_0 \cos(\omega t) &= RI_5 \cos(\omega t - \phi) - L\omega I_5 \sin(\omega t - \phi) \\ &= I_5 \left\{ \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos(\omega t - \phi) - \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \phi) \right\} \\ &= I_5 \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \cos(\omega t - \phi + \theta). \end{aligned}$$

ここで、 θ は $\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$ 、 $\sin \theta = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$ を満たす定数である。この式が任意の時刻 t で成立するためには、三角関数の振幅と位相が等しければよく、

$$I_5 = \frac{E_0}{\underbrace{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}_{(c)}}, \quad \tan \phi = \tan \theta = \frac{L\omega}{\underbrace{R}_{(d)}}.$$

問6 キルヒホッフ則より、

$$0 = -\frac{Q}{C} + RI_5 \cos(\omega t - \phi), \quad \therefore I_C(t) = \frac{dQ}{dt} = \underbrace{-C\omega RI_5 \sin(\omega t - \phi)}.$$

問7 キルヒホッフ則より,

$$0 = -L \frac{dI_5(t)}{dt} + RI_C \sin(\omega t - \phi)$$
$$L\omega I_5 \sin(\omega t - \phi) = C\omega R^2 I_5 \sin(\omega t - \phi), \quad \therefore C = \frac{L}{\underbrace{R^2}}.$$

〔3〕 A：熱力学の基本処理，断熱過程，系の見方

【メモ】

・問1，問2，問3は熱力学の基本通りの問題．熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程の定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第1法則を通じて熱を計算する．

・問4以降は準静的な断熱過程の問題．準静的な断熱過程の気体の状態決定は，状態方程式とポアソンの公式を，熱力学第1法則は仕事の決定式として用いる．

【解答】

問1 状態方程式より，

$$P_B = \frac{3 RT_0}{2 V_0}.$$

問2 気体 B がした仕事 W_B は， $P-V$ 図の面積より，

$$W_B = \int_{V_0}^{\frac{2}{3}V_0} \frac{RT_0}{V} dV = RT_0 \log \frac{2}{3}.$$

よって，気体 B がされた仕事 \widetilde{W}_B は，

$$\widetilde{W}_B = RT_0 \log \frac{3}{2}.$$

問3 温度一定条件化ゆえ，A，B，C 全体を1つと見た系の内部エネルギー変化は，

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B + \Delta U_C = 0 + 0 + 0 = 0_{(a)}.$$

吸熱量は，まず1つ目の操作では，

$$Q_A = W_A = \int_{V_0}^{\frac{4}{3}V_0} \frac{RT_0}{V} dV = RT_0 \log \frac{4}{3},$$

$$Q_B^{(1)} = W_B = RT_0 \log \frac{2}{3}.$$

続いて，2つ目の操作では，

$$Q_C = W_C = \int_{V_0}^{\frac{4}{3}V_0} \frac{RT_0}{V} dV = RT_0 \log \frac{4}{3},$$

$$Q_B^{(2)} = W_B = \int_{\frac{2}{3}V_0}^{\frac{1}{3}V_0} \frac{RT_0}{V} dV = -RT_0 \log 2.$$

以上より，2つの操作での気体の吸熱量 Q_{1+2} は，

$$Q_{1+2} = Q_A + Q_B^{(1)} + Q_B^{(2)} + Q_C = RT_0 \log \frac{16}{27}, \quad \therefore Q = -Q_{1+2} = RT_0 \log \frac{27}{16}.$$

問4 状態(あ)でのA, B, Cでの圧力を $P_0 = \frac{RT_0}{V_0}$ とし, 状態(い)での圧力を $P_i (i = A, B, C)$, 体積を $V_i (i = A, B, C)$ とし, 状態(う)での圧力を P'_A, P'_B, P'_C と記す.

状態(い), (う)における各ピストンのつりあいより,

$$\begin{cases} \text{(い)} : P_A = P_B = P_C, \\ \text{(う)} : P'_A = P'_B = P'_C. \end{cases}$$

ここで, 状態(い)における各気体の圧力を $P_1 = P_A = P_B = P_C$, 状態(う)における各気体の圧力を $P_2 = P'_A = P'_B = P'_C$ と記す.

さて, 状態(あ)から(い)への断熱過程におけるポアソンの公式より,

$$\begin{cases} P_1 V_B^\gamma = P_0 V_0^\gamma, \\ P_1 V_C^\gamma = P_0 V_0^\gamma. \end{cases}$$

同様に, 状態(い)から(う)への断熱過程におけるポアソンの公式より,

$$\begin{cases} P_2 \left(\frac{4}{3}V_0\right)^\gamma = P_1 V_A^\gamma, \\ P_2 \left(\frac{1}{3}V_0\right)^\gamma = P_1 V_B^\gamma. \end{cases}$$

Bに関するポアソンの公式の2式より,

$$P_2 \left(\frac{1}{3}V_0\right)^\gamma = P_0 V_0^\gamma, \quad \therefore P_2 = 3^\gamma P_0.$$

よって, 状態方程式より,

$$T_B = \frac{P_2 V_0 / 3}{R} = \underbrace{3^{\gamma-1} T_0}.$$

問5 $P_2 = 3^\gamma P_0$ ゆえ, 状態方程式より

$$T_A = T_C = \frac{P_2 \cdot 4V_0 / 3}{R} = 4 \cdot 3^{\gamma-1} T_0.$$

以上より, A, B, C全体を1つと見た系の熱力学第1法則を考えて,

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= \Delta U_A + \Delta U_B + \Delta U_C \\ &= C_v \{2(4 \cdot 3^{\gamma-1} - 1) + (3^{\gamma-1} - 1)\} T_0 \\ &= \underbrace{3(3^\gamma - 1) C_v T_0}. \end{aligned}$$

問6 ポアソンの公式より,

$$\begin{cases} P_1 V_B^\gamma = P_0 V_0^\gamma, \\ P_1 V_C^\gamma = P_0 V_0^\gamma, \\ P_2 \left(\frac{4}{3}V_0\right)^\gamma = P_1 V_A^\gamma, \\ P_2 \left(\frac{1}{3}V_0\right)^\gamma = P_1 V_B^\gamma. \end{cases} \quad \therefore V_A = 4V_B = 4V_C.$$

以上より,

$$V_A : V_B : V_C = 4 : 1 : 1.$$

【補足 1】問 2 で外力がピストンにする仕事について

この等温操作の間, A がピストンにした仕事 W_A は, $P-V$ 図より,

$$W_B = \int_{V_0}^{\frac{4}{3}V_0} \frac{RT_0}{V} dV = RT_0 \log \frac{4}{3}.$$

よって, ピストンのエネルギー収支より, この操作を実現するために外力がピストンにする仕事 W_{ex} は,

$$0 = \Delta K = W_A + W_B + W_{\text{ex}}, \quad \therefore W_{\text{ex}} = RT_0 \log \frac{9}{8}.$$

また, ピストン (断面積 S) が x だけ右に変位したときにピストンに加えている外力 F_{ex} は, ピストンのつりあいより,

$$0 = F_{\text{ex}} + P_A S - P_B S, \quad \therefore F_{\text{ex}} = S(P_B - P_A) = SRT_0 \left(\frac{1}{V_0 - Sx} - \frac{1}{V_0 + Sx} \right).$$

よって, F_{ex} のする仕事は,

$$W_{\text{ex}} = \int_0^{\frac{V_0}{3S}} F_{\text{ex}} dx = RT_0 \left[-\log |V_0 - Sx| - \log |V_0 + Sx| \right]_0^{\frac{V_0}{3S}} = RT_0 \log \frac{9}{8}.$$

【補足 2】問 5 の Q_1 , Q_2 を求める

問 6 より, 状態 (あ) から (い) への断熱過程後, 各室内の気体の体積は $V_A = 2V_0$, $V_B = V_C = \frac{1}{2}V_0$ となり, ポアソンの公式から, 気体の圧力は $P_A = P_B = P_C = 2^\gamma P_0$ と求まる. よって, 状態方程式より, 各室内の気体の状態は以下ようになる.

$$A(2^\gamma P_0, 2V_0, 2^{\gamma+1}T_0), \quad B(2^\gamma P_0, V_0/2, 2^{\gamma-1}T_0), \quad C(2^\gamma P_0, V_0/2, 2^{\gamma-1}T_0).$$

さて, 状態 (あ) から状態 (い) での断熱過程における A 室内の気体のする仕事 W_A は, B, C, 右側のピストンからなる系のエネルギー収支を考えて*4,

$$W_A = \Delta U_B + \Delta U_C + \Delta K = C_v(2^{\gamma-1} - 1)T_0 \times 2 = 2(2^{\gamma-1} - 1)C_v T_0.$$

よって, A 室内の気体の熱力学第 1 法則より,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \Delta U_A + W_A \\ &= (2^{\gamma+1} - 1)C_v T_0 + (2^\gamma - 2)C_v T_0 \\ &= 3(2^\gamma - 1)C_v T_0. \end{aligned}$$

*4 B, C 内の気体のする仕事は, 熱力学第 1 法則から逆算できる. 以下の状態 (い) から状態 (う) での A, B のする仕事も同様.

続いて、状態（い）から状態（う）での断熱過程における C 室内の気体のする仕事 W_C は、A, B, 左側のピストンからなる系のエネルギー収支を考えて、

$$\begin{aligned}W_C &= \Delta U_A + \Delta U_B + \Delta K \\&= C_v(4 \cdot 3^{\gamma-1} - 2 \cdot 2^{\gamma+1})T_0 + C_v(3^{\gamma-1} - 2^{\gamma-1})T_0 \\&= 5(3^{\gamma-1} - 2^{\gamma-1})C_vT_0.\end{aligned}$$

よって、C 室内の気体の熱力学第 1 法則より、

$$\begin{aligned}Q_2 &= \Delta U_C + W_C \\&= (4 \cdot 3^{\gamma-1} - 2^{\gamma-1})C_vT_0 + 5(3^{\gamma-1} - 2^{\gamma-1})C_vT_0 \\&= 3(3^\gamma - 2^\gamma)C_vT_0.\end{aligned}$$

以上より、

$$Q_1 + Q_2 = 3(2^\gamma - 1)C_vT_0 + 3(3^\gamma - 2^\gamma)C_vT_0 = 3(3^\gamma - 1)C_vT_0.$$

B : X 線の発生, ボーアの原子モデル

【メモ】

・問 7 : 連続 X 線は, 電子が陽極に衝突する際に, 電子の運動エネルギーの一部が光子のエネルギーとなることで生じる. そのため, 放出される光子のエネルギーは, 入射電子の運動エネルギーを超えない.

特性 X 線は, 物質中に入射した高速の電子が, 原子の内側の軌道の電子を弾き飛ばし, そのときに空いた軌道へ外側の軌道の電子が遷移する際にエネルギー準位の差に等しいエネルギーを持った光子が放出されることで生じる.

・問 8 以降 : ボーアの原子モデルは,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{運動方程式の中心成分} \\ \text{量子条件} \end{array} \right.$$

によって, r_n または v_n が決まる. この結果を利用してエネルギー準位が定まる.

・電子が異なる軌道の間を遷移する際, エネルギー準位の差に等しいエネルギーを持つ 1 個の光子がやりとりされる (振動数条件).

【解答】

問 1 最短波長の X 線は入射電子の運動エネルギーが全て光子のエネルギーになった場合に相当するため,

$$\frac{hc}{\lambda_0} = eV, \quad \therefore \lambda_0 = \frac{hc}{eV}.$$

問 2 原子核の電荷が $(Z - 10)e$ と見なせることに留意して, 運動方程式の中心成分, および量子条件より,

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{v^2}{r_n} = k_0 \frac{(Z - 10)e^2}{r_n^2}, \\ 2\pi r_n = \frac{h}{mv_n} n. \end{array} \right. \quad \therefore r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 m k_0 (Z - 10) e^2} n^2.$$

ここに $n = 3$ を代入すれば,

$$r_3 = \frac{9h^2}{4\pi^2 m k_0 (Z - 10) e^2}.$$

問 3 水素原子のエネルギー準位は*5,

$$E_{H,n} = \frac{1}{2} m v_n^2 + k_0 \frac{(-e)e}{r_n} = -\frac{1}{2} \frac{k_0 e^2}{r_n}.$$

*5 2 つ目の等号では, 運動方程式の中心成分の式から v_n を消去した.

ここで、前問の結果より、 $Z - 10 \rightarrow 1$ とすれば、

$$r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 m k_0 e^2} n^2$$

であり、

$$E_H = -\frac{2\pi^2 m k_0^2 e^4}{h^2}.$$

さて、図 3A での E_2 は、原子核の電荷が $(Z - 2)e$ と見なせることに留意し、 $n = 2$ を代入すれば、

$$E_2 = -\frac{1}{2} k (Z - 2) e^2 \frac{4\pi^2 m k_0 (Z - 2) e^2}{2^2 h^2} = \underbrace{\left(\frac{Z - 2}{2} \right)^2}_{\text{~~~~~}} E_H.$$

E_3 も同様に、

$$E_3 = -\frac{1}{2} k (Z - 10) e^2 \frac{4\pi^2 m k_0 (Z - 10) e^2}{3^2 h^2} = \underbrace{\left(\frac{Z - 10}{3} \right)^2}_{\text{~~~~~}} E_H.$$

問 4 振動数条件から、

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$$

であり、エネルギー準位の差が大きいほど波長は短くなる。図 2 より、 $\lambda_2 > \lambda_1$ ゆえ、エネルギー準位の差が小さい方が λ_2 の光子に対応する。今の場合の $n = 2$ でのエネルギー準位を改めて E_2 、 $n = 3$ でのエネルギー準位を改めて E_3 とすると、

$$E_2 = \left(\frac{Z - 1}{2} \right)^2 E_H, \quad E_3 = \left(\frac{Z - 9}{3} \right)^2 E_H$$

であり、 $E_3 - E_1 > E_2 - E_1$ より*6、

$$\lambda_2 = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{-4}{\underbrace{3Z^2 + 2Z - 1}_{\text{~~~~~}}} \frac{hc}{E_H}.$$

*6 $\left(\frac{Z - 9}{3} \right)^2 < \left(\frac{Z - 1}{2} \right)^2$ より。