

〔1〕 小球の運動や衝突について考える．地点 O に xy 平面の原点を，水平方向に x 軸を，鉛直上向きに y 軸をとり，小球の運動は xy 平面に限られるものとする．なお，小球の大きさは無視できるほど小さく，小球の回転は考えないものとし，空気抵抗も無視する．重力加速度の大きさは g であり，その向きは鉛直下向きである．

I. 質量 m の小球 A を投げた時の様子を観察する．図 1 のように，地点 O から仰角 θ [rad] の方向に速さ v_0 で小球を投げた．ただし， $0 < v_0$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする．

問 1 小球 A が達する最高点の高さを， m ， v_0 ， θ ， g のうち必要なものを用いて表せ．

問 2 小球 A を投げた後，しばらくして小球 A は地面 ($y = 0$) に落下した．落下地点と地点 O の間の水平距離を， m ， v_0 ， θ ， g のうち必要なものを用いて表せ．

問 3 初速度の大きさ v_0 を一定にしたままで，仰角 θ を変えて小球 A を投げる．地点 O から最も遠くに落下する場合の仰角 θ [rad] を求めよ．

問 4 落下した小球 A は地面に衝突してはね返り，地面との衝突を繰り返した．地面はなめらかな面で，小球 A と地面の衝突は非弾性衝突であり，反発係数を e とする．小球 A が地面に n 回目に衝突した地点と地点 O の間の水平距離を， m ， v_0 ， θ ， g ， e ， n のうち必要なものを用いて表せ．

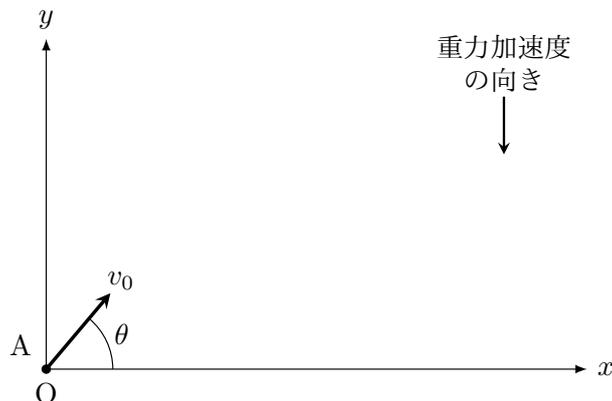


図 1

II. 図2のように、地点Oに xy 平面の原点を、水平方向に x 軸を、鉛直上向きに y 軸をとる。質量 M の小球Bは、地点Oで静止していた質量 m の小球Aに衝突する。衝突直前の小球Bの速度は $\vec{V}_0 = (V_0, 0)$ であったが、衝突直後に小球Aの速度は $\vec{v} = (v \cos \theta, v \sin \theta)$ となり、小球Bの速度は $\vec{V} = (V \cos \phi, -V \sin \phi)$ となったとする。ただし、 $0 < V_0, 0 < v, 0 < V$ とする。また、図2のように、 θ [rad]は \vec{v} と x 軸のなす角度であり、 ϕ [rad]は \vec{V} と x 軸のなす角度である。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \phi < \pi$ とする。なお、小球Aと小球Bの衝突は弾性衝突である。ただし、小球と地面との衝突は考えないものとする。

問5 衝突によってはね上げられた直後の小球Aの速さ v を、 m, M, V_0, θ のうち必要なものを用いて表せ。

問6 小球Aがはね上げられた後、しばらくして小球Aは $y = 0$ まで落下した。落下地点と地点Oの間の水平距離 L を、 m, M, V_0, θ, g のうち必要なものを用いて表せ。

問7 距離 L が最も大きくなる場合を考えたい。 $m, M, V_0, g, d, \Delta d$ のうち必要なものを用いて、以下の空欄に入るべき数式を解答欄に記せ。

$Z = L^2$ とおくと、 L の値が最大になる時に Z の値も最大となる。 $\cos^2 \theta = d$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)とおけば、十分に小さい d の変化である Δd に対して、 Z の変化 $\Delta Z = Z(d + \Delta d) - Z(d)$ は、 $(\Delta d)^n$ ($n > 1$)の項を無視すると、と書ける。 Z の値が最大となる場合、 d の変化 $\Delta d \neq 0$ に対して $\Delta Z = 0$ となるので、 L の値が最大になる $\cos \theta$ の値はとなる。

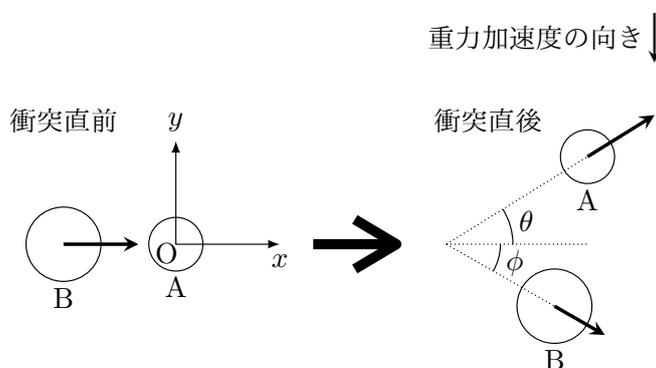


図2

III. II. では、小球 A と小球 B を合わせた 2 物体の重心 G の位置は、時間とともに移動する。II. の小球 A と小球 B の衝突を、重心 G とともに移動する観測者 P から観察する。なお、小球 A と小球 B の質量はそれぞれ m と M である。

問 8 観測者 P から見た小球 A と小球 B の運動を求めたい。 m , M , V_0 , Δt のうち必要なものを用いて、以下の空欄に入るべき数式を解答欄に記せ。

II. の座標系では、小球 A と小球 B の座標をそれぞれ (x_A, y_A) と (x_B, y_B) とすれば、2 物体の重心 G の座標は

$$(x_G, y_G) = \left(\frac{mx_A + Mx_B}{m + M}, \frac{my_A + My_B}{m + M} \right)$$

と表される。衝突直前に小球 A は地点 O に静止しており、小球 B は水平方向 (x 軸の正の向き) に速さ V_0 を持っていたので、微小時間 Δt の間における重心 G の座標の変化量は $(\Delta x_G, \Delta y_G) = (\boxed{\text{(c)}}, 0)$ と表される。ゆえに、重心 G の速度は $\left(\frac{\Delta x_G}{\Delta t}, \frac{\Delta y_G}{\Delta t} \right) = (\boxed{\text{(d)}}, 0)$ となる。よって、衝突直前において、重心 G とともに移動する観測者 P から見た小球 A の速度は $(\boxed{\text{(e)}}, 0)$ であり、小球 B の速度は $(\boxed{\text{(e)}}, 0)$ となる。

問 9 衝突直後に、観測者 P から見た小球 A の速度は $\vec{v}' = (v' \cos \theta', v' \sin \theta')$ となり、小球 B の速度は $\vec{V}' = (V' \cos \phi', -V' \sin \phi')$ となった。 θ' [rad] は \vec{v}' と x 軸とのなす角であり、 ϕ' [rad] は \vec{v}' と x 軸のなす角度である。ただし、 $0 < \theta' < \pi$, $0 < \phi' < \pi$ とする。衝突直後における小球 A の速さ v' , 小球 B の速さ V' , $\sin(\theta' + \phi')$ を、 m , M , V_0 のうち必要なものを用いて表せ。

問 10 小球 B の質量 M が小球 A の質量 m より大きい場合、II. の座標系で見た小球 B の角度 ϕ には上限がある。 m , M , V_0 のうち必要なものを用いて、 $\tan \phi$ の上限値を表せ。

〔2〕 図1のように，真空中に半径がそれぞれ R_A および R_B の一巻きの円形コイル A および B が同一面内に中心をそろえて置かれており，コイル A には平行板コンデンサーと起電力 V の直流電源が，コイル B には抵抗値 r の抵抗が，それぞれ接続されている．コンデンサーは，辺の長さが a ， b の長方形の極板 A および B で構成され，極板間の距離は d であり，極板間は真空である．ここで， d は a ， b に比べて十分小さく，極板端部の電場の効果は無視できるとする．また，コイル A および B の電気抵抗も無視できるとする．ここでは，コンデンサー，直流電源，抵抗のサイズはコイルの半径に比べて十分小さく，コイルは円形コイルとみなして磁場を計算してよい．以下では，真空の誘電率および透磁率をそれぞれ ϵ_0 および μ_0 とする．

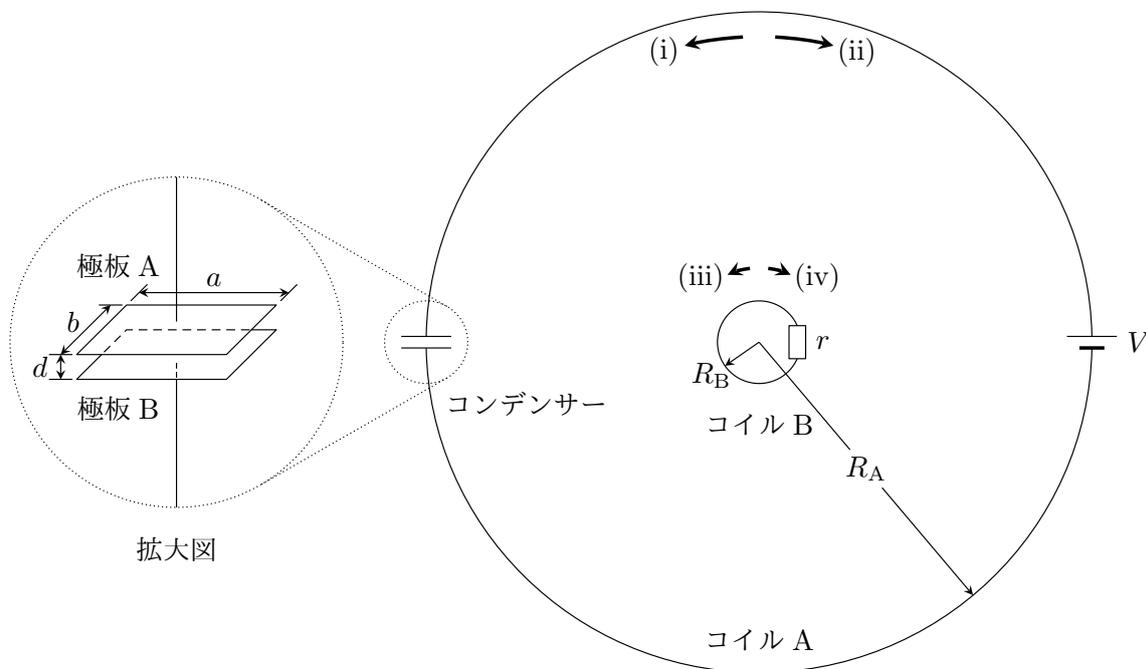


図 1

- I. いま，図 1 中のコンデンサーの極板内に，図 2 のように，辺の長さが a ， b ， d の直方体の誘電体を挿入する．誘電体の挿入長を図 2 に示すように s とする．誘電体を $s = 0$ の地点から，初速度が 0，加速度の大きさが $p (> 0)$ で等加速度運動させるとコイル B に電流が流れた．誘電体の挿入長が $s = 0$ のときの時刻を $t = 0$ とする．以下の問に答えよ．ここで，コイル A の自己誘導による逆起電力は小さく無視できるものとし，また，コイル B に流れる電流が作る磁場も弱く無視できるものとする．なお，誘電体の比誘電率は $\epsilon_r (> 1)$ であり，誘電体端部の電場の効果は無視できるとする．

- 問 1 誘電体の挿入長が s ($0 \leq s < a$) のときにコンデンサーに蓄えられている電気量を $a, b, d, s, \epsilon_r, \epsilon_0, V$ のうち必要なものを用いて表せ.
- 問 2 いま, 時刻 t から微小時間 Δt の間に, 誘電体の挿入長が s から $s + v_s \Delta t$ に変化したと近似して, この間にコイル A に流れる電流の大きさ I_A を $v_s, a, b, d, \epsilon_r, \epsilon_0, V$ のうち必要なものを用いて表せ. ここで, $v_s (> 0)$ は挿入長が s のときの誘電体の速度である. また, その電流の向きを図 1 中の記号 (i) または (ii) により示せ.
- 問 3 時刻 t において電流 I_A がコイルの中心につくる磁場の強さを R_A, I_A, μ_0 のうち必要なものを用いて表せ. またその向きは, 図 1 において (ア) 紙面表から裏の向き, あるいは (イ) 紙面裏から表の向き, のうちのどちらであるか. (ア) または (イ) の記号で示せ.
- 問 4 時刻 t から微小時間 Δt の間に誘電体の速度が v_s から $v_s + p \Delta t$ になったとして, この間にコイル B に流れる電流 I_B の大きさを $r, R_A, R_B, a, b, d, p, \epsilon_r, \epsilon_0, \mu_0, V$ のうち必要なものを用いて表せ. また, その電流の向きを図 1 中の記号 (iii) または (iv) により示せ. ただし, コイル B の半径 R_B はコイル A の半径 R_A に比べて十分小さく, コイル B の内部の磁場は一様で中心の値に等しいとせよ.
- 問 5 誘電体を挿入し始めた直後にコイル B に流れる電流の大きさを I_{B0} として, 誘電体の挿入長が 0 から a まで変化する間に抵抗 r で消費されるエネルギーを r, I_{B0}, a, p のうち必要なものを用いて表せ.

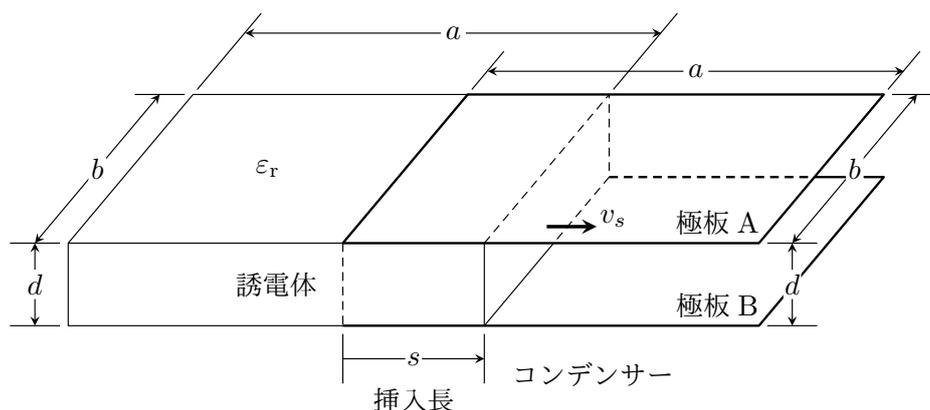


図 2

II. 次に、コンデンサーに挿入した誘電体を取り除いたうえで、図1のコンデンサーに対して図3のように、極板Aの辺 a_1a_2 と極板Bの辺 b_1b_2 の位置を固定したまま辺 a_3a_4 と辺 b_3b_4 を上下に等しく広げる変形を与えたところ、コイルBに電流が流れた。辺 a_3a_4 と辺 b_3b_4 の距離が $d + \Delta d$ である瞬間について、次の問に答えよ。ここで、 $\Delta d (\neq 0)$ は d に比べて十分小さいとする。以下では、図3のように頂点 a_1 と頂点 b_1 の中点を原点とし、 x 軸を頂点 a_4 と頂点 b_4 の中点の方向にとる。また、 Δd は小さいため、極板間距離を広げた後も極板の x 方向の長さは a で近似できるものとする。

問6 このときの、このコンデンサーの電気容量を、図4のように極板を n のこの微小区間に等分割してできた、電気容量が C_k の微小平行板コンデンサーを合成した電気容量であると考えよう。ただし k は1から n までの整数である。次の文章の空欄に入れるべき正式を解答欄に記せ。

極板AB間の距離は図5に示す x の1次関数で表される。原点側から数えて k 番目の微小平行板コンデンサーの極板間の距離が $x = \frac{a}{n}(k-1)$ における極板AB間の距離であるとするれば、この極板間の距離は $d, \Delta d, n, k$ を用いて と表される。したがって、微小平行板コンデンサーの合成容量は $a, b, d, \Delta d, n, k, \epsilon_0$ を用いて $\sum_{k=1}^n$ と表される。いま、分割数 n が十分大きいときの微小平行板コンデンサーの合成容量は、次の近似を適用すれば $a, b, d, \Delta d, \epsilon_0$ を用いて と表される。

n が十分大きく、かつ δ が1に比べて十分小さい場合：

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a + \delta \frac{k-1}{n}} \doteq 1 - \frac{\delta}{2}$$

問7 図1のように直流電源とコンデンサーはつながっている。位置 x における極板A上の単位面積あたりの電気量を $x, a, d, \Delta d, \epsilon_0, V$ のうち必要なものを用いて表せ。

問8 横軸を x 、縦軸を極板A上の単位面積あたりの電気量 σ として、変形前と変形後の σ の分布をグラフに描くとどのようなようになるか。図6中の(あ)から(こ)の中から最も適切なものを選べ。ただし、図中の σ_0 は極板を広げる前の極板A上の単位面積あたりの電気量である。

問9 辺 a_3a_4 と辺 b_3b_4 を上下に等しく広げる際、それぞれの辺の初速度を0、加速度の大きさを $\frac{q}{2}$ で一定とする。極板を広げ始めた直後にコイルBに流れる電流の大きさを $r, R_A, R_B, a, b, d, q, \epsilon_0, \mu_0, V$ のうち必要なものを用いて表せ。

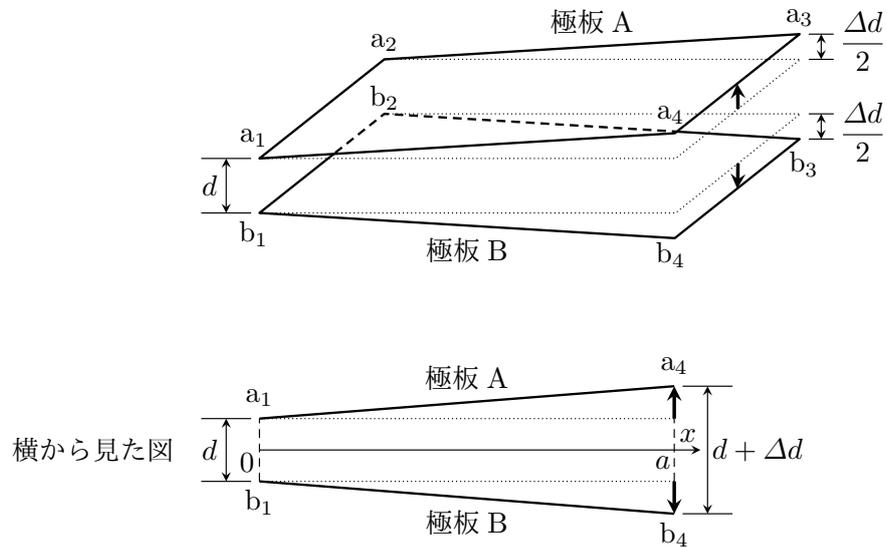


図 3

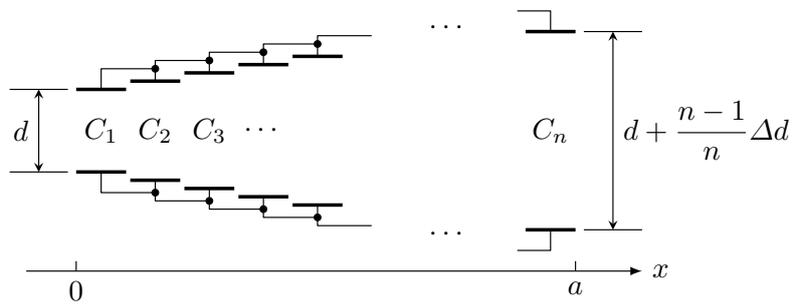


図 4

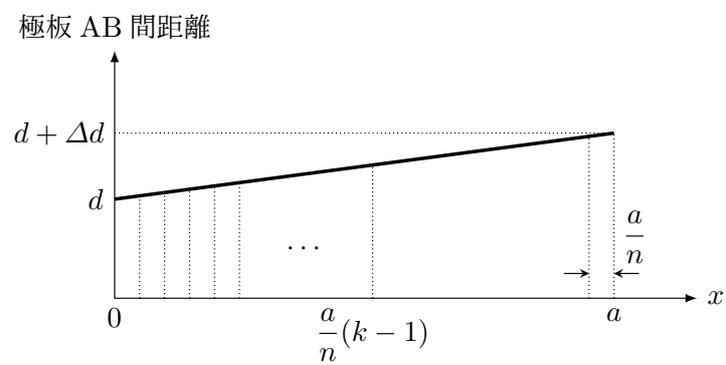


図 5

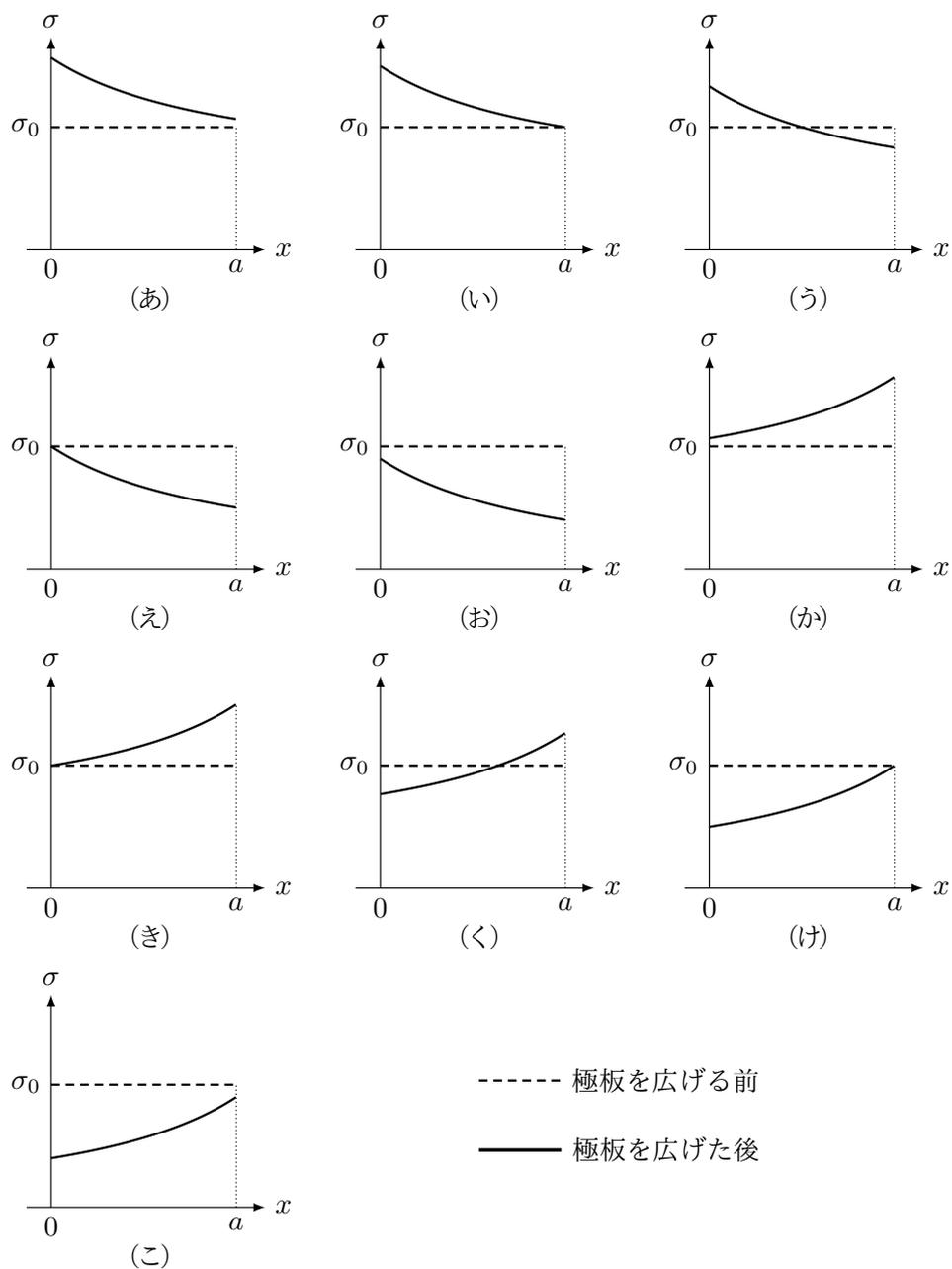


図 6

〔3〕 以下の **A** と **B** の両方の問題に解答せよ。なお **A** と **B** は独立した内容の問題である。

A. 図1のように熱を通さない物質でできた2つの風船をつなぎ合わせた気球がある。一方の風船には単原子分子理想気体である気体 A, もう一方の風船には二原子分子理想気体である気体 B が入っている。風船はそれぞれ密閉されていて気体 A, B は混合しない。風船の材質は力を伴わずに伸び縮みできるので、風船内の気体の圧力は大気圧と常に一致しているとする。2つの風船の接続部には遠隔制御できるヒーター、冷却器、断熱板がある。断熱板を開いているときは、気体 A, B は互いに熱を交換できる。断熱板を開いた状態でヒーターや冷却器を用いると、両気体の温度を一致させたままゆっくりと変化させることができる。気球を構成する物質のうち、気体 A, B 以外の部分の質量、体積、熱容量は考慮しなくてよい。温度はすべて絶対温度とする。

気体 A, B の物質質量、モル質量、定積モル比熱、定圧モル比熱を表1に示す。 R は気体定数、モル質量は1モルあたりの質量である。大気はモル質量が M の理想気体であるとする。地面からの高度が高くなるほど大気の圧力や密度は小さくなるが、気体 A, B の状態を計算する場合には気球の中心高度に対応する大気圧を気体の圧力として用い、各風船内で圧力や密度が一樣であるとしてよい。風の影響はないものとする。地上の大気圧は p_0 、温度は T_0 であった。重力加速度の大きさを g とし、高度によらず一定とする。

I. 最初、図1のように気球は地面に着地しており、気体 A, B の温度は大気の温度 T_0 と同じであった。断熱板を開いた状態でヒーターを用いて気体 A, B を同時に温めたところ、温度が T_1 になったときに気球が地面を離れて浮き始めた。以下の間に $n, M, M_A, M_B, p_0, T_0, R, g$ のうち必要なものを用いて答えよ。

問1 気球が浮き始めたとき、気球に働いている単位体積あたりの浮力の大きさを求めよ。

問2 T_1 を求めよ。

問3 温度が T_0 から T_1 になるまでにヒーターが気体 A, B に与えた熱量の合計を求めよ。

II. つぎに、気球が上昇していかないようにひもで地面に固定した。気体 A, B の温度が T_2 となるまで温めた時点でヒーターを停止し、断熱板を閉じて気体 A, B の熱交換を遮断した。気球からひもを外したところ、気球は上空にゆっくりと上がっていき、ある高度で静止した。静止した気球の中心高度の大気圧は地上の大気圧の a 倍であった。 a の大きさの範囲は $0 < a < 1$ である。上空で静止したときの気体 A の温度を T_A 、気体 B の温度を T_B とする。

- 問4 T_A と T_B を $n, M, M_A, M_B, a, p_0, T_2, R, g$ のうち必要なものを用いて表せ. なお, 気体 A, B の圧力変化は十分ゆっくりであるので, 理想気体の断熱膨張過程では圧力 (p) と体積 (V) が「 $pV^\gamma = \text{一定}$ 」の関係を満たすことを利用してよい. ここで γ は定圧モル比熱を定積モル比熱で割った値である.
- 問5 つづいて, 上空で静止している気球の断熱板を開き, 気体 A, B の温度が一致するまで熱交換を進めたところ, 気球の高度が変わった. 冷却器で両気体を冷やして温度を T_3 にすると, 断熱板を開く前と同じ中心高度に戻って静止した. T_3 を $n, M, M_A, M_B, a, p_0, T_A, T_B, R, g$ のうち必要なものを用いて表せ. ただし, T_2 を用いないこと.

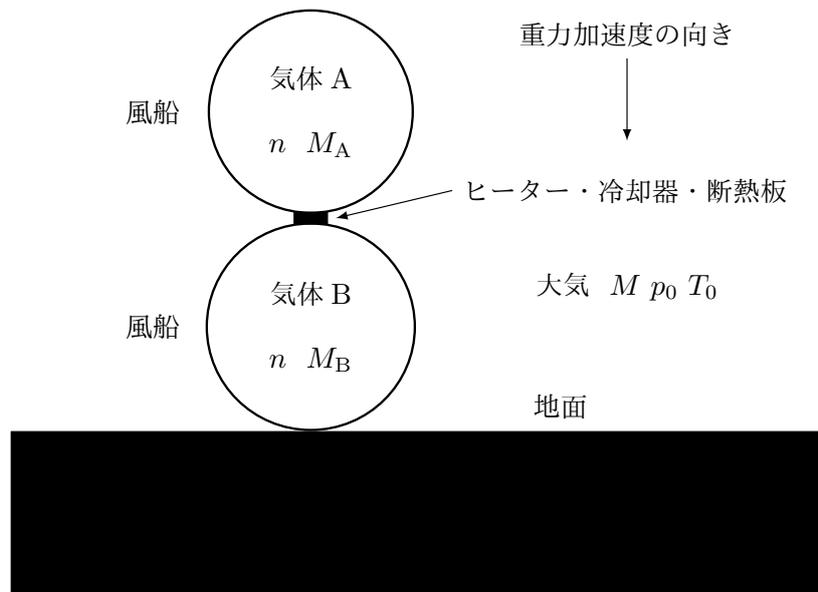


図 1

表 1 風船内の気球に関する量

気体	物質質量	モル質量	定積モル比熱	定圧モル比熱
気体 A (単原子分子理想気体)	n	M_A	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$
気体 B (二原子分子理想気体)	n	M_B	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$

B. 一様で流れがない大気中を速さ V で伝わる音を考える．音は大気中に静止した音源から，当方的に球面波として発せられる．観測者と音源の大きさは無視できるとし，音の伝わり方は音源により乱されないとする．図 2 の点 S で音源が振動数 f_0 の音を発している．この音の振動数を，観測者が点 S から距離 d だけ離れた点 O を中心とする半径 r ($> d$) の円軌道上で，図 2 のように反時計回りに角速度 ω で等速円運動しながら観測する．このとき観測者が観測する音の振動数は，観測者と音源を結ぶ直線方向の速度成分を用いて求めることができる．観測者の位置を点 P ， $\angle POS$ の角度を θ とする．観測者が，時刻 $t = 0$ に $\theta = 0$ の点を通り過ぎてから，この円を一周する間について以下の問に答えよ．音源からの音は $t = 0$ で既に観測者に届いているとする．観測者の速さは音速より十分遅いとする．なお，観測者の加速度は十分に小さいとし，音の振動数を計算する際は，その時点での観測者の速度を一定として計算せよ．また，角度の単位はラジアンとする．

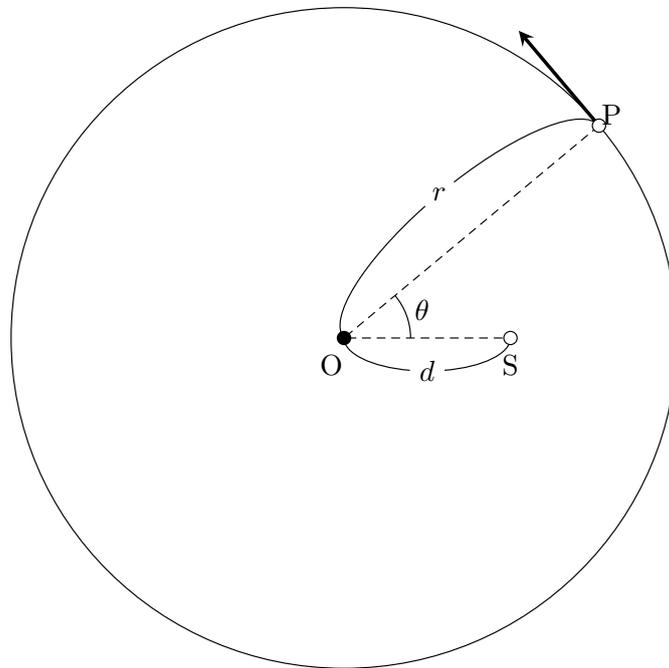


図 2

問6 観測者が $t = 0$ に f_0 の振動数を観測したのち、ふたたび f_0 の振動数を観測する最初の時刻を、 V, f_0, d, ω, r のうち必要なものを用いて表せ。

問7 観測者が観測する音の振動数を求めるには、観測者の速度の SP 方向 (S から P に向かう方向) の成分 v_{SP} が必要である。角度 θ の位置における観測者の v_{SP} を $V, f_0, d, \omega, r, \theta$ のうち必要なものを用いて表せ。

ヒント： v_{SP} は観測者の速度ベクトル \vec{v} と、SP 方向を表すベクトル \vec{SP} とその大きさ $|\vec{SP}|$ を用いて、 $\vec{v} \cdot \frac{\vec{SP}}{|\vec{SP}|}$ のように内積を使って求めることができる。

問8 問7の v_{SP} の大きさを計算すると、 $\cos \theta = \frac{d}{r}$ となる θ において最大となることがわかった。このことを用い、次の文章の と に入るべき数式を、 V, f_0, d, ω, r のうち必要なものを用いて解答欄に記せ。

観測者が最小の振動数を観測したときの v_{SP} の大きさは、 と表される。したがって、観測者が観測する最小の振動数は と表される。

問9 観測者が観測する最大の振動数を、 V, f_0, d, ω, r のうち必要なものを用いて表せ。

問10 $r = 2d$ であるとき、観測者が最小の振動数を観測してから次に最大の振動数を観測するまでにかかる時間を、 V, f_0, d, ω のうち必要なものを用いて表せ。

〔1〕 等加速度運動（時間追跡），複数物体系－衝突，動く座標系（重心系）

【メモ】

・問1～問3, 問6は等加速度運動の時間追跡のみの設問。高校範囲では, 等加速度運動と単振動のみ, 時間追跡とエネルギーによる考察の両方が可能。

・問4は, 固定面との衝突, 等加速度運動の時間追跡を漸化式で処理する設問。

・問5は衝突。衝突は以下の2式を連立*1。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{外力のない方向成分の運動量保存則} \\ \text{問題文で指示された条件} \end{array} \right.$$

今回は, 弾性衝突（衝突の前後で運動エネルギーの総和が不変）が条件として与えられている。

・問5, 問9, 問10は複数物体系の問題。複数物体系は以下の2式連立が基本。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{外力のない方向成分の運動量保存則} \\ \text{全体の力学的エネルギー保存則} \end{array} \right.$$

・問8は動く座標系の設問。重心は x 方向に等速運動をすることから, 重心系における x 方向には慣性力は生じない (y 方向には生じる)。

【解答】

問1 Aの y 方向の位置 y は,

$$y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2} g \left(t - \frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g}, \quad \therefore \max\{y\} = \underbrace{\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}}.$$

問2 $y = 0$ を満たす時刻 t は $t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$ であり, このとき,

$$x = v_0 \cos \theta \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = \underbrace{\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}}.$$

問3 $\sin 2\theta = 1$ を満たすとき, 落下位置 x は最大となるので,

$$\sin 2\theta = 1, \quad \therefore \theta = \underbrace{\frac{\pi}{4}}.$$

問4 n 回目の衝突直後の小球の速度の y 成分を u_n とすると, $n+1$ 回目の衝突直前の小球の速度の y 成分は $-u_n$ である。 $n+1$ 回目の衝突直後の速度の y 成分 u_{n+1} は, はね返り係数の式より,

$$u_{n+1} - 0 = -e(-u_n - 0), \quad \therefore u_{n+1} = e u_n.$$

*1 問4のように, 固定面との衝突の場合, 物体と固定面からなる系において衝突の際面を固定させるために衝突方向に外力から力積を受けるため, 物体と固定面からなる系の運動量の衝突方向成分は保存しない。

よって、 n 回目の衝突直後の速度成分 u_n は、

$$u_n = e u_{n-1} = e^2 u_{n-2} = \cdots = e^n u_0 = e^n v_0 \sin \theta.$$

さて、 $n - 1$ 回目の衝突と n 回目の衝突の時間間隔 t_n は、

$$u_{n-1} t_n - \frac{1}{2} g t_n^2 = 0, \quad \therefore t_n = \frac{2u_{n-1}}{g} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} e^{n-1}$$

ゆえ、この衝突の間の水平方向の変位 $x_n - x_{n-1}$ は、

$$x_n - x_{n-1} = v_0 \cos \theta t_n = \frac{2u_{n-1}}{g} = \frac{2v_0 \sin \theta \cos \theta}{g} e^{n-1} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} e^{n-1}.$$

以上より、

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} e^{n-1} + x_{n-1} \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} (e^{n-1} + e^{n-2}) + x_{n-2} \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} (e^{n-1} + \cdots + e^0) + x_0 \\ &= \frac{1 - e^n}{1 - e} \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}. \end{aligned}$$

問 5 運動量保存則、力学的エネルギー（2 物体の運動エネルギーの和の）保存則より、

$$\begin{cases} MV \cos \phi + mv \cos \theta = MV_0, \\ M(-V \sin \phi) + mv \sin \theta = 0, \\ \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} MV_0^2, \end{cases}$$

ここで、運動量保存則の 2 式より、

$$\begin{aligned} (MV)^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) &= (mv \sin \theta)^2 + (MV_0 - mv \cos \theta)^2 \\ \therefore (MV)^2 &= (MV_0)^2 + (mv)^2 - 2MmV_0 v \cos \theta. \end{aligned}$$

これを力学的エネルギー保存則の式に代入して、 $v \neq 0$ より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M^2 \{(MV_0)^2 + (mv)^2 - 2MmV_0 v \cos \theta\} + \frac{1}{2} Mmv^2 &= \frac{1}{2} M^2 V_0^2 \\ mv \{(M + m)v - 2MV_0 \cos \theta\} &= 0 \\ \therefore v &= \frac{2M}{M + m} V_0 \cos \theta. \end{aligned}$$

小球 B の速さ V は,

$$\begin{aligned} (MV)^2 &= (MV_0)^2 + \left(\frac{2Mm}{M+m} V_0 \cos \theta \right)^2 - 2MmV_0v \cos \theta \\ &= \left(1 - \frac{2m}{M+m} \cos \theta \right)^2 (MV_0)^2 \\ \therefore V &= \left| 1 - \frac{2m}{M+m} \cos \theta \right| V_0. \end{aligned}$$

小球 B の運動方向 ϕ は,

$$\begin{cases} MV \cos \phi = MV_0 - mv \cos \theta, \\ MV \sin \phi = mv \sin \theta, \end{cases}$$

$$\therefore \tan \phi = \frac{mv \sin \theta}{MV_0 - mv \cos \theta} = \frac{\frac{2m}{M+m} \sin \theta \cos \theta}{1 - \frac{2m}{M+m} \cos^2 \theta}.$$

問 6 衝突後の小球 A の位置 y は, 問 5 の v を用いて, 衝突時刻を $t = 0$ とすれば,

$$y = v \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

であり, $y = 0$ を満たす時刻 t は, $t = \frac{2v \sin \theta}{g}$ である. よって, このときの位置 $x = L$ は,

$$L = v \cos \theta \frac{2v \sin \theta}{g} = \frac{8V_0^2}{g} \underbrace{\left(\frac{M}{M+m} \right)^2 \sin \theta \cos^3 \theta}.$$

問 7 問 6 より,

$$Z = \left\{ \frac{8V_0^2}{g} \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 \right\}^2 (1 - \cos^2 \theta) \cos^6 \theta.$$

ここで, $d = \cos^2 \theta$ より, $A = \left\{ \frac{8V_0^2}{g} \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 \right\}^2$ として,

$$Z(d + \Delta d) = A\{(d + \Delta d)^3 - (d + \Delta d)^4\} \doteq A\{d^3 + 3d^2 \Delta d - (d^4 + 4d^3 \Delta d)\}$$

ゆえ,

$$\Delta Z = A(3d^2 \Delta d - 4d^3 \Delta d) = \underbrace{\left\{ \frac{8V_0^2}{g} \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 \right\}^2}_{(a)} (3 - 4d)d^2 \Delta d.$$

よって, $\frac{\Delta Z}{\Delta d} = 0$ を満たす $d = \cos^2 \theta$ は,

$$3 - 4 \cos^2 \theta = 0, \quad \therefore \cos \theta = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{(b)}.$$

問 8 重心の定義より,

$$\Delta x_G = \frac{m\Delta x_A + M\Delta x_B}{m + M} = \frac{0 + MV_0\Delta t}{m + M} = \frac{M}{\underbrace{M + m}_{(c)}} V_0\Delta t,$$

$$\therefore \frac{\Delta x_G}{\Delta t} = \frac{M}{\underbrace{M + m}_{(d)}} V_0.$$

よって, 重心系における A の速度 \vec{v}_{GA} , および B の速度 \vec{v}_{GB} はそれぞれ,

$$\vec{v}_{GA} = \vec{v}_A - \vec{v}_G = \left(-\frac{M}{\underbrace{M + m}_{(e)}} V_0, 0 \right), \quad \vec{v}_{GB} = \vec{v}_B - \vec{v}_G = \left(\frac{m}{\underbrace{M + m}_{(f)}} V_0, 0 \right).$$

問 9 重心系での運動量保存則, および力学的エネルギー保存則より*2,

$$\begin{cases} MV' \cos \phi' + mv' \cos \theta' = M \frac{m}{M + m} V_0 + m \left(-\frac{m}{M + m} V_0 \right) = 0, \\ M(-V' \sin \phi') + mv' \sin \theta' = 0, \\ \frac{1}{2} MV'^2 + \frac{1}{2} mv'^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M + m} V_0 \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(-\frac{m}{M + m} V_0 \right)^2, \\ \therefore v' = \frac{M}{\underbrace{M + m}} v_0, \quad V' = \frac{m}{\underbrace{M + m}} v_0. \end{cases}$$

また, この結果と運動量保存則より, $\sin \theta' = \sin \phi'$, $\cos \phi' = -\cos \theta'$ ゆえ,

$$\sin(\theta' + \phi') = \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta' \sin \phi' = 0.$$

問 10 問 5 より,

$$\tan \phi = \frac{\frac{2m}{M + m} \sin \theta \cos \theta}{1 - \frac{2m}{M + m} \cos^2 \theta}$$

であり, $a = \frac{2m}{M + m}$ とし, このとき, $M > m$ より $0 < a < 1$ である. $Z = \tan^2 \phi$, $s = \cos^2 \theta$ と定義すると,

$$Z = \frac{a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(1 - a \cos^2 \theta)^2} = \frac{a^2(1 - s)s}{(1 - as)^2}.$$

さて, Z の s に関する変化率は,

$$\frac{dZ}{ds} = \frac{a^2(1 - 2s)}{(1 - as)^2} + (-2) \frac{a^2(s - s^2)}{(1 - as)^3} (-a) = \frac{a^2\{-(2 - a)s + 1\}}{(1 - as)^3}$$

であり, $\frac{dZ}{ds} = 0$ を満たす s は,

$$\frac{a^2\{-(2 - a)s + 1\}}{(1 - as)^3} = 0, \quad \therefore s = \frac{1}{2 - a}.$$

よって, 増減は以下の表のようになる.

*2 【補足】を参照.

s	0	⋯	$\frac{1}{2-a}$	⋯	1
$\frac{dZ}{ds}$		+	0	-	
Z	0	↗	$\frac{a^2}{4(1-a)}$	↘	0

以上より、 Z の最大値は $\frac{a^2}{4(1-a)}$ であり、 $\tan \phi$ の最大値（上限値）は、

$$\max\{\tan \phi\} = \frac{a}{2\sqrt{1-a}} = \frac{m}{\sqrt{M^2 - m^2}}.$$

【補足】 重心系における運動量保存則と力学的エネルギー保存則

地面固定系での各物体の運動方程式は、

$$\begin{cases} M \frac{dV_x}{dt} = 0, \\ M \frac{dV_y}{dt} = -Mg, \end{cases} \quad \begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = 0, \\ m \frac{dv_y}{dt} = -mg. \end{cases}$$

なお、衝突しているごく短い間では、その瞬間に B が A に及ぼす撃力を $\vec{f} = (f_x, f_y)$ とすると、

$$\begin{cases} M \frac{dV_x}{dt} = -f_x, \\ M \frac{dV_y}{dt} = -f_y - Mg, \end{cases} \quad \begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = f_x, \\ m \frac{dv_y}{dt} = f_y - mg. \end{cases}$$

ここで、重心系での運動方程式にするためには、運動方程式の加速度を $\vec{a} \rightarrow \vec{a} - \vec{a}_G$ と相対加速度に変換すればよい。今、運動方程式より、重心加速度 \vec{a}_G は、

$$\vec{a}_G = \left(\frac{MA_x + ma_x}{M+m}, \frac{MA_y + ma_y}{M+m} \right) = (0, -g)$$

である。よって、重心系における運動方程式は、両辺から \vec{a}_G を引いて、

$$\begin{cases} M \frac{dV'_x}{dt} = -f_x, \\ M \frac{dV'_y}{dt} = -f_y, \end{cases} \quad \begin{cases} m \frac{dv'_x}{dt} = f_x, \\ m \frac{dv'_y}{dt} = f_y. \end{cases}$$

なお、衝突の前後における物体の運動方程式は $f_x = f_y = 0$ とすればよい。

さて、いずれの場合も、それぞれの運動方程式の各成分の和を考えれば、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(MV'_x + mv'_x) = 0, \\ \frac{d}{dt}(MV'_y + mv'_y) = 0, \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} MV'_x + mv'_x = \text{const}, \\ MV'_y + mv'_y = \text{const}, \end{cases}$$

と運動量保存則を得る。

また、衝突前/衝突後の重心系における運動方程式に対応する速度成分をかけて和を取れば、

$$\begin{aligned}MV'_x \frac{dV'_x}{dt} + MV'_y \frac{dV'_y}{dt} + mv'_x \frac{dv'_x}{dt} + mv'_y \frac{dv'_y}{dt} &= f_x(v'_x - V'_x) + f_y(v'_y - V'_y) \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}M(V_x'^2 + V_y'^2) + \frac{1}{2}m(v_x'^2 + v_y'^2) \right\} &= f_x(v'_x - V'_x) + f_y(v'_y - V'_y) \\ \therefore \frac{1}{2}M(V_x'^2 + V_y'^2) + \frac{1}{2}m(v_x'^2 + v_y'^2) &= \int_{t_1}^{t_2} \{f_x(v'_x - V'_x) + f_y(v'_y - V'_y)\} dt,\end{aligned}$$

となり、衝突前/衝突後のそれぞれでは $f_x = f_y = 0$ ゆえ、重心系での衝突前/衝突後の力学的エネルギー保存則を得る。問題文の条件から弾性衝突ゆえ、衝突の前後で系の力学的エネルギーが不変に保たれることから、衝突の前後でも重心系における力学的エネルギー保存則は成り立つ（つまり右辺の仕事の項が 0 となる）。

〔2〕 コンデンサの中身，電磁誘導（ファラデー則）

【メモ】

- ・電気回路の状態は，キルヒホッフ則，電荷保存則，素子の性質によって一意に決まる．
- ・問 1，問 2 はコンデンサのみの回路の問題．誘電体の挿入が絡む．
- ・問 4 は誘導起電力の決定．磁場が時間変化するタイプの電磁誘導はファラデー則一択．
- ・問 5 はジュール熱の計算．ジュール熱 J の計算は以下のように行う．

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I \text{ 一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I \text{ 一定でないとき}). \end{cases}$$

- ・問 6～問 8 は中身の見えるコンデンサではあるが，誘電体の運動や，挿入に要する仕事を計算するわけではなく，容量の計算をするだけの問題．
- ・問 9 は，以前のいくつかの問題を誘導なしで解く設問．

【解答】

問 1 平行平板コンデンサの容量の公式と，並列の合成則より，

$$C = \varepsilon_0 \frac{b(a-s)}{d} + \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{bs}{d} = \varepsilon_0 \frac{b\{a + (\varepsilon_r - 1)s\}}{d}.$$

よって，キルヒホッフ則より，

$$V - \frac{Q}{C} = 0, \quad \therefore Q = \underbrace{\{a + (\varepsilon_r - 1)s\}}_{\text{}} \frac{\varepsilon_0 b}{d} V.$$

問 2 前問の結果（キルヒホッフ則），および電流の定義より，

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \{a + (\varepsilon_r - 1)(s + v_s t)\} \frac{\varepsilon_0 b}{d} V - \{a + (\varepsilon_r - 1)s\} \frac{\varepsilon_0 b}{d} V = (\varepsilon_r - 1) \frac{\varepsilon_0 b V}{d} v_s \Delta t, \\ \therefore I_A &= \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \underbrace{(\varepsilon_r - 1) \frac{\varepsilon_0 b V}{d}}_{\text{(i) 向き}} v_s. \end{aligned}$$

問 3 公式より，

$$H = \frac{I_A}{\underbrace{2R_A}_{\text{(i)}}}, \quad \text{(i)}.$$

問 4 時刻 t における誘電体の速度は $v = pt$ と与えられ，このとき，コイルを貫く磁束 Φ は紙面を裏から表の向きを正として*3，

$$\Phi = B\pi R_B^2 = \frac{\pi(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\mu_0 b V R_B^2}{2R_A d} pt.$$

*3 磁場 H と磁束密度 B の間の関係は，透磁率を μ として $B = \mu H$ である．

よって、ファラデー則より、回路1周に生じる誘導起電力は*4、

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi(\epsilon_r - 1)\epsilon_0\mu_0 b V R_B^2}{2R_A d} p.$$

以上より、キルヒホッフ則より、

$$\mathcal{E} - rI_B = 0, \quad \therefore |I_B| = \left| \frac{\mathcal{E}}{r} \right| = \frac{\pi(\epsilon_r - 1)\epsilon_0\mu_0 b p V R_B^2}{2rR_A d}.$$

起電力正の向き（反時計回り）を電流正の向きとして計算し、 $I_B < 0$ ゆえ (iv) 向き。

問5 加速度一定より、回路に流れる電流の値は一定値を取る。誘電体の挿入に要する時間は $t = \sqrt{\frac{2a}{p}}$ ゆえ、生じるジュール熱は、

$$J = rI_{B0}^2 \sqrt{\frac{2a}{p}}.$$

問6 図5より、片方を水平と見た時の極板の傾きは $\frac{\Delta d}{a}$ であり、位置 x での極板感覚 D は、

$$D = \frac{\Delta d}{a} x + d.$$

$x = \frac{a}{n}(k-1) + d$ では、

$$D = \frac{k-1}{n} \Delta d + d \quad (a)$$

よって、 k 番目の極板の対が形成するコンデンサの容量 C_k は、

$$C_k = \epsilon_0 \frac{S_k}{D} = \epsilon_0 \frac{ab/n}{(k-1)\Delta d/n + d} \quad (b)$$

であり、与えられた近似式を使えば、全体の容量は、

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \epsilon_0 \frac{ab/n}{(k-1)\Delta d/n + d} = \frac{\epsilon_0 ab}{d} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n} \frac{\Delta d}{d}} \\ &\doteq \frac{\epsilon_0 ab}{d} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta d}{d} \right) \quad (c) \end{aligned}$$

問7 位置 x にある極板が形成するコンデンサの容量 $C(x)$ は、

$$C(x) = \epsilon_0 \frac{\frac{a}{n} b}{\frac{\Delta d}{a} x + d} = \epsilon_0 \frac{\frac{a}{n} b}{\frac{\Delta d}{a} x + d}.$$

*4 起電力の正の向きは、磁束の正の向きに対する右ねじの向き。

よって、キルヒホッフ則より、

$$Q = \varepsilon_0 \frac{\frac{a}{n}b}{\frac{\Delta d}{a}x + d} V, \quad \therefore \sigma = \frac{Q}{\frac{a}{n}b} = \frac{\varepsilon_0 V}{\frac{\Delta d}{a}x + d}.$$

問8 $\Delta d = 0$ で $\sigma = \sigma_0$ より、

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0 V}{d}.$$

よって、

$$\sigma(x) = \frac{\sigma_0}{1 + \frac{\Delta d}{ad}x}$$

であり、 $x = 0$ で $\sigma = \sigma_0$ より (え).

問9 広げる際の可動端点の位置を y とすると、 y は時刻 t の関数として、

$$y = \frac{d}{2} + \frac{1}{2} \frac{q}{d} t^2$$

と表され、時刻 t における位置を $d + \frac{\Delta d}{2}$ とすると、

$$\frac{d}{2} + \frac{1}{2} \frac{q}{d} t^2 = d + \frac{\Delta d}{2}, \quad \therefore \Delta d = \frac{1}{2} q t^2.$$

よって、極板に蓄えられる電荷の総量は、問6(c)を用いてキルヒホッフ則より、

$$Q = \frac{\varepsilon_0 ab}{d} \left(1 - \frac{q}{4d} t^2\right) V$$

であり、電流の定義より、

$$I_A = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\varepsilon_0 abqV}{2d^2} t.$$

さて、コイル B を貫く磁束 Φ は、紙面を裏から表の向きを正として、

$$\Phi = -\frac{\mu_0 I_A}{2R_A} \pi R_B^2 = -\frac{\pi \varepsilon_0 \mu_0 abqV R_B^2}{4R_A d^2} t$$

ゆえ、ファラデー則より、回路1周に生じる誘導起電力は(反時計回り正)、

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi \varepsilon_0 \mu_0 abqV R_B^2}{4R_A d^2}$$

であり、キルヒホッフ則より、

$$I_B = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{\pi \varepsilon_0 \mu_0 abqV R_B^2}{4r R_A d^2}.$$

【補足】容量を近似せず求める

位置 x_k から $x_k + \Delta x$ にある面積 $b\Delta x$ の微小な極板の対が形成するコンデンサの容量 $\Delta C_k(x)$ は*5,

$$\Delta C_k = \varepsilon_0 \frac{b\Delta x}{\frac{\Delta d}{a}x_k + d}.$$

両辺 $k = 1$ から $k = n$ まで和を取り, $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を取れば*6,

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta C_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varepsilon_0 \frac{b\Delta x}{\frac{\Delta d}{a}x_k + d} \\ &= \varepsilon_0 \frac{b}{d} \int_0^a \frac{dx}{1 + \frac{\Delta d}{ad}x} \\ &= \left[\varepsilon_0 \frac{b}{d} \frac{ad}{\Delta d} \log \left(1 + \frac{\Delta d}{ad}x \right) \right]_0^a \\ &= \varepsilon_0 \frac{ab}{\Delta d} \log \left(1 + \frac{\Delta d}{d} \right). \end{aligned}$$

ここで, $\log(1+x)$ を $x=0$ 近傍でテイラー展開した式

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

を2次まで用いれば,

$$C = \varepsilon_0 \frac{ab}{\Delta d} \log \left(1 + \frac{\Delta d}{d} \right) \doteq \frac{\varepsilon_0 ab}{d} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta d}{d} \right).$$

*5 $\Delta x = \frac{a}{n}$ である.

*6 $\Delta x \rightarrow 0$ と $n \rightarrow \infty$ は等価.

〔3〕 A：熱力学の基本処理，断熱過程，熱気球

【メモ】

- ・熱気球に関する熱力学では，状態方程式の変数として，圧力 P ，温度 T ，密度 ρ を用いた $p = \frac{R}{M}\rho T$ (M は分子量， R は気体定数) の形を用いることが多い。誘導が付かなくとも導けるようにしておきたい。
- ・問 3 は熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題。定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定。内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算。今回は，温度が与えられており，体積が不明なため，状態方程式は体積の決定方程式となる。
- ・問 4 は準静的な断熱過程に関する問題。準静的な断熱過程では，ポアソンの公式から圧力が体積の決定，状態方程式から温度の決定。熱力学第 1 法則は仕事の決定方程式となる。
- ・熱力学の基本では，可動部分のつりあいから圧力を決定するのが基本だが，問 2，問 5 では，圧力が与えられているので，可動部分（気球）のつりあいを考えることで，圧力以外の未知量（今回は温度）が求まる。

【解答】

問 1 大気の状態方程式より，地表付近の大気の密度 ρ_0 は，

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0}.$$

よって，気球内の気体の単位体積あたりにはたらく浮力は，

$$f = \rho_0 \cdot 1 \cdot g = \frac{p_0 M g}{RT_0}.$$

問 2 状態方程式より，

$$\begin{cases} p_0 V_A = nRT_1, \\ p_0 V_B = nRT_1, \end{cases} \quad \therefore V_A = V_B = \frac{nRT_1}{p_0}.$$

よって，気球のつりあいより，垂直抗力の大きさを N として，

$$\begin{aligned} N &= n(M_A + M_B)g - \rho_0(V_A + V_B)g = 0 \\ n(M_A + M_B)g - \frac{p_0 M}{RT_0} \frac{2nRT_1}{p_0} g &= 0, \quad \therefore T_1 = \frac{M_A + M_B}{2M} T_0. \end{aligned}$$

問 3 気球内部の気体の始状態における体積は，状態方程式より，

$$p_0 V_0 = nRT_0, \quad \therefore V_0 = \frac{nRT_0}{p_0}.$$

この間、圧力一定であることを考慮すれば、内部気体が風船の膜（を介して大気）にする仕事は $P - V$ 図より、

$$W_A = W_B = p_0(V_A - V_0) = nR(T_1 - T_0).$$

内部エネルギー変化は公式より、

$$\Delta U_A = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_0), \quad \Delta U_B = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_0).$$

以上から、熱力学第 1 法則より、

$$\begin{aligned} Q &= Q_A + Q_B \\ &= \Delta U_A + W_A + \Delta U_B + W_B \\ &= \underbrace{6nRT_0 \left(\frac{M_A + M_B}{2M} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

問 4 始状態の内部気体の体積を V_2 とする*7. ポアソンの公式より、

$$\begin{cases} ap_0V_A^{\frac{5}{3}} = p_0V_2^{\frac{5}{3}}, \\ ap_0V_B^{\frac{7}{5}} = p_0V_2^{\frac{7}{5}}, \end{cases} \quad \therefore V_A = a^{-\frac{3}{5}}V_2, \quad V_B = a^{-\frac{5}{7}}V_2.$$

よって、始状態、および終状態の状態方程式より、

$$\begin{cases} p_0V_2 = nRT_2, \\ ap_0V_A = nRT_A, \\ ap_0V_B = nRT_B, \end{cases} \quad \therefore T_A = \underbrace{a^{\frac{2}{5}}T_2}, \quad T_B = \underbrace{a^{\frac{2}{7}}T_2}.$$

問 5 大気圧が ap_0 の高度の地点での大気の密度を ρ とする. 熱交換をする前の気球のつりあいより、

$$0 = \rho(V_A + V_B)g - n(M_A + M_B)g, \quad \therefore \rho = \frac{M_A + M_B}{V_A + V_B}n = \frac{ap_0(M_A + M_B)}{R(T_A + T_B)}.$$

よって、熱交換した後の冷却後元の高度に戻った気球の状態方程式、およびつりあいより*8、

$$\begin{cases} ap_0V_A^* = nRT_3, \\ ap_0V_B^* = nRT_3, \\ 0 = \rho(V_A^* + V_B^*)g - n(M_A + M_B)g \end{cases} \quad \therefore T_3 = \frac{ap_0(M_A + M_B)ng}{2nR\rho} = \frac{1}{2}(T_A + T_B).$$

【補足】問 4 で内部気体が外部にした仕事

この準静的な断熱過程における内部エネルギー変化は、公式より、

$$\Delta U_A = \frac{3}{2}nR(a^{\frac{2}{5}} - 1)T_2, \quad \Delta U_B = \frac{3}{2}nR(a^{\frac{2}{7}} - 1)T_2.$$

*7 後述の始状態の状態方程式より、A、B の体積が等しいことがわかる。

*8 文字指定に注意する。 T_A 、 T_B は以前の問題で T_2 を用いて表せているが、ここでは T_2 を用いてはいけない。

よって、熱力学第 1 法則より、

$$W_A = -\Delta U_A = \frac{3}{2}nR(1 - a^{\frac{2}{5}})T_2, \quad W_B = -\Delta U_B = \frac{3}{2}nR(1 - a^{\frac{2}{7}})T_2.$$

なお、準静的な断熱過程においてポアソンの公式が成り立ち、途中状態での容器内の気体の圧力を p 、体積を V とすると、

$$pV^\gamma = p_0V_2^\gamma, \quad \therefore p = p_0 \left(\frac{V_2}{V} \right)^\gamma.$$

よって、 $p - V$ 図の面積から、

$$W = \int_{V_2}^V p dV = \int_{V_2}^V p_0 \left(\frac{V_2}{V} \right)^\gamma dV = \left[-\frac{p_0V_2^\gamma}{\gamma-1} V^{1-\gamma} \right]_{V_2}^V = \frac{p_0V_2}{\gamma-1} \left\{ 1 - \left(\frac{V_2}{V} \right)^{\gamma-1} \right\}$$

ここに、 $\gamma = \frac{5}{3}$ 、 $V = a^{-\frac{3}{5}}V_2$ 、 $V_2 = \frac{nRT_2}{p_0}$ などを代入すれば上記の結果を再現することが確かめられる。

B : ドップラー効果

【メモ】

・ドップラー効果は、大きく分けて公式導出問題と公式を使う問題に分類でき、このは公式を使う問題に属する。

【解答】

問6 回転角が π となる時刻を求めて、

$$\omega t = \pi, \quad \therefore t = \frac{\pi}{\omega}.$$

問7 観測者が角度 θ にいるときの、 \vec{v} , \vec{SP} はそれぞれ、

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \theta \\ +r\omega \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\vec{SP} = \vec{OP} - \vec{OS} = \begin{pmatrix} r \cos \theta - d \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

ここで、 \vec{SP} の絶対値は、

$$|\vec{SP}|^2 = (r \cos \theta - d)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta$$

$$\therefore |\vec{SP}| = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}.$$

よって、速度 \vec{v} の線分 SP に沿った成分は*9、

$$v_{SP} = \vec{v} \cdot \frac{\vec{SP}}{|\vec{SP}|} = \frac{rd\omega \sin \theta}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}}.$$

問8 題意より*10、

$$\max\{v_{SP}\} = \frac{rd\omega \sqrt{1 - \left(\frac{d}{r}\right)^2}}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\omega \frac{d}{r}}} = \underbrace{d\omega}_{(a)}.$$

*9 $\frac{\vec{SP}}{|\vec{SP}|}$ は S から P に向かう単位ベクトル。単位ベクトルとの内積ゆえ、内積を取ったベクトルの単位ベクトルの方向成分が得られる。

*10 【補足】を参照。

観測者の観測する音に振動数は,

$$f = \frac{V - v_{\text{SP}}}{V} f_0$$

と与えられるので, 観測する音の振動数の最小値は,

$$\min\{f\} = \underbrace{\frac{V - d\omega}{V}}_{(b)} f_0 .$$

問9 問8と同様に考えて,

$$\max\{f\} = \frac{V + d\omega}{V} f_0 .$$

問10 $r = 2d$ のとき, v_{SP} を最大 (f を最小) にする θ は,

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3} .$$

同様に, v_{SP} を最小 (f を最大) にする θ は $\theta = \frac{5}{3}\pi$ ゆえ,

$$\omega t = \frac{5}{3}\pi - \frac{\pi}{3}, \quad \therefore t = \frac{4\pi}{3\omega} .$$

【補足】 $\cos \theta = \frac{d}{r}$ のチェック

v_{SP} は, 以下のように変形でき,

$$v_{\text{SP}} = \frac{rd\omega \sin \theta}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\omega \cos \theta}} = \begin{cases} +\omega\sqrt{rd} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta}{r/d + d/r - 2\cos \theta}} & (0 \leq \theta < \pi), \\ -\omega\sqrt{rd} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta}{r/d + d/r - 2\cos \theta}} & (\pi \leq \theta < 2\pi), \end{cases}$$

$a = \frac{r}{d} + \frac{d}{r}$ ($a > 2$) として^{*11}, 以下のように, $0 \leq \theta < 2\pi$ で関数 $g(\theta)$ を定義する.

$$g(\theta) = \frac{1 - \cos^2 \theta}{a - 2\cos \theta} .$$

$f(\theta)$ の導関数は,

$$\frac{dg(\theta)}{d\theta} = -\frac{2\sin \theta(\cos^2 \theta - a\cos \theta + 1)}{(a - 2\cos \theta)^2} .$$

^{*11} 相加平均・相乗平均の関係から $a \geq 2$ であり, $r > d$ より等号成立は成り立たない.

$$\frac{dg}{d\theta} = 0 \text{ を満たす } \theta \text{ は, } a = \frac{r}{d} + \frac{d}{r} \text{ より}^{*12},$$

$$2 \sin \theta \left\{ \cos^2 \theta - \left(\frac{r}{d} + \frac{d}{r} \right) \cos \theta + 1 \right\} = 0$$

$$2 \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{d}{r} \right) \left(\cos \theta - \frac{r}{d} \right) = 0, \quad \theta = 0, \pi, \quad \cos \theta = \frac{d}{r}.$$

ここで、増減表を書くなどして増減を調べれば、 $\theta = 0, \pi$ はともに極小値を与えることがわかり、 $\cos \theta = \frac{d}{r}$ でのみ極大値を取ることがわかる（以下グラフ）。

なお、グラフからも θ が π の整数倍の位置（観測者の円運動の中心 O と、観測者の位置 P 、音源の位置 S が一直線上に並ぶ瞬間）では $g = 0$ となり（当然 v_{SP} も 0）、観測者は音源が聞く音と同じ振動数の音を聞くことがわかる。

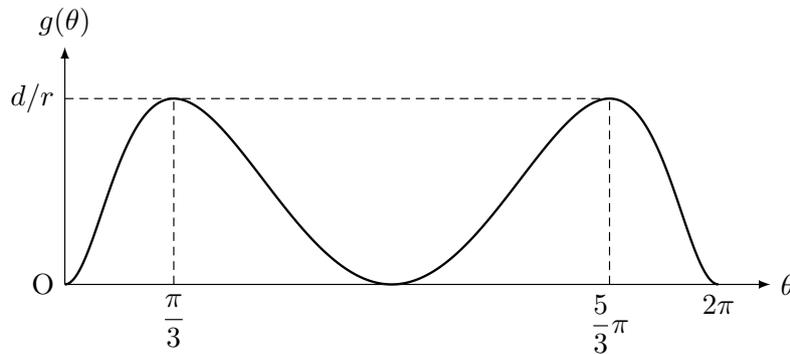


図1 $g - \theta$ グラフ

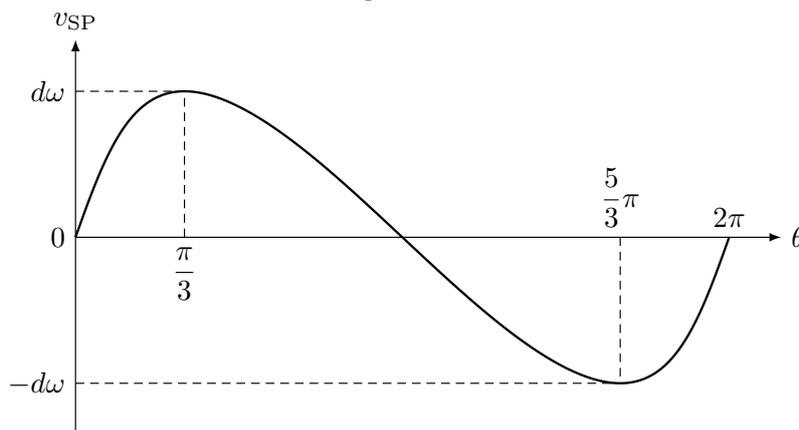


図2 $v_{SP} - \theta$ グラフ

^{*12} $\cos \theta = \frac{r}{d}$ は $r > d$ より実数解なし。