1 等速円運動，非等速円運動，衝突

【メモ】

・問(1)は等速円運動に関する問題．等速円運動は，以下 2 式を立式．

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{つりあい（←使わないことも）} \end{cases}$$

・問(2)は非等速円運動に関する問題．非等速円運動は，以下 2 式を立式．

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

・問(1)，問(2)に共通して衝突に関する問題．衝突は，以下 2 式を連立．

$$\begin{cases} \text{衝突の直前．直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{cases}$$

なお，衝突に関与する物体が外力によって固定されているとき運動量保存則は成り立たない．

【解答】

問(1) (a) 速さ一定で $2\pi r$ 進む時間を求めて，

$$T = \underset{\sim\sim}{\frac{2\pi r}{v_0}}.$$

(b) 衝突ゆえ，衝突直前・直後の運動量保存則，および条件（はね返り係数の式）より，

$$\begin{cases} m_\mathrm{A}v_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}v_\mathrm{B} = m_\mathrm{A}v_0 + m_\mathrm{B}(-v_0)\,, \\ v_\mathrm{A} - v_\mathrm{B} = -\{v_0 - (-v_0)\} \end{cases}$$

$$\therefore v_\mathrm{A} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{m_\mathrm{A} - 3m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}v_0}\,,\quad v_\mathrm{B} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3m_\mathrm{A} - m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}v_0}\,.$$

(c) O を原点とし，円筒の正方向に沿った座標軸として s 軸を定め，小球 A，B の位置をそれぞれ s_A，s_B とする．1 回目の衝突時を $t = 0$ とすると，

$$\begin{cases} s_\mathrm{A} = v_\mathrm{A}t\,, \\ s_\mathrm{B} = v_\mathrm{B}t \end{cases}$$

であり，問(1)(b)より $v_\mathrm{B} > v_\mathrm{A}$ であるから[*1]2 回目の衝突時刻は $s_\mathrm{B} - s_\mathrm{A} = 2\pi r$ となる時刻を求めて，

$$s_\mathrm{B} - s_\mathrm{A} = 2\pi r \qquad \therefore t = \frac{2\pi r}{(v_\mathrm{B} - v_\mathrm{A})r} = \underset{\sim\sim}{\frac{\pi r}{v_0}}\,(= T_1)\,.$$

[*1] 運動の状況から明らかである．$m_\mathrm{A} - 3m_\mathrm{B} \gtreqless 3m_\mathrm{A} - m_\mathrm{B}$ を判定してもよい．

(d)　問(1)(b)の v_A，v_B に対し $\dfrac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}} \fallingdotseq 0$ と近似して，

$$v_\mathrm{A} = \frac{-3 + m_\mathrm{A}/m_\mathrm{B}}{1 + m_\mathrm{A}/m_\mathrm{B}} v_0 \fallingdotseq -3v_0\,, \quad v_\mathrm{B} = \frac{-1 + 3m_\mathrm{A}/m_\mathrm{B}}{1 + m_\mathrm{A}/m_\mathrm{B}} v_0 \fallingdotseq -v_0\,.$$

よって，(イ)，(ウ)，(オ)に絞られる．

続いて，2 回目の衝突から 3 回目の衝突までの時間間隔を考える．2 回目の衝突直後の小球 A，B の速度をそれぞれ v'_A，v'_B とする．衝突直前・直後の運動量保存則，および条件（はね返り係数の式）より，

$$\begin{cases} m_\mathrm{A} v'_\mathrm{A} + m_\mathrm{B} v'_\mathrm{B} = m_\mathrm{A}(-3v_0) + m_\mathrm{B}(-v_0)\,, \\ v'_\mathrm{A} - v'_\mathrm{B} = -\{-3v_0 - (-v_0)\} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 + v'_\mathrm{B} \fallingdotseq -v_0\,, \\ v'_\mathrm{A} - v'_\mathrm{B} = -\{-3v_0 - (-v_0)\} \end{cases} \qquad \therefore v_\mathrm{A} = v_0\,, \quad v_\mathrm{B} = -v_0\,.$$

よって，$v'_\mathrm{A} v'_\mathrm{B}$ であるため $s_\mathrm{A} - s_\mathrm{B} = 2\pi r$ となる時間を求めればよい．よって，2 回目の衝突から 3 回目の衝突までの時間間隔 T_2 は，

$$T_2 = \frac{2\pi r}{v'_\mathrm{A} - v'_\mathrm{B}} = \frac{\pi r}{v_0}$$

であり，1 回目の衝突から 2 回目の衝突までの時間間隔と同じである．よって，(オ) のグラフが適当[*2]．

問(2) (a)　小球 A のエネルギー収支より，

$$\frac{1}{2} m_\mathrm{A} {V_0}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \\ -2r \end{pmatrix} = 2mgr \qquad \therefore V_0 = 2\sqrt{gr}\,.$$

(b)　円の中心 $(0, r)$ を C，小球 A のある点を A とする．$\angle\mathrm{OCA} = \theta$，角度 θ にあるときの小球 A の速さを v，小球 A が受ける垂直抗力の大きさを N とする．運動方程式（中心成分），および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} m_\mathrm{A} \dfrac{v^2}{r} = N - m_\mathrm{A} g \cos\theta\,, \\ \dfrac{1}{2} m_\mathrm{A} v^2 + m_\mathrm{A} g(-r\cos\theta) = m_\mathrm{A} g r \end{cases} \qquad \therefore N = m_\mathrm{A} g(2 + 3\cos\theta)$$

となり，$N = 0$ となるとき，$\cos\theta = -\dfrac{2}{3}$ であるから，

$$y_0 = r - r\cos\theta = r - r\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} r\,.$$

[*2] もっと簡単に：はね返り係数 1 より，相対速度の大きさは常に一定である．そのため，衝突の時間間隔は一定であり，このことから(オ)のグラフが適当とわかる．

(c)　衝突直後の小球 A，C の速度をそれぞれ V_{A}，V_{C} とする（直前の速度はそれぞれ V_0，$-V_0$ である）．衝突直前・直後の運動量保存則，および条件（はね返り係数の式）より，

$$\begin{cases} m_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}+3m_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{C}}=m_{\mathrm{A}}V_0+3m_{\mathrm{A}}(-V_0)\,, \\ V_{\mathrm{A}}-V_{\mathrm{C}}=-\{V_0-(-V_0)\} \end{cases} \qquad \therefore V_{\mathrm{A}}=-2V_0\,,\quad V_{\mathrm{C}}=0\,.$$

よって，C はその場で静止し，2 回目の衝突後の位置は $(x_1,y_1)=\underline{(0,0)}$ となる．

(d)　2 回目の衝突直前・直後の運動量保存則，および条件（はね返り係数の式）より，

$$\begin{cases} m_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A2}}+3m_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{C2}}=m_{\mathrm{A}}(-4V_0)+3m_{\mathrm{A}}\cdot 0\,, \\ V_{\mathrm{A}}-V_{\mathrm{C}}=-(-4V_0-0) \end{cases}$$
$$\therefore V_{\mathrm{A2}}=V_0=\underline{2\sqrt{gr}}\,,\quad V_{\mathrm{C2}}=-V_0=\underline{-2\sqrt{gr}}\,.$$

よって，両小球はこの直後，速さ V_0 で円筒面に沿った運動を行う．これは，問(2)(a)，(b)に相当する（小球 C については $m_{\mathrm{A}}\to 3m_{\mathrm{A}}$ とすればよい）．小球 A は $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}r,\dfrac{5}{3}r\right)$ で円筒面から離れ投射運動に切り替わり，その瞬間の小球 A の速さは，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v^2+m_{\mathrm{A}}g\cdot\frac{5}{3}r=\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}(2\sqrt{gr})^2 \qquad \therefore v=\sqrt{\frac{2}{3}gr}$$

と求まり，離れる瞬間の速度の x 成分は $v\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$ である．翻って，同時刻の小球 C の離れる位置は $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}r,\dfrac{5}{3}r\right)$ であり，この瞬間の速度の x 成分は $-v\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$ である．よって，離れる瞬間の時刻を $t=0$ としたとき，小球 A，C の位置 x_{A}，x_{C} はそれぞれ[*3]，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}r+v\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)t=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}r-v\cos\theta t\,, \\ x_{\mathrm{B}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}r-v\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)t=\dfrac{\sqrt{5}}{3}r+v\cos\theta t \end{cases}$$

となり，衝突時刻は[*4]，

$$-\frac{\sqrt{5}}{3}r-v\cos\theta t=\frac{\sqrt{5}}{3}r+v\cos\theta t \qquad \therefore t=-\frac{r}{v}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\underline{\sqrt{\frac{15}{8}\frac{r}{g}}}\,.$$

また，このとき両小球の位置 x_3 は[*5]，

$$x_3=-\frac{\sqrt{5}}{3}r-v\cos\theta t=-\frac{\sqrt{5}}{3}r-\sqrt{\frac{2}{3}gr}\left(-\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{15}{8}\frac{r}{g}}=\underline{0}\,.$$

[*3] 次の恒等式を利用：$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$

[*4] $\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ を用いた．

[*5] 小球 A，C の運動が左右対称であることから $x_3=0$ は想像できる．

2 中身の見えるコンデンサ，電気回路（振動回路）

【メモ】

・問(1)，問(2)は中身の見えるタイプのコンデンサに関する出題．

・問(3)は電気回路（振動回路）の問題．回路の状態決定は定石に従う．

【解答】

問(1) (a)　容量は公式より，

$$C = \underline{\varepsilon_0 \frac{S}{d}}.$$

極板 A の帯電量はキルヒホッフ則より，

$$V - \frac{Q}{C} = 0 \qquad \therefore Q = CV = \underline{\frac{\varepsilon_0 SV}{d}}.$$

(b)　コンデンサの蓄える静電エネルギーは公式より，

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \underline{\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d}}.$$

充電が済むまでに電池のした仕事もまた公式より，

$$W = \Delta QV = (CV - 0)V = \underline{\frac{\varepsilon_0 SV^2}{d}}.$$

問(2) (a)　極板間隔を半分にすると，コンデンサの容量は $2C$ となる[*6]．このときの極板 A の帯電量 Q' はキルヒホッフ則より，

$$V - \frac{Q'}{C} = 0 \qquad \therefore Q' = 2CV$$

であるから，コンデンサの蓄える静電エネルギー変化は，

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{(2CV)^2}{2C} - \frac{1}{2}\frac{(CV)^2}{C} = \underline{\frac{1}{2}CV^2}.$$

(b)　このとき，コンデンサの容量は C であり，電荷保存則から極板 A の帯電量は $2CV$ である．よって，公式より，

$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{(2CV)^2}{C} = \underline{2CV^2}.$$

[*6] $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$ より，$d \to d/2$ とすればわかる．

問(3)　スイッチを閉じた時刻を $t=0$ とすると，電荷保存則より $t=0$ で $Q=2CV$ であり，コイルの性質（電流の連続性）より $I=0$ である．なお，ここでは電流 I は図の時計回り，すなわち $I=-\dfrac{dQ}{dt}$ と定める[*7].

(a)　キルヒホッフ則より，

$$-L_1\frac{dI}{dt}-L_2\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

$$-L_1\frac{d}{dt}\left(-\frac{dQ}{dt}\right)-L_2\frac{d}{dt}\left(-\frac{dQ}{dt}\right)+\frac{Q}{C}=0$$

$$\therefore (L_1+L_2)\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{Q}{C}=0 \qquad \therefore \frac{d^2Q}{dt^2}=-\frac{Q}{(L_1+L_2)C}$$

となり，極板 A の帯電量 Q は角振動数 $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}$，振動中心 $Q=0$ の単振動を行う．よって，初期条件より，

$$Q=2CV\cos\left(\frac{t}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}\right)$$

であり[*8],

$$I=-\frac{dQ}{dt}=2V\sqrt{\frac{C}{L_1+L_2}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}\right) \qquad \therefore I_{\max} = 2V\sqrt{\frac{C}{L_1+L_2}}\,.$$

また，コイル 1 の電位降下 V_1 は[*9],

$$V_1=L_1\frac{dI}{dt}=\frac{2L_1}{L_1+L_2}V\cos\left(\frac{t}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}\right) \qquad \therefore V_{\max}=\frac{2L_1}{L_1+L_2}V\,.$$

(b)　コイルの蓄えるエネルギーは公式より，

$$U=\frac{1}{2}L_1I^2=\frac{2L_1}{L_1+L_2}CV^2\sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}\right)$$

$$=\frac{L_1}{L_1+L_2}CV^2\left\{1-\cos\left(\frac{2t}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}\right)\right\}$$

であり，グラフは (オ) が適当．また，最大値 $U_{\max}$，および周期 τ はそれぞれ，

$$U_{\max}=\frac{2L_1}{L_1+L_2}CV^2\,,\quad \tau=\pi\sqrt{(L_1+L_2)C}\,.$$

[*7] 反時計回りに定めれば $I=\dfrac{dQ}{dt}$ となるが，この場合，以降の議論においてコイルの電位降下が反転するため結果は一致する．

[*8] 回路のエネルギー保存則を利用：$\dfrac{1}{2}\dfrac{0^2}{C}+\dfrac{1}{2}L_1{I_{\max}}^2+\dfrac{1}{2}L_2{I_{\max}}^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{(2CV)^2}{C}+\dfrac{1}{2}L_1\cdot 0^2+\dfrac{1}{2}L_2\cdot 0^2\,.$

[*9] 電流の流れる向きに下がる．抵抗やコンデンサと変わらないことに注意．「逆起電力」などの言葉がちらついて間違わないように．

【補足】問(3)の回路のエネルギー保存則

電流は時計回りを正とする．すなわち，極板 A の帯電量 Q と，回路を流れる電流 I の間には

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

が成り立つ．

さて，キルヒホッフ則より，

$$-L_1\frac{dI}{dt} - L_2\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

であり，この両辺に $-I = \dfrac{dQ}{dt}$ をかければ，

$$\begin{aligned} L_1 I\frac{dI}{dt} + L_2 I\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} &= 0 \\ \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 I^2 + \frac{1}{2}L_2 I^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) &= 0 \end{aligned}$$

を得る．これがこの回路のエネルギー収支の式であり，括弧の中身（コイル 1，コイル 2，コンデンサの蓄えるエネルギーの総和）の時間変化率が 0 であることから括弧の中身は一定値を取る．すなわち，

$$\therefore \frac{1}{2}L_1 I^2 + \frac{1}{2}L_2 I^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \text{const}$$

となり，回路のエネルギー保存則が導出された．なお，右辺は初期条件から求まり，今の場合 $I = 0$，$Q = 2CV$ を代入したものとなる．

3 幾何光学，干渉

【メモ】

・問(1)は干渉に関する問題．干渉条件は m を整数として，

$$(\text{位相差}) = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強め合い}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱め合い}) \end{cases}$$

と計算するようにする．位相差は $\dfrac{2\pi}{\lambda}$（経路差）に反射による位相のずれを加減すればよい[*10]．

・問(2)，問(3)は幾何光学に関する問題．幾何光学は，以下の 2 種類の式を連立する．

$$\begin{cases} \text{スネルの法則} \\ \text{図形の性質} \end{cases}$$

図形の考察は，何が与えられているかを踏まえ，次の手順で行うようにする．

$$\begin{cases} \text{角度のみ} & \rightarrow \begin{cases} \text{三角形の内外角に注目（二等辺三角形に注意）} \\ \text{平行性の性質を利用（錯角・同位角）} \end{cases} \\ \text{辺のみ} & \rightarrow \text{相似な三角形の相似比を利用} \\ \text{角と辺} & \rightarrow \text{三角比を利用（正弦定理・余弦定理に注意）} \end{cases}$$

【解答】

問(1) (a) 明線条件は m を整数として[*11]，

$$\frac{2\pi}{\lambda/n_1}\cdot 2d_1 + \pi - \pi = 2m\pi \qquad \therefore d_1 = \frac{\lambda}{2n_1}m\,.$$

正かつ最初のものを考えて，

$$\min\{d_1\} = \underline{\frac{\lambda}{2n_1}}\,.$$

(b) 屈折角を θ_1 とする．スネル則，および明線条件より，

$$\begin{cases} n_1\sin\theta_1 = \sin\theta_0\,, \\ \dfrac{2\pi}{\lambda/n_1}\cdot 2d_1\cos\theta_1 = 2m\pi \end{cases} \qquad \therefore d_1 = \frac{m\lambda}{2n_1\cos\theta 1} = \underline{\frac{m\lambda}{2\sqrt{{n_1}^2 - \sin^2\theta_1}}}..$$

(c) スネル則より，

$$\begin{cases} n_1\sin\theta_1 = \sin\theta_0\,, \\ n_2\sin\theta_2 = n_1\sin\theta_1 \end{cases} \qquad \therefore \underline{n_2\sin\theta_2 = \sin\theta_0}\,.$$

---

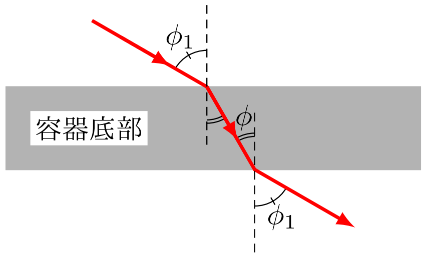
*10 屈折率 n の媒質中では波長 λ を $\dfrac{\lambda}{n}$ とする．

*11 第 2 項，第 3 項は反射による位相のずれ．2 つの境界面での反射光は共に位相が π ずれるため，位相差には寄与しない．このような場合は以降省略するものとする．

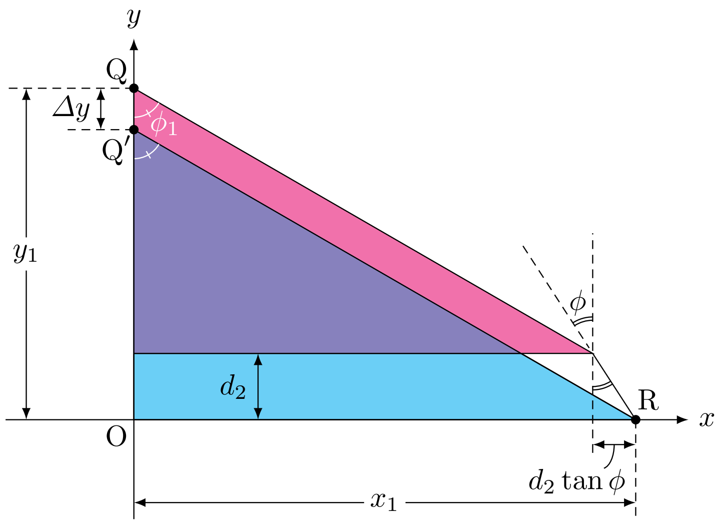
問(2) (a) 屈折角を ϕ とする．スネル則より，

$$\begin{cases} n_2 \sin\phi = \sin\phi_1\,, \\ \sin\phi_0 = n_2 \sin\phi \end{cases} \qquad \therefore\ \phi_0 = \underset{\sim\sim}{\phi_1}\,.$$

また，$\sin\phi = \dfrac{1}{n_2}\sin\phi_1 < \sin\phi_1$ より $\phi < \phi_1$ である．以上を踏まえれば，容器底部近傍での経路は以下の図のようになる．



(b) 問題文中の図 2 中において，Q，Q' を頂点とし，一角の大きさが ϕ_1 である直角三角形は以下の図のようになる．



2 つの直角三角形の辺の比，およびスネル則より[*12*13]，

$$\begin{cases} x_1 = (y_1 - \Delta y)\tan\phi_1\,, \\ x_1 - d_2\tan\phi = (y_1 - d_2)\tan\phi_1\,, \\ n_2\sin\phi = \sin\phi_1 \end{cases} \qquad \therefore\ \Delta y = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{d_2\left(1 - \frac{\cos\phi}{\sqrt{{n_2}^2 - \sin^2\phi}}\right)}\,.$$

問(3) 外部とガラス板の境界面における屈折角を α，ガラス板と液体の境界面における屈折角を β とする．スネル則より，

$$\begin{cases} 2\sin\alpha = \sin\theta\,, \\ \sqrt{2}\,\sin\beta = 2\sin\alpha \end{cases} \qquad \therefore\ \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\,.$$

[*12] 辺と角の両方が与えられているので三角比を考える．

[*13] ϕ に関する三角比：$\sin\phi = \dfrac{1}{n_2}\sin\phi_1$，$\cos\phi = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sin\phi_1}{n_2}\right)^2}$，$\tan\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi} = \dfrac{\sin\phi_1}{\sqrt{{n_2}^2 - \sin^2\phi_1}}$．

このとき，液面と外部の境界面における入射角は $90^\circ - (15^\circ + \beta)$ である．液体と外部の境界面における屈折角を γ とすれば，スネル則より，

$$\sin\gamma = \sqrt{2}\,\sin\{90^\circ - (15^\circ + \beta)\} = \sqrt{2}\,\sin(75^\circ - \beta)$$

であり，液面において全反射したことから屈折角 γ が存在しない条件 $\sin\gamma > 1$ を考えて，

$$\begin{aligned} \sin\gamma = \sqrt{2}\,\sin(75^\circ - \beta) &> 1 \\ \sin(75^\circ - \beta) &> \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \beta < 30^\circ\,. \end{aligned}$$

よって，スネル則より，

$$\begin{aligned} \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta &< \sin 30^\circ \\ \sin\theta &< \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \theta < 45^\circ\,. \end{aligned}$$