1 動く座標系，多体系，衝突

【メモ】

・問(1)，問(2)は動く座標系内部での物体の運動を問う問題．設問はともに抗力の存在条件．

・問(2)は衝突に関する問題．衝突は，以下 2 式を連立．

$$\begin{cases}\text{衝突の直前．直後の運動量保存則}\\ \text{問題で指示された条件}\end{cases}$$

なお，衝突に関与する物体が外力によって固定されているとき運動量保存則は成り立たない．

【解答】

問(1) (a)　重力と慣性力の合力の各成分は，

$$F_x = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-m_{\mathrm{B}}g\sin\theta + m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{A}}\cos\theta}\,,\quad F_y = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-m_{\mathrm{B}}g\cos\theta - m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{A}}\sin\theta}\,.$$

(b)　小球 B が物体 A，および物体 A の平板から受ける垂直抗力の x 成分を N_x，y 成分を N_y とする．A に固定された座標系 xy 系（以降 A 固定系と呼ぶ）において小球 B が静止しているとき（平板と接しているとき）の，A 固定系における小球 B のつりあいより，

$$m\cdot 0 = N_x + F_x \qquad \therefore N_x = -F_x = m_{\mathrm{B}}g\sin\theta - m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{A}}\cos\theta\,.$$

$N_x > 0$ であれば離れていない状態であるから，離れる瞬間はその対偶 $N \leq 0$ を考えて[*1]，

$$N_x = m_{\mathrm{B}}g\sin\theta - m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{A}}\cos\theta \leq 0 \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{a_{\mathrm{A}} \geq \tan\theta}\,.$$

問(2)　地面固定系として水平左向きに X 軸，鉛直上向きに Y 軸を定め，原点をばねが自然長となるときの物体 A の位置に定める．すなわち $t=0$ において $X(0) = -L$ であり，$\dot{X}(0) = 0$ である．

(a)　2 物体が一体のまま運動している間を考える．小球 B が物体 A から受ける垂直抗力の x 成分を N_x，y 成分を N_y，物体 A の位置を X とする．地面固定系の物体 A の運動方程式，および A 固定系における小球 B のつりあいより，物体 A の加速度 a_{A} は[*2]，

$$\begin{cases} m_{\mathrm{A}}a_{\mathrm{A}} = -kX + N_x\cos\theta - N_x\sin\theta\,,\\ \begin{cases} m_{\mathrm{B}}\cdot 0 = N_x - m_{\mathrm{B}}g\sin\theta + m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{A}}\cos\theta\,,\\ m_{\mathrm{B}}\cdot 0 = N_y - m_{\mathrm{B}}g\cos\theta - m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{A}}\sin\theta \end{cases}\end{cases} \qquad \therefore a_{\mathrm{A}} = -\frac{k}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}X$$

[*1] これはあくまでも「抗力が値を持って存在しているとき 2 物体は接触している」という命題の対偶を考えているだけであり，実際に $N<0$ となることはないことに注意したい．等号の有無に関してはどちらでも良い．

[*2] 全て地面固定系で考えた場合：$\begin{cases} m_{\mathrm{A}}a_{\mathrm{A}} = -kX + N_x\cos\theta - N_x\sin\theta\,,\\ m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{A}} = -N_x\cos\theta - N_y\sin\theta\,,\\ m_{\mathrm{B}}\cdot 0 = N_x\sin\theta + N_y\cos\theta - m_{\mathrm{B}}g\,.\end{cases}$

となり，振動中心 $X=0$，角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}}$ の単振動を行うことがわかる．一体となっている間の物体 A の位置 X は，初期条件より，

$$X=-L\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}}\,t\right)$$

と表され，X の取り得る範囲が $-L\leq X\leq L$ であることがわかる[*3]．また，運動方程式より，

$$N_x=-m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{A}}\cos\theta+m_{\mathrm{B}}g\sin\theta=-\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}kX\cos\theta+m_{\mathrm{B}}g\sin\theta$$

であり，N_x の最小値 $\min\{N_x\}$ が $\min\{N_x\}\leq 0$ であれば小球 B は平板から離れる．よって，

$$\min\{N_x\}=-\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}kL\cos\theta+m_{\mathrm{B}}g\sin\theta\leq 0 \qquad \therefore L\geq\frac{(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})g}{k}\tan\theta\,.$$

(b)　運動方程式より，

$$N_y=m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{A}}\sin\theta+m_{\mathrm{B}}g\cos\theta=\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}kX\sin\theta+m_{\mathrm{B}}g\cos\theta$$

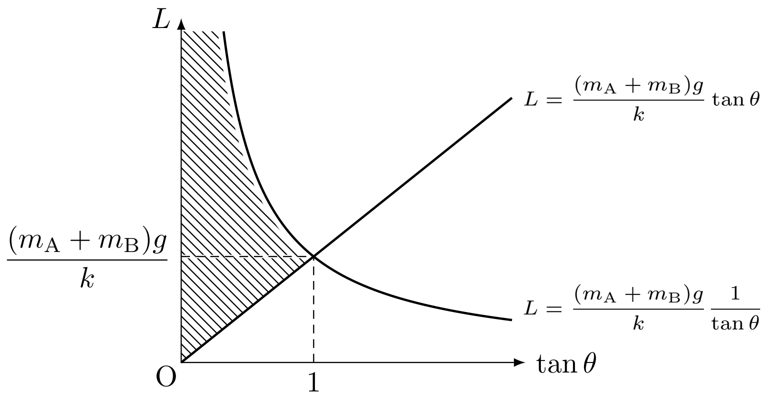
であり，小球 B が物体 A と接触を保っているとき N_y は恒等的に正の値を取ることから，N_y の最小値 $\min\{N_y\}$ は $\min\{N_y\}>0$ を満たす．よって，

$$\min\{N_y\}=-\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}kL\sin\theta+m_{\mathrm{B}}g\cos\theta>0 \qquad \therefore L<\frac{(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})g}{k}\frac{1}{\tan\theta}\,.$$

(c)　問(2)(b),(c)より，このような運動が実現する L の範囲は，

$$\frac{(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})g}{k}\tan\theta\leq L<\frac{(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})g}{k}\frac{1}{\tan\theta}$$

であり，これを図示すれば次の図のようになる．



また，このような L の存在しない θ の範囲は，$\dfrac{(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})g}{k}\dfrac{1}{\tan\theta}\leq\dfrac{(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})g}{k}\tan\theta$ となるときで，設定から $\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\frac{(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})g}{k}\frac{1}{\tan\theta}\leq\frac{(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})g}{k}\tan\theta \qquad \therefore (\theta_{\max}=)\,\frac{\pi}{4}\leq\theta<\frac{\pi}{2}\,.$$

[*3] $-L\leq X\leq L$ がわかればよいので，わざわざ時刻 t の関数として表す必要はない．

問(3)　物体 A，小球 C の地面固定系での速度をそれぞれ $\vec{V}_{\mathrm{A}} = (v_{\mathrm{A}}, 0)$，$\vec{V}_{\mathrm{C}} = (v_{\mathrm{C},x}, v_{\mathrm{C},y})$，A に対する C の相対速度を $\vec{V}_{\mathrm{AC}}$ とする．なお，問題文では $\vec{V}_{\mathrm{AC}} = \vec{v}_{\mathrm{C}}$ であることに注意．

(a)　衝突直前の A に対する C の相対速度 $\vec{V}_{\mathrm{AC}}$ が斜面に沿った方向に大きさ v_{C} であるから，衝突直前の小球 C の地面固定系における速度は

$$\vec{V}_{\mathrm{AC}} = \vec{V}_{\mathrm{C}} - \vec{V}_{\mathrm{A}}$$

$$\begin{pmatrix} v_{\mathrm{C}}\cos 30^\circ \\ v_{\mathrm{C}}\sin 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{C},x} \\ v_{\mathrm{C},y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{\mathrm{A}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} v_{\mathrm{C},x} \\ v_{\mathrm{C},y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{A}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_{\mathrm{C}} \\ -\dfrac{1}{2}v_{\mathrm{C}} \end{pmatrix}$$

と求まる．よって，運動量の X 成分の保存則，および条件（一体となる）より，

$$m_{\mathrm{A}}v'_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}v'_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}\left(v_{\mathrm{A}} + \frac{\sqrt{3}}{2}v_{\mathrm{C}}\right) \qquad \therefore v'_{\mathrm{A}} = \underline{v_{\mathrm{A}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}}v_{\mathrm{C}}}\,.$$

(b)　衝突時のばねの縮みを X_0 とする．始状態から衝突直前までの物体 A，小球 C のエネルギー収支は，

$$\mathit{\Delta}K_{\mathrm{A}} + \mathit{\Delta}K_{\mathrm{C}} = \int_{-L}^{X_0}(-kX)\,dX = -\frac{1}{2}k{X_0}^2 + \frac{1}{2}kL^2\,.$$

衝突後からばねの伸びが最大となるまでの一体となった物体 A と小球 C のエネルギー収支は，

$$\mathit{\Delta}K_{\mathrm{A+C}} = \int_{X_0}^{L'}(-kX)\,dX = -\frac{1}{2}k{L'}^2 + \frac{1}{2}k{X_0}^2\,.$$

以上 2 式より[*4]，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}k{L'}^2 &= \frac{1}{2}kL^2 - \mathit{\Delta}K_{\mathrm{A+C}} - \mathit{\Delta}K_{\mathrm{A}} - \mathit{\Delta}K_{\mathrm{C}} \\
&= \frac{1}{2}kL^2 - \left\{0 - \frac{1}{2}(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}){v'_{\mathrm{A}}}^2\right\} - \left(\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}{v_{\mathrm{A}}}^2 - 0\right) \\
&\quad - \left[\frac{1}{2}m_{\mathrm{C}}\left\{\left(v_{\mathrm{A}} + \frac{\sqrt{3}}{2}v_{\mathrm{C}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}v_{\mathrm{C}}\right)^2\right\} - 0\right] \\
&= \frac{1}{2}kL^2 + \frac{1}{2}(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}})\left(v_{\mathrm{A}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}}v_{\mathrm{C}}\right)^2 - \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}{v_{\mathrm{A}}}^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}m_{\mathrm{C}}\left({v_{\mathrm{A}}}^2 + {v_{\mathrm{C}}}^2 + \sqrt{3}\,v_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{C}}\right) \\
&= \frac{1}{2}kL^2 - \frac{1}{8}\frac{4m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}}m_{\mathrm{C}}{v_{\mathrm{C}}}^2 \\
\therefore L' &= \underline{L\sqrt{1 - \frac{m_{\mathrm{C}}{v_{\mathrm{C}}}^2}{4kL^2}\frac{4m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}}}}\,.
\end{aligned}$$

[*4] この問題では，衝突で損失するエネルギーが 2 物体の相対運動エネルギーであることを使えない（なぜならこの衝突は 2 物体の衝突ではなく，物体 A，小球 C，床の 3 体衝突である）．

【補足 1】問(3)の衝突で設問になってもよさそうなアレコレ

衝突時，小球 C が受ける力積の X 成分を I_X，Y 成分を I_Y とする．小球 C の運動量収支より，

$$\begin{cases} m_\mathrm{C}v'_\mathrm{A} - m_\mathrm{C}\left(v_\mathrm{A} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_\mathrm{C}\right) = I_X\,, \\ m_\mathrm{C}\cdot 0 - m_\mathrm{C}\left(-d\tfrac{1}{2}v_\mathrm{C}\right) = I_Y \end{cases} \qquad \therefore I_X = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m_\mathrm{A}m_\mathrm{C}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{C}}v_\mathrm{C}\,,\quad I_Y = \frac{1}{2}m_\mathrm{C}v_\mathrm{C}\,.$$

この計算より，小球 C の受けた力積の大きさ I は，

$$I = \sqrt{{I_X}^2 + {I_Y}^2} = \frac{1}{2}m_\mathrm{C}v_\mathrm{C}\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{3}\,m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{C}}\right)^2}$$

であり，その方向は水平右向きの直線から反時計回りに θ を定めたとき，

$$\tan\theta = \left|\frac{I_Y}{I_X}\right| = \frac{\sqrt{3}\,m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{C}}$$

の方向である．大きさ的に違和感はあるが，$m_\mathrm{C} = 2m_\mathrm{A}$ と取れば $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ となる．

続いて，物体 A が床から受ける力積の大きさを J とする．物体 A の Y 方向の運動量収支より，

$$m_\mathrm{A}\cdot 0 - m_\mathrm{A}\cdot 0 = J - I_Y \qquad \therefore J = I_Y = \frac{1}{2}m_\mathrm{C}v_\mathrm{C}\,.$$

【補足 2】重心運動エネルギーと相対運動エネルギーと衝突

まず，2 物体の衝突について考える．簡単のため，1 次元衝突を扱う．質量 m，M の物体を想定し，衝突直前の 2 物体の速度をそれぞれ v，V（大文字同士が対応），衝突直後の 2 物体の速度をそれぞれ v'，V'，2 物体の間のはね返り係数を e とする．

■衝突直後の速度の決定

運動量保存則，および衝突の条件式（ここでははね返り係数の式）より，

$$\begin{cases} mv' + MV' = mv + MV\,, \\ v' - V' = -e(v - V) \end{cases}$$

$$\therefore v' = \frac{m - eM}{M+m}v + \frac{(1+e)M}{M+m}V\,,\quad V' = \frac{M - em}{M+m}V + \frac{(1+e)m}{M+m}v\,.$$

■重心運動エネルギーと相対運動エネルギー

2 物体の運動エネルギーの和は次のように書き換えができる．

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{MV+mv}{M+m}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(v-V)^2$$

右辺第 1 項は質量因子が全質量，速度因子が重心速度となっていることから重心運動エネルギーと呼ぶ．同様に，第 2 項は速度因子が相対速度となっていることから相対運動エネルギーと呼ぶ（相対運動エネルギーの質量に対応する因子を換算質量と呼ぶ）．

このことは以下のように右辺を崩していくことで容易に確認できる．

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{R.H.S}) &= \frac{1}{2}\frac{M^2V^2+2MmVv+m^2v^2}{M+m}+\frac{1}{2}\frac{Mmv^2-2MmVv+MmV^2}{M+m}\\
&= \frac{1}{2}\frac{m^2+Mm}{M+m}v^2+\frac{1}{2}\frac{M^2+Mm}{M+m}V^2\\
&= (\mathrm{L.H.S})\,.
\end{aligned}
$$

なお，以降 K_{CM} と書いた場合，始状態（および終状態）の重心運動エネルギーを指し，K_{rel} と書いた場合始状態の相対運動エネルギーを指す．

■ 2 体の衝突で損失するエネルギーが 2 体の相対運動エネルギーであること

衝突の前後で運動量が保存することから，

$$
mv'+MV'=mv+MV \qquad \therefore\ \frac{mv'+MV'}{m+M}=\frac{mv+MV}{m+M}
$$

となり，衝突の前後で重心速度不変であることがわかる．これは衝突時にかかる力が内力であることに由来する．

衝突の前後で重心速度が不変であることから，2 物体からなる系の運動エネルギーの変化量 $\mathit{\Delta} K_{\mathrm{total}}$ は以下のように始状態の相対運動エネルギー K_{rel} とはね返り係数 e で表すことができる．

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Delta} K_{\mathrm{total}} &= \left(\frac{1}{2}MV'^2+\frac{1}{2}mv'^2\right)-\left(\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}mv^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(\underbrace{v'-V'}_{=-e(v-V)})^2-\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(v-V)^2\\
&= -\frac{1-e^2}{2}\frac{Mm}{M+m}(v-V)^2\\
&= -(1-e^2)K_{\mathrm{rel}}
\end{aligned}
$$

■今回のように 3 体衝突では...

この問題の設定は，小球 C，物体 A，床の 3 体衝突である．物体 A と小球 C からなる系の衝突前後での運動エネルギー変化 $\mathit{\Delta} K_{\mathrm{A+C}}$ は問(3)(c)で計算したように，

$$
\mathit{\Delta} K_{\mathrm{A+C}} = -\frac{1}{8}\frac{4m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{C}}}m_{\mathrm{C}}{v_{\mathrm{C}}}^2 = -\frac{1}{2}\frac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{C}}}{v_{\mathrm{C}}}^2-\frac{1}{8}\frac{{m_{\mathrm{C}}}^2}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{C}}}{v_{\mathrm{C}}}^2
$$

であり，相対運動エネルギー変化は衝突後一体となることから，

$$
\mathit{\Delta} K_{\mathrm{rel}} = -\frac{1}{2}\frac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{C}}}{v_{\mathrm{C}}}^2
$$

であり，両者は一致せず，物体 A と小球 C からなる系の衝突前後での運動エネルギー変化 $\mathit{\Delta} K_{\mathrm{A+C}}$ の方が小さくなることが確認できる．

2 中身の見えるコンデンサ

【メモ】

・問(1)，問(3)いずれも中身の見えるタイプのコンデンサに関する出題．金属板挿入時の外力のする仕事の計算まであり（外力のや金属板に生じる引き摺り込む力の大きさなどを求める計算はない）.

・回路の状態決定は定石に従う．

【解答】

問(1) (a) 公式より，

$$C_{\mathrm{A}} = \varepsilon_0 \frac{S}{4d - x}\,, \quad C_{\mathrm{B}} = \varepsilon_0 \frac{S}{x}\,.$$

(b) 合成則より[*5]，

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{\mathrm{A}}} + \frac{1}{C_{\mathrm{B}}} \qquad \therefore C = \frac{\varepsilon_0 S}{4d}\,.$$

また，極板 A，金属板 M，極板 B からなるコンデンサの静電エネルギーは公式より[*6]，

$$U = \frac{1}{2}\frac{{Q_{\mathrm{A}}}^2}{C} = \frac{\varepsilon_0 S {V_0}^2}{8d}\,.$$

(c) 金属板挿入前，極板 A と極板 B が対となりコンデンサを形成する．このコンデンサの静電容量は $\dfrac{\varepsilon_0 S}{5d}$ であろ，スイッチを繋いだ後の帯電量はキルヒホッフ則より $\dfrac{\varepsilon_0 S V_0}{5d}$ と求まる．よって，極板 A の電荷の変化量は，

$$\varDelta Q = \frac{\varepsilon_0 S V_0}{4d} - \frac{\varepsilon_0 S V_0}{5d} = \frac{\varepsilon_0 S V_0}{20d}\,.$$

(d) 電池のした仕事は公式より，

$$W_{\mathrm{p}} = \varDelta Q V_0 = \frac{\varepsilon_0 S {V_0}^2}{20d}\,.$$

---

*5 簡易的な補足：各極板の帯電量を Q_{A}，Q_{B} とする．キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} V_0 - \dfrac{Q_{\mathrm{A}}}{C_{\mathrm{A}}} + \dfrac{Q_{\mathrm{B}}}{C_{\mathrm{B}}} = 0\,, \\ -Q_{\mathrm{A}} - Q_{\mathrm{B}} = 0 \end{cases} \qquad \therefore Q_{\mathrm{A}} = -Q_{\mathrm{B}} = \frac{C_{\mathrm{A}} C_{\mathrm{B}}}{C_{\mathrm{A}} + C_{\mathrm{B}}} V_0 = \frac{V_0}{1/C_{\mathrm{A}} + 1/C_{\mathrm{B}}} = \frac{\varepsilon_0 S V_0}{4d}\,.$$

$Q_{\mathrm{A}} = -Q_{\mathrm{B}}$ より，極板 A と金属板 M，極板 B と金属板 M からなるそれぞれのコンデンサは 1 つのコンデンサと見做すことができ，その合成容量 C は系の両端に帯電している電荷が Q_{A}，両端電位差が V_0 であることから $C = \dfrac{Q_{\mathrm{A}}}{V_0}$ を計算すれば（当然）同様の結果を得る．

*6 もちろん各々の静電エネルギーを計算して和を取ってもよい：$\dfrac{1}{2}\dfrac{{Q_{\mathrm{A}}}^2}{C_{\mathrm{A}}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{{Q_{\mathrm{B}}}^2}{C_{\mathrm{B}}} = \dfrac{\varepsilon_0 S {V_0}^2}{8d}$．

また，外力のした仕事は回路のエネルギー収支より，

$$W_\mathrm{p}+W_\mathrm{e}=\mathit{\Delta}U=\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{8d}-\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon_0 SV_0/5d)^2}{\varepsilon_0 SV_0/5d}=\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{40d}\qquad \therefore W_\mathrm{e}=-\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{40d}\,.$$

問(2) (a) 極板 A と金属板 M からなるコンデンサの容量は $C_\mathrm{A}=\dfrac{\varepsilon_0 S}{3d}$，極板 B と金属板 M からなるコンデンサの容量は $C_\mathrm{B}=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ であり，極板 A，B の帯電量をそれぞれ Q_A，Q_B とする[*7]．キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_0+\dfrac{Q_\mathrm{A}}{C_\mathrm{A}}=0\,, \\ V_0+\dfrac{Q_\mathrm{B}}{C_\mathrm{B}}=0 \end{cases}\qquad \therefore Q_\mathrm{A}=-C_\mathrm{A}V_0=-\frac{\varepsilon_0 SV_0}{3d}\,,\quad Q_\mathrm{B}=-C_\mathrm{B}V_0=-\frac{\varepsilon_0 SV_0}{d}$$

であり，金属板 M の表面に分布している電荷の総和は，

$$Q_\mathrm{M}=(-Q_\mathrm{A})+(-Q_\mathrm{B})=\frac{4}{3}\frac{\varepsilon_0 SV_0}{d}\,.$$

(b) 金属板 M の下面が極板 B から距離 x にあるとき，$C_\mathrm{A}=\dfrac{\varepsilon_0 S}{4d-x}$，$C_\mathrm{B}=\dfrac{\varepsilon_0 S}{x}$ であり，このときの各極板の帯電量 Q_A，Q_B はキルヒホッフ則，および電荷保存則[*8]より，

$$\begin{cases} -\dfrac{Q_\mathrm{A}}{\varepsilon_0 S/(4d-x)}+\dfrac{Q_\mathrm{B}}{\varepsilon_0 S/x}=0\,, \\ -Q_\mathrm{A}-Q_\mathrm{B}=\dfrac{4\varepsilon_0 SV_0}{3d} \end{cases}$$

$$\therefore Q_\mathrm{A}=-\frac{\varepsilon_0 SV_0}{3d^2}x^2\,,\quad Q_\mathrm{B}=-\frac{4\varepsilon_0 SV_0}{3d}\left(1-\frac{x}{4d}\right)\,.$$

よって，距離 x にあるときに系の蓄える静電エネルギー U' は，

$$U'=\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{\varepsilon_0 SV_0}{3d^2}x\right)^2}{\dfrac{\varepsilon_0 S}{4d-x}}}_{\text{A と M の対}}+\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\left\{\dfrac{4\varepsilon_0 SV_0}{3d}\left(1-\dfrac{x}{4d}\right)\right\}^2}{\dfrac{\varepsilon_0 S}{x}}}_{\text{B と M の対}}=-\frac{2}{9}\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d^3}(x^2-4dx)\,.$$

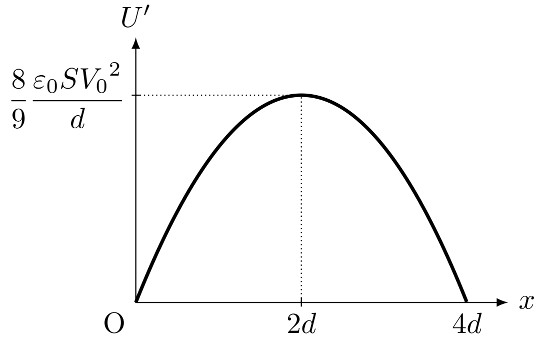
したがって，U' は $x=2d\,(=x_\mathrm{m})$ に頂点を持つ上に凸の 2 次関数で，最大値 U'_m は，

$$\begin{aligned} U'&-\frac{2}{9}\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d^3}(x^2-4dx) \\ &=-\frac{2}{9}\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d^3}(x-2d)^2+\frac{8}{9}\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d}\qquad \therefore U'_\mathrm{m}=\frac{8}{9}\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d} \end{aligned}$$

であり，グラフは以下のようになる．

[*7] 静電誘導により，金属板 M の上面に $-Q_\mathrm{A}$，下面に $-Q_\mathrm{B}$ の電荷が帯電する．

[*8] スイッチを切ったため金属板 M は電気的に孤立をしている．



(c)　電池と繋がっていないことに留意して，回路のエネルギー収支より，

$$W'_{\mathrm{e}} = \mathit{\Delta} U = U'(x=2d) - U'(x=d) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{2}{9}\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d}}\ .$$

(d)　終状態における各極板の帯電量は，キルヒホッフ則よりともに $Q_{\mathrm{A}} = Q_{\mathrm{B}} = -\dfrac{\varepsilon_0 S V_0}{2d}$ であり，系の蓄える静電エネルギーは公式より，

$$U_{\mathrm{fin}} = \frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{\varepsilon_0 S V_0}{2d}\right)^2}{\dfrac{\varepsilon_0 S}{2d}} \times 2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d}$$

であり，この間電池のした仕事 W''_{p} は，

$$W''_{\mathrm{p}} = \mathit{\Delta} Q_{\mathrm{M}} V_0 = \left(\frac{\varepsilon_0 S V_0}{2d}\cdot 2 - \frac{4}{3}\frac{\varepsilon_0 S V_0}{d}\right) V_0 = -\frac{1}{3}\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d}\ .$$

よって，回路のエネルギー収支より，

$$W''_{\mathrm{p}} + W''_{\mathrm{e}} = \mathit{\Delta} U = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d} - \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d} = -\frac{1}{6}\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{d} \qquad \therefore W''_{\mathrm{e}} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{6d}}\ .$$

3 熱あり過程，（準静的）断熱過程

【メモ】

・問(1)，問(3)熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題．定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算．

・問(2)は準静的な断熱過程に関する問題．準静的な断熱過程では，ポアソンの公式から圧力か体積の決定，状態方程式から温度の決定．熱力学第 1 法則は仕事の決定方程式となる．この問題ではポアソンの公式を使わなくてもいいような誘導が付いている（文字が過剰に与えられている）．

【解答】

問(1) (a)　状態方程式より，

$$T_{\mathrm{A}} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{p_{\mathrm{A0}} S h_{\mathrm{A}}}{R}}\,.$$

(b)　ピストンのつりあい，および状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = p_{\mathrm{B}} S - p_{\mathrm{A0}} S - Mg\,, \\ p_{\mathrm{B}} S h_{\mathrm{B}} = R T_{\mathrm{B}} \end{cases} \qquad \therefore\ p_{\mathrm{B}} = \underset{\sim\sim\sim}{p_{\mathrm{A0}} + \frac{Mg}{S}}\,,\quad T_{\mathrm{B}} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{(p_{\mathrm{A0}} S + Mg) h_{\mathrm{B}}}{R}}\,.$$

問(2) (a)　A 室の気体は準静的な断熱過程ゆえ，その気体の状態はポアソンの公式を満たしながら変化する．ポアソンの公式，状態方程式（両室），およびピストンのつりあいより，

$$\begin{cases} p_{\mathrm{A1}} \{S(h_{\mathrm{A}} - x)\}^{\frac{5}{3}} = p_{\mathrm{A0}} (S h_{\mathrm{A}})^{\frac{5}{3}}\,, \\ p_{\mathrm{A1}} S(h_{\mathrm{A}} - x) = R T_{\mathrm{A1}}\,, \\ p_{\mathrm{B1}} S(h_{\mathrm{B}} + x) = R T_{\mathrm{B1}}\,, \\ 0 = p_{\mathrm{B1}} S - p_{\mathrm{A1}} S - Mg\,. \end{cases}$$

準静的断熱過程ゆえ，A 室内の気体のする仕事は熱力学第 1 法則より逆算して[*9]，

$$W_{\mathrm{A}} = -\mathit{\Delta} U_{\mathrm{A}} = -\frac{3}{2} R (T_{\mathrm{A1}} - T_{\mathrm{A0}}) = -\frac{3}{2} \{ p_{\mathrm{A1}} S (h_{\mathrm{A}} - x) - p_{\mathrm{A0}} S h_{\mathrm{A}} \}\,.$$

よって，A 室の気体のされた仕事 W は，

$$W = -W_{\mathrm{A}} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3}{2} \{ p_{\mathrm{A1}} S (h_{\mathrm{A}} - x) - p_{\mathrm{A0}} S h_{\mathrm{A}} \}}\,.$$

[*9] ポアソンの公式より x か p_{A1} を文字消去できるが，問題の指示ではしなくてもよいとのこと（文字指定に注目）．次の熱量についても同様．なお，$p_{\mathrm{A1}} = p_{\mathrm{A0}} \left(\dfrac{h_{\mathrm{A}}}{h_{\mathrm{A}} - x} \right)^{\frac{5}{3}}$ によって，p_{A1} を消去できる（x を消去する場合はこれを逆に解けばよい）．

(b)　B 室の気体の吸収した熱量は，A 室内の気体，B 室内の気体，およびピストン（の質量に関する重力場）からなる系全体のエネルギー収支（熱力学第 1 法則）より，

$$\begin{aligned}Q &= \varDelta U_{\mathrm{A}} + \varDelta U_{\mathrm{B}} + \varDelta U_{\mathrm{piston}} \\ &= \frac{3}{2}R(T_{\mathrm{A1}} - T_{\mathrm{A0}}) + \frac{3}{2}R(T_{\mathrm{B1}} - T_{\mathrm{B}}) + Mgx \\ &= \frac{3}{2}\{p_{\mathrm{A1}}S(h_{\mathrm{A}} - x) - p_{\mathrm{A0}}Sh_{\mathrm{A}}\} + \frac{3}{2}\{(p_{\mathrm{A1}}S + Mg)(h_{\mathrm{B}} + x) - (p_{\mathrm{A0}}S + Mg)h_{\mathrm{B}}\} \\ &\quad + Mgx \\ &= \underline{\frac{3}{2}(p_{\mathrm{A1}} - p_{\mathrm{A0}})S(h_{\mathrm{A}} + h_{\mathrm{B}}) + \frac{5}{2}Mgx}\,.\end{aligned}$$

問(3)　(a)　状態 2，状態 3 におけるピストンのつりあい，および B 室の気体の状態方程式はそれぞれ，

$$\begin{cases} \text{状態 } 2 \begin{cases} 0 = p_{\mathrm{B}}S - p_0 S - Mg\,, \\ p_{\mathrm{B}}S(h_{\mathrm{A}} + h_{\mathrm{B}}) = RT_{\mathrm{B2}}\,, \end{cases} \\ \text{状態 } 3 \begin{cases} 0 = p_{\mathrm{B}}S - p_0 S - Mg\,, \\ p_{\mathrm{B}}Sh_{\mathrm{B}} = RT_{\mathrm{B3}}\,. \end{cases} \end{cases}$$

状態方程式より，この間 B 室内の気体の圧力は一定値を保つことがわかる．B 室内の気体のする仕事は PV 図の面積より（図略），

$$W_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{B}}\{Sh_{\mathrm{B}} - S(h_{\mathrm{A}} + h_{\mathrm{B}})\} = -p_{\mathrm{B}}Sh_{\mathrm{A}} = -(p_0 S + Mg)h_{\mathrm{A}}\,.$$

よって，B 室内の気体のされた仕事 W' は，

$$W' = -W_{\mathrm{B}} = \underline{(p_0 S + Mg)h_{\mathrm{A}}}\,.$$

(b)　B 室内の気体の熱力学第 1 法則より，B 室内の気体の吸熱量は[*10]，

$$\begin{aligned}Q_{\mathrm{B}} &= \varDelta U_{\mathrm{B}} + W_{\mathrm{B}} \\ &= \frac{3}{2}R(T_{\mathrm{B3}} - T_{\mathrm{B2}}) - (p_0 S + Mg)h_{\mathrm{A}} \\ &= -\frac{5}{2}(p_0 S + Mg)h_{\mathrm{A}}\,.\end{aligned}$$

よって，放熱量 Q' は，

$$Q' = -Q_{\mathrm{B}} = \underline{\frac{5}{2}(p_0 S + Mg)h_{\mathrm{A}}}\,.$$

[*10] 式変形の際，温度を消去するときに状態方程式を利用．