2
力学後半

第 2 部力学後半では，力学前半で学習した内容を基礎として幅広い力学現象を扱う．第 1 章では，数学の学習進度の都合上，力学前半では扱うことができなかった運動の時間追跡について扱う．また，数学の学習がある程度進んだことにより，仕事の計算も（受験の範囲で）より一般的な分類をする．第 2 章では，多体系の運動の特に 2 物体系の運動を扱う．2 物体系の運動は，個々の運動方程式を見てもそれらを解くことが困難であることが多い．第 1 章の学習でも言及するように，時間追跡ができないような運動は保存則を利用する他ない．そこで，多体系の運動も保存則を用いて解析することとなる．なお，衝突や分裂といった現象は例外的に扱うことに注意する．第 3 章では，円運動を扱う．円運動は束縛条件から得られる加速度を公式として覚える高校範囲の力学では例外的な位置付けとなっている．第 4 章では，中心力場での物体の運動を扱う．中心力場の運動は高校範囲では時間追跡が不可能なためにこちらも保存則に頼る他ない（円軌道の場合は円運動の定石に従う）．また，ここで面積速度という物理量を導入し，中心力場での運動では面積速度が保存すること（ケプラー第 2 法則）を利用する．第 5 章では，動く座標系内部での物体の運動を扱う．この章では，これまでも意識してきた「どの座標系を選ぶか」を，より意識的に学習する（選択する座標系によって運動方程式の形が変わるため）．第 6 章では，剛体の運動のうち，つりあい（およびつりあいが破れる瞬間）だけを扱う．剛体のつりあわないような場合は，タイミングを見て紹介をする．

§2.1 運動の時間追跡

第 1 章では，位置，速度，加速度の定義を再度確認し，高校範囲において時間追跡が可能な運動を扱う．時間追跡による運動の解析とは運動方程式を利用したものであり，思想的には，運動を微小に刻み，微小な運動を考察することで微小な運動の積み重ねとしての全体の運動を調べるものである．高校範囲で時間追跡可能な運動は，①等加速度運動，②単振動，③速度の 1 次に比例する空気抵抗型の運動の 3 つに分類される．特に②，③は，単純な時間追跡の方法では困難が生じるために，運動方程式を微分方程式として解くことになる（実際は方程式の解を暗記して使うことになる）．

■各種微分公式のまとめ

- 合成関数の微分：

  関数 $f(x)$ に，関数 $g(x)$ を合成した合成関数を $f(g)$ と書き，$f(g)$ の x に関する微分は以下のように連鎖的に行う．

  $$\frac{df(g)}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(x)}{dx}\,.$$

  例えば，$f(x) = \sin x$，$g(x) = 3x^2$ とすると，$f(g) = \sin g = \sin(3x^2)$ であり，

  $$\frac{df(g)}{dx} = \frac{d}{dg}(\sin g)\frac{d}{dx}(3x^2) = \cos g \cdot 6x = 6x\cos(3x^2)\,.$$

  計算手順としては，（外側の微分）×（1 つ内側の微分）×（更に 1 つ内側の微分）× $\cdots$ を行っていると思えばよい．

- 初等関数の微分公式：

  $$\frac{d}{dt}\{\sin(at)\} = a\cos(at)\,, \qquad \frac{d}{dt}\{\cos(at)\} = -a\sin(at)\,,$$
  $$\frac{d}{dt}(e^{at}) = ae^{at}\,, \qquad \frac{d}{dt}\{\log(at)\} = \frac{1}{t}\,.$$

  ここで，微分結果にある係数 a は，合成関数の微分によって生じている（詳しくは授業ノートを参照）．

■簡単なまとめ

- 時間追跡の分類：

❶ 加速度 a が t の冪関数で与えられるとき：

$$v(t)=v(0)+\int_0^t a\,dt\,,\quad x(t)=x(0)+\int_0^t v\,dt\,.$$

❷ ω，x_0 を定数として $a=-\omega^2(x-x_0)$ と与えられるとき（単振動型）：

$$\begin{cases} x(t)=x_0+C\sin(\omega t)+D\cos(\omega t)\,, \\ v(t)=\dfrac{dx}{dt}=C\omega\cos(\omega t)-D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

x の解の形（三角関数の線形結合）だけ覚える（v は微分公式によって導けるようにすればよい）．C，D は定数であり，$t=0$ における位置 x と速度 v（初期条件）から決定する．

❸ γ，v_f を定数として $a=\gamma(v-v_\mathrm{f})$ と与えられるとき（空気抵抗型）：

$$v=v_\mathrm{f}+Ce^{\gamma t}$$

v の形を覚える．C は定数であり，$t=0$ における速度 v（初期条件）から決定する．この型の微分方程式は，電気回路で主に用いることとなる．

- 仕事の計算の分類：

$$W=\begin{cases} \text{定義から直接計算}\begin{cases} f\ \text{が一定：(力の大きさ)}\times\text{(変位の大きさ)}\cos\theta \\ f\ \text{が一定でない：}\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f\,dx \end{cases} \\ \text{エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

エネルギー収支から逆算する場合，どこまでを 1 つの系と見るかが重要となる．

1. 今後使うための微分・積分計算の練習

次の関数 x を，t に関して微分，および積分せよ．積分定数は C を用い，x，t 以外の文字は全て定数とし，以下の微分公式を用いてよい（k は実数の定数）[*1]．

$$\frac{d}{dt}(t^k) = kt^{k-1}\,, \qquad \frac{d}{dt}\{\sin(kt)\} = k\cos(kt)\,, \qquad \frac{d}{dt}\{\cos(kt)\} = -k\sin(kt)\,.$$

(1)　$x = t^3$

(2)　$x = a\sqrt{t}$

(3)　$x = A\sin(\omega t)$

(4)　$x = A\cos(\omega t)$

[*1] 微分公式の証明はノートを参照.

【解答】

(1)　微分公式より，

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2 \,.$$

微分の逆演算（不定積分）を考えて，

$$\int x\,dt = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 + C \,.$$

(2)　微分公式より，

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = a\frac{d}{dt}(t^{\frac{1}{2}}) = \frac{a}{2\sqrt{t}} \,.$$

不定積分は，

$$\int x\,dt = \int a\sqrt{t}\,dt = a\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{3}at\sqrt{t} + C \,.$$

(3)　微分公式より，

$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\} = A\omega\cos(\omega t) \,.$$

不定積分は[*2]，

$$\int x\,dt = \int A\sin(\omega t)\,dt = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t) + C$$

(4)　微分公式より，

$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\} = -A\omega\sin(\omega t) \,.$$

不定積分は，

$$\int x\,dt = \int A\cos(\omega t)\,dt = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t) + C$$

[*2] 原始関数を微分することで元の関数 x に戻ることを確認しながら計算する．

2. 時間追跡①

以下の加速度 a を時刻 t で積分することで，速度 v，位置 x をそれぞれ求めよ．a，t 以外の文字は全て定数とし，初期条件（時刻 $t=0$ での位置 x，および速度 v）は $x=x_0$，$v=v_0$ とする．

(1)　$a=\alpha$

(2)　$a=\alpha+\beta t$

(3)　$a=\gamma\sqrt{t}$

【解答】

(1)　両辺 t で積分して，

$$
\begin{aligned}
v(t)-v(0) &= \int_0^t a\,dt = \int_0^t \alpha\,dt = \alpha t \\
\therefore v &= v_0+\alpha t\,, \\
x(t)-x(0) &= \int_0^t v\,dt = \int_0^t (v_0+\alpha t)\,dt = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\
\therefore x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2\,.
\end{aligned}
$$

(2)　両辺 t で積分して，

$$
\begin{aligned}
v(t)-v(0) &= \int_0^t a\,dt = \int_0^t (\alpha+\beta t)\,dt = \alpha t + \frac{1}{2}\beta t^2 \\
\therefore v &= v_0+\alpha t + \frac{1}{2}\beta t^2\,. \\
x(t)-x(0) &= \int_0^t v\,dt = \int_0^t \left(v_0+\alpha t+\frac{1}{2}\beta t^2\right)\,dt = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 + \frac{1}{6}\beta t^3 \\
\therefore x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 + \frac{1}{6}\beta t^3\,.
\end{aligned}
$$

(3)　両辺 t で積分して，

$$
\begin{aligned}
v(t)-v(0) &= \int_0^t a\,dt = \int_0^t \gamma\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\gamma t\sqrt{t} \\
\therefore v &= v_0 + \frac{2}{3}\gamma t\sqrt{t}\,. \\
x(t)-x(0) &= \int_0^t v\,dt = \int_0^t \left(v_0+\frac{2}{3}\gamma t\sqrt{t}\right)\,dt = v_0 t + \frac{4}{15}\gamma t^2\sqrt{t} \\
\therefore x &= x_0 + v_0 t + \frac{4}{15}\gamma t^2\sqrt{t}\,.
\end{aligned}
$$

3. 時間追跡②

x 軸上にある小物体（質量 m）に，時刻 $t=0$ に質量と時刻に比例した外力 $F=-kmt$（m は質量，k は定数）を x 正方向に加えた．初期条件を $x=0$，$v=v_0$ とする．$t>0$ の運動について考える．

(1)　物体の加速度 a を求めよ．

(2)　時刻 t における物体の速度 v，および位置 x を求めよ．

(3)　物体が x 軸正の方向へ原点から最も遠ざかる時刻を $t=t_1$，そのときの位置を $x=x_1$ とする．t_1，x_1 を求めよ．

(4)　物体が再び原点を通過する時刻を $t=t_2$，そのときの速度を $v=v_2$ とする．t_2，v_2 を求めよ．

【解答】

(1)　運動方程式より，

$$ma=-kmt\,,\qquad \therefore a=-kt\,.$$

(2)　それぞれ時間追跡を行って，

$$v(t)-v(0)=\int_0^t a\,dt=\int_0^t -kt\,dt=-\frac{1}{2}kt^2$$

$$\therefore v=v_0-\frac{1}{2}kt^2\,.$$

$$x(t)-x(0)=\int_0^t v\,dt=\int_0^t\left(v_0-\frac{1}{2}kt^2\right)dt=v_0t-\frac{1}{6}kt^3$$

$$\therefore x=v_0t-\frac{1}{6}kt^3\,.$$

(3)　$t=t_1$ において $v=0$ より，$t>0$ を考慮して，

$$v_0-\frac{1}{2}kt^2=0\,,\qquad \therefore t_1=\sqrt{\frac{2v_0}{k}}\,,\ \ x_1=x(t_1)=\frac{2v_0}{3}\sqrt{\frac{2v_0}{k}}\,.$$

(4)　$t=t_2$ において $x=0$ より，$t>0$ を考慮して，

$$v_0t-\frac{1}{6}kt^3=0\,,\qquad \therefore t_2=\sqrt{\frac{6v_0}{k}}\,,\ \ v_2=v(t_2)=-2v_0\,.$$

4. 仕事の計算

物体に位置 $x=a$ から $x=b$ まで以下の力 F を加えたとき，物体がされた仕事 W を計算せよ．x，t 以外は定数とする．

(1)　$F=F_0$

(2)　$F=kx$

(3)　$F=A\sqrt[3]{x}$

(4)　$F=At$，$x=\sqrt{Bt}$

【解答】

(1)　仕事の定義より[*3]，

$$W=\int_a^b F_0\,dx=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{F_0(b-a)}\,.$$

(2)　仕事の定義より，

$$W=\int_a^b kx\,dx=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}k(b^2-a^2)}\,.$$

(3)　仕事の定義より，

$$W=\int_a^b A\sqrt[3]{x}\,dx=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{4}A(b^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{4}{3}})}\,.$$

(4)　$t=\dfrac{x^2}{B}$ より，$F=\dfrac{A}{B}x^2$ と書ける．よって，仕事の定義より，

$$W=\int_a^b \frac{A}{B}x^2\,dx=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{A}{3B}(b^3-a^3)}\,.$$

[*3] 一定の力ゆえ，わざわざ積分する必要はない（今回は導入として一応積分計算を載せた）．

5.（復習）時間追跡とエネルギー収支の違い①

x 軸上を動く小物体（質量 m）について，その位置を x，速度を v，加速度を a と記し，それらは全て時刻 t の関数であるとする．$t = 0$ で小物体は原点で静止しており，$t > 0$ の運動について考える．物体に一定の力 F_0 を加える．

I　時間追跡で考える．

(1)　運動方程式から加速度を求めよ．また，v，x を，それぞれ時刻 t の関数として表せ．

(2)　$x = A$ を満たす時刻 t を求め，その時刻での速度 v を A を含む式で表せ．

(3)　v，x の 2 式について時刻 t を消去することで，v と x の間の直接の関係式を記せ．

II　エネルギー収支で考える．

(1)　原点にある小物体が位置 x まで運動する間にされた仕事 W を求めよ．

(2)　エネルギー収支の式が I(3) の式と整合していることを確認せよ．

(3)　小物体のエネルギー収支を考え，位置 $x = A$ にある小物体の速さ v を求めよ．

【解答】

I (1)　運動方程式より，

$$ma = F_0\,, \qquad \therefore a = \underset{\sim\sim}{\frac{F_0}{m}}\,.$$

加速度一定より[*4]，

$$v = \underset{\sim\sim}{\frac{F_0}{m}t}\,, \quad x = \underset{\sim\sim}{\frac{F_0}{2m}t^2}\,.$$

(2)　$x = A$ を解いて，

$$t = \underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{2mA}{F_0}}}\,, \quad v = \underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{2F_0A}{m}}}\,.$$

(3)　$t = \dfrac{m}{F_0}v$ より，

$$\underset{\sim\sim}{x = \frac{m}{2F_0}v^2}\,.$$

II (1)　仕事の定義より，

$$W = \underset{\sim\sim}{F_0x}\,.$$

(2)　小物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = F_0x$$
$$\therefore x = \underset{\sim\sim}{\frac{m}{2F_0}v^2}\,.$$

(3)　小物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = F_0A\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{2F_0A}{m}}}\,.$$

[*4] わざわざ積分してもいいけど，等加速度運動の時間追跡の結果は以下の 2 つの「公式」として既に暗記しているのでそれを用いる．

$$\begin{cases} v = v(0) + at\,, \\ x = x(0) + v(0)t + \dfrac{1}{2}at^2\,. \end{cases}$$

6. 時間追跡とエネルギー収支の違い②（やってもやらなくても）

x 軸上を動く小物体（質量 m）について，その位置を x，速度を v，加速度を a と記し，それらは全て時刻 t の関数であるとする．$t = 0$ で小物体は原点で静止しており，$t > 0$ の運動について考える．小物体に時刻 t に比例する力 $F = kmt$（k は定数）を加える．

I　時間追跡で考える．

(1)　運動方程式から加速度 a を求めよ．また，v，x を，それぞれ時刻 t の関数として表せ．

(2)　$x = A$ を満たす時刻 t を求め，その時刻での速度 v を A を含む式で表せ．

(3)　v，x の 2 式について時刻 t を消去することで，x を v を含む式で表せ．

II　エネルギー収支で考える．

(1)　I(1) を利用し，小物体にはたらく力を x の関数として表せ．また，原点にある物体が位置 x まで運動する間にされた仕事 W を求めよ．

(2)　エネルギー収支の式が I(3) の式と整合していることを確認せよ．

(3)　物体のエネルギー収支を考え，位置 $x = A$ にある物体の速さ v を求めよ．

【解答】

I (1)　運動方程式より，

$$ma = kmt\,, \qquad \therefore a = \underset{\sim}{kt}\,.$$

時間追跡をして，

$$v = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}kt^2}\,, \quad x = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{6}kt^3}\,.$$

(2)　$x = A$ を解いて，

$$t = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt[3]{\frac{6A}{k}}}\,, \quad v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}kA^2}}\,.$$

(3)　$t = \sqrt{\frac{2v}{k}}$ より，

$$\underset{\sim\sim\sim}{x = \frac{v}{3}\sqrt{\frac{2v}{k}}}\,.$$

II (1)　I(1) より，

$$F = \underset{\sim\sim\sim}{m\sqrt[3]{6k^2x}}\,.$$

仕事の定義より，

$$W = \int_0^x m\sqrt[3]{6k^2x}\,dx = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3}{4}mx\sqrt[3]{6k^2x}}\,.$$

(2)　小物体のエネルギー収支の式は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 &= \frac{3}{4}mx\sqrt[3]{6k^2x} \\ v^2 &= \frac{3^4}{2^2}k^2x^4 \\ \therefore x &= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{v}{3}\sqrt{\frac{2v}{k}}}\,. \end{aligned}$$

(3)　小物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \frac{3}{4}mA\sqrt[3]{6k^2A}\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}kA^2}}\,.$$

7. 単振動の時間追跡①

図のように，ばね（ばね定数 k，質量無視）の一端を固定された壁に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．水平右向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．時刻 $t=0$ に原点にある物体に，x 軸正の向きに大きさ v_0 の初速度を与えた．

(1)　位置 x にある小物体がばねから受ける弾性力が向きを考慮して $f=-kx$ と与えられることを，(i) ばねが伸びているとき，(ii) ばねが縮んでいるとき，と場合分けをして確認せよ．

(2)　物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を立式せよ．

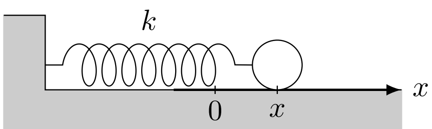
(3)　物体の位置 x を時刻 t の関数として表せ．また，位置 x を時刻 t で微分することにより，速度 v を時刻 t の関数として表せ．なお，必要であれば以下の微分公式か，位置および速度に関する公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\}=\omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\}=-\omega\sin(\omega t)\,,$$

$$\begin{cases} x(t)=x_0+C\sin(\omega t)+D\cos(\omega t)\,, \\ v(t)=\dfrac{dx}{dt}=C\omega\cos(\omega t)-D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

(4)　単振動の周期 T を求めよ．

(5)　1 回目に物体の速度が $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0$ となったときの時刻 t を求めよ．また，そのときの位置 x を求めよ．



【解答】

(1)　ばねが伸びているとき，$x > 0$ で弾性力の大きさは $k|x|$，向きは x 負の向きゆえ，

$$f = -k|x| = -kx\,.$$

ばねが縮んでいるとき，$x < 0$ で弾性力の大きさは $k|x|$，向きは x 正の向きゆえ[*5]，

$$f = k|x| = -kx\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{ma = -kx}\,.$$

(3)　運動方程式より，物体は角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$，振動中心 $x_0 = 0$ の単振動をする．したがって，定数を C，D として，

$$\begin{cases} x(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

初期条件より，

$$\begin{cases} 0 = D\,, \\ v_0 = C\omega\,, \end{cases} \qquad \therefore C = \frac{v_0}{\omega}\,,\quad D = 0\,.$$

よって，

$$x(t) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}\,,\quad v(t) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{v_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}\,.$$

(4)　公式より[*6]，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

(5)　$v = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0$ より，

$$v_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\,,\qquad \therefore t = \frac{5}{6}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

この時刻での位置 x は，

$$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

[*5] 絶対値の中身が負の場合，絶対値を外すとき，-1 をかけてはずすことに注意．

[*6] 任意の t において $\sin\{\omega(t+T)\} = \sin(\omega t)$ を満たす T のうち，正で最小のものを周期と呼んでいる．すなわち（ほとんど自明だが），$\omega T = 2\pi$ を満たす T である．

8. 単振動の時間追跡②

図のように，ばね（ばね定数 k，ばね定数 $2k$，質量無視）の 2 つのばねの一端を固定された壁に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．このとき，ばねはともに自然長である．水平右向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．時刻 $t=0$ に，物体を $x=A\,(>0)$ から静かに放した．

(1)　物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を立式せよ．

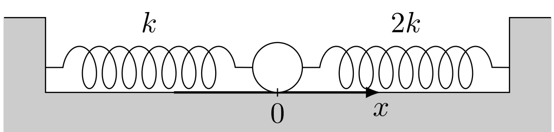
(2)　単振動の周期 T を求めよ．

(3)　物体の位置 x を時刻 t の関数として表せ．また，位置 x を時刻 t で微分することにより，速度 v を時刻 t の関数として表せ．なお，必要であれば以下の微分公式か，位置および速度に関する公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\} = \omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\} = -\omega\sin(\omega t)\,,$$
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt} = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

(4)　原点を通過する時刻 t_n を，自然数 n を用いて表せ．

(5)　時刻 t_n における速さ v を求めよ．



【解答】

(1)　運動方程式より，

$$\underline{ma = -3kx}\,.$$

(2)　運動方程式より，物体は角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$，振動中心 $x_0 = 0$ の単振動をする．よって，公式より，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}}\,.$$

(3)　物体の位置，および速度は，定数を C，D として，

$$\begin{cases} x(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

初期条件より，

$$\begin{cases} A = D\,, \\ 0 = C\omega\,, \end{cases} \qquad \therefore C = 0\,,\quad D = A\,.$$

よって，

$$x(t) = \underline{A\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t\right)}\,,\quad v(t) = \underline{-A\sqrt{\frac{3k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t\right)}\,.$$

(4)　$\dfrac{1}{4}T$ 経過後は，半周期ずつ通過する，よって[*7]，

$$t_n = \frac{T}{4} + \frac{T}{2}n = \underline{(2n+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{3k}}}\,.$$

(5)　この時刻での速さ v は，

$$v = \left|-A\sqrt{\frac{3k}{m}}\sin\left(\frac{\omega T}{4} + \frac{\omega T}{2}n\right)\right| = \left|-A\sqrt{\frac{3k}{m}}\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right| = \underline{A\sqrt{\frac{3k}{m}}}\,.$$

[*7] $A\cos(\omega t) = 0$ を解いても良い．

9. 単振動の時間追跡③

図のように，ばね（ばね定数 k，質量無視）の一端を固定された天井に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．物体は $x = d$ の位置でつりあった．時刻 $t = 0$ に物体を位置 $2d$ から静かに手を放した．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　d を，m，g，k を用いて表せ．

(2)　物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を立式せよ．

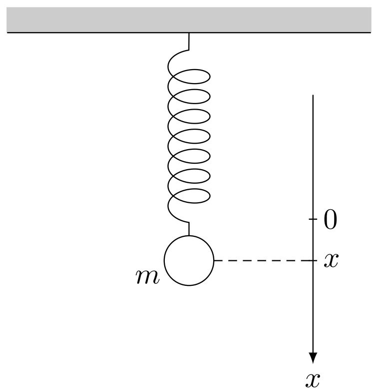
(3)　単振動の周期 T を求めよ．

(4)　物体の位置 x を時刻 t の関数として表せ．また，位置 x を時刻 t で微分することにより，速度 v を時刻 t の関数として表せ．なお，必要であれば以下の微分公式か，位置および速度に関する公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\} = \omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\} = -\omega\sin(\omega t)\,,$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt} = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

(5)　1 回目にばねが自然長となったときの物体の速度 v を求めよ．



【解答】

(1)　物体の力のつりあいより，

$$0 = mg - kd\,, \qquad \therefore d = \frac{mg}{k}\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$ma = -kx + mg\,.$$

(3)　公式より，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

(4)　運動方程式より，物体は角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$，振動中心 $x_0 = \dfrac{mg}{k}$ の単振動をする[*8]．したがって，定数を C，D として，

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{mg}{k} + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

初期条件より，

$$\begin{cases} \dfrac{2mg}{k} = \dfrac{mg}{k} + D\,, \\ 0 = C\omega\,, \end{cases} \qquad \therefore C = 0\,,\quad D = \frac{mg}{k}\,.$$

よって，

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{mg}{k} + \dfrac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)\,, \\ v(t) = -g\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)\,. \end{cases}$$

(5)　$x = 0$ を解いて，

$$\frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) = 0\,, \qquad \therefore t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,,\quad \therefore v = 0\,.$$

[*8] 運動方程式より，

$$a = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right)\,.$$

10. 単振動の時間追跡④

図のように，ばね（質量無視）の一端を固定された天井に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点を物体にはたらく重力と弾性力がつりあう位置に取る．物体はばねが d だけ伸びた位置でつりあった．時刻 $t=0$ に物体を自然長の位置から静かに手を放した．重力加速度の大きさを g とする．

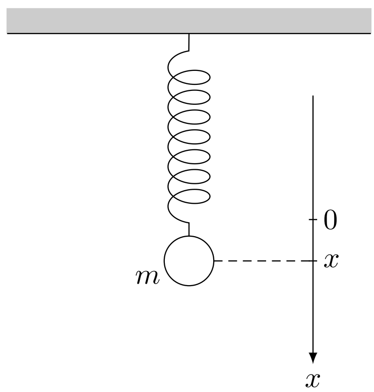
(1)　ばね定数 k を，m，g，d を用いて表せ．

(2)　物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．a を，x を含む式で表せ．

(3)　単振動の周期 T を求めよ．

(4)　物体の位置 x を時刻 t の関数として表せ．また，位置 x を時刻 t で微分することにより，速度 v を時刻 t の関数として表せ．なお，必要であれば以下の微分公式か，位置および速度に関する公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\} = \omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\} = -\omega\sin(\omega t)\,,$$
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt} = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$



【解答】

(1)　物体の力のつりあいより，

$$0 = mg - kd\,, \qquad \therefore k = \frac{mg}{d}\,.$$

(2)　位置 x にあるとき，ばねの自然長からの伸びは $x+d$ であることに注意して，運動方程式より，

$$ma = -\frac{mg}{d}(x+d) + mg = -kx\,, \qquad \therefore a = -\frac{g}{d}x\,.$$

(3)　公式より，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}\,.$$

(4)　運動方程式より，物体は角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{d}}$，振動中心 $x_0 = 0$ の単振動をする．したがって，定数を C，D として，

$$\begin{cases} x(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

初期条件より，

$$\begin{cases} -d = D\,, \\ 0 = C\omega\,, \end{cases} \qquad \therefore C = 0\,,\quad D = -d\,.$$

よって，

$$x(t) = -d\cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}}\,t\right),\quad v(t) = \sqrt{gd}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{d}}\,t\right).$$

11. 単振動の時間追跡⑤

物体（質量 M，密度 ρ'）を液体（密度 $\rho\,(>\rho')$）の上に浮かべたところ，物体は水面から h だけ沈み静止した．鉛直下向きに x 軸を定め，物体の位置 x は物体底面の位置とし，水面を原点に取る．時刻 $t=0$ に物体を位置 $\dfrac{h}{2}$ から静かに放した．重力加速度の大きさを g とする．

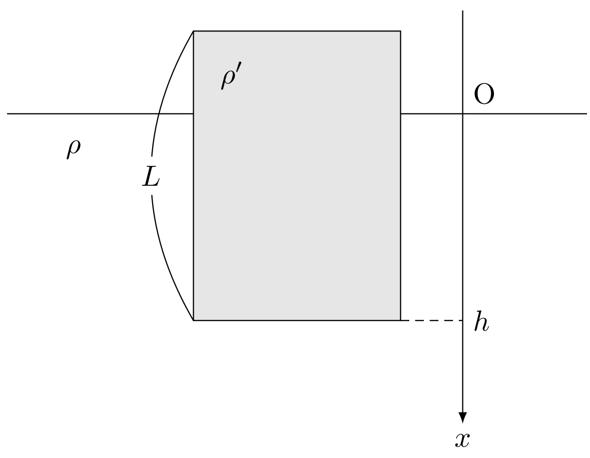
(1)　物体の底面が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を，h を用いずに立式せよ．

(2)　h を求めよ．

(3)　手を放した後，物体は単振動をした．初期条件より，小物体の位置 x，速度 v をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ[*9]．なお，必要であれば以下の微分公式か，位置および速度に関する公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\}=\omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\}=-\omega\sin(\omega t)\,,$$
$$\begin{cases} x(t)=x_0+C\sin(\omega t)+D\cos(\omega t)\,,\\ v(t)=\dfrac{dx}{dt}=C\omega\cos(\omega t)-D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

(4)　物体の運動の周期を求めよ．



[*9] 浮力（水圧）の公式は静止流体を仮定した上で成り立つ式なので，物体が運動し，周囲の流体に流れが生じるようなこのような議論は少し危うい．

【解答】

(1)　運動方程式より，

$$\underline{Ma = -\frac{\rho M g}{\rho' L}x + Mg}\,.$$

(2)　運動方程式より，$a = 0$ を解いて，

$$h = \underline{\frac{\rho'}{\rho}L}\,.$$

(3)　運動方程式より，物体の運動は角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho' L}}$，振動中心 $x_0 = \dfrac{\rho'}{\rho}L$ の単振動である[*10]．したがって，定数を C，D として，

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\rho'}{\rho}L + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

初期条件より，

$$\begin{cases} \dfrac{\rho'}{2\rho}L = \dfrac{\rho'}{\rho}L + D\,, \\ 0 = C\omega\,, \end{cases} \qquad \therefore C = 0\,,\quad D = -\frac{\rho'}{2\rho}L\,.$$

よって，

$$\begin{cases} x(t) = \underline{\dfrac{\rho'}{\rho}L - \dfrac{\rho'}{2\rho}L\cos\left(\sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho' L}}\,t\right)}\,, \\ v(t) = \underline{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\rho'}{\rho}gL}\sin\left(\sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho' L}}\,t\right)}\,. \end{cases}$$

(4)　公式より，

$$T = \underline{2\pi\sqrt{\frac{\rho' L}{\rho g}}}\,.$$

[*10] 運動方程式より，

$$a = -\frac{\rho g}{\rho' L}\left(x - \frac{\rho'}{\rho}L\right)\,.$$

12. 単振動の時間追跡⑥

物体 A（質量 $2m$）にばね（ばね定数 k，質量無視）の一端を取りつけ，他端を床に固定した．物体 A の上に物体 B（質量 m）をそっと置くと，自然長から d だけ縮み静止した．物体 A はその運動が鉛直方向だけに限られるよう十分に長い筒で囲ってある．なお，筒と物体 A の間の摩擦は考えないものとする．鉛直上向きに x 軸を定め，ばねが自然長のときの物体 A の位置を原点とする．重力加速度の大きさを g とする．

I　つりあいの状態から $\dfrac{d}{2}$ だけ押し込み静かに放したところ，2 つの物体は一体のまま単振動を行った．物体が運動を始めた時刻を $t=0$ とする．

(1)　d を求めよ．

(2)　物体 A，物体 B の加速度をそれぞれ a，b，物体 A と物体 B の間の垂直抗力を N とする．物体 A が位置 x にあるときの物体 A，物体 B の運動方程式を，d を用いずに立式せよ．

(3)　物体 B が物体 A の面上から離れないことから，a，b の間に成り立つ関係式を求めよ．

(4)　初期条件より，物体 A の位置 x を時刻 t の関数として求めよ．なお，必要であれば以下の微分公式か，位置および速度に関する公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\} = \omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\} = -\omega\sin(\omega t)\,,$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt} = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

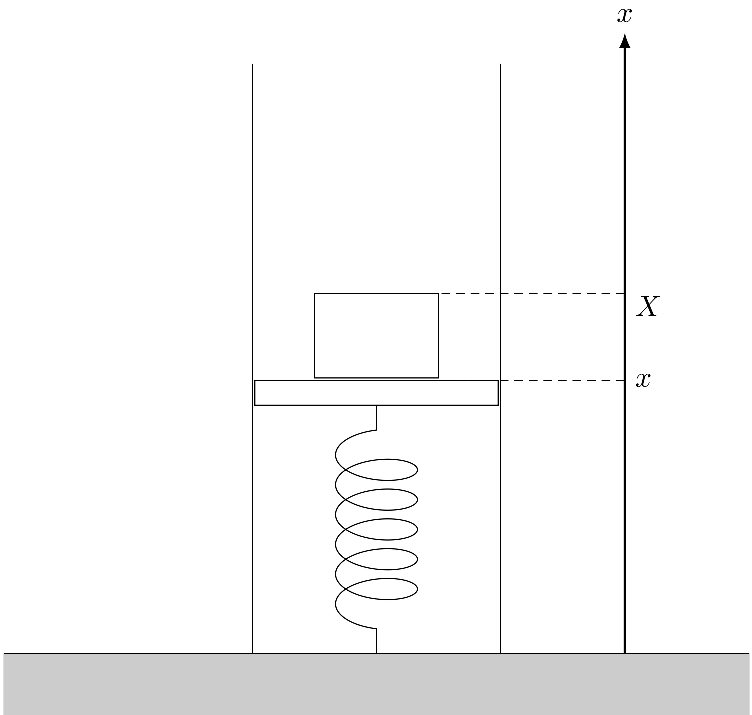
(5)　物体の運動の周期を求めよ．

II　つりあいの状態から d' だけ押し込み静かに放したところ，2 つの物体は一体のまま単振動の運動の一部を行った後，物体 B が物体 A から離れた．物体が運動を始めた時刻を $t=0$ とする．

(1)　物体 B が物体 A から離れるまでの垂直抗力 N を，x の関数として表せ．

(2)　物体 B が物体 A から離れるために，d' が満たす条件を求めよ．

(3)　$d' = \sqrt{2}\,d$ とする．このとき，物体 B が物体 A の面から離れる時刻を求めよ．


x
X
x

【解答】

I (1)　運動方程式・束縛条件より，

$$\begin{cases} 2ma = -kx - 2mg - N\,, \\ mb = -mg + N\,, \\ a - b = 0\,. \end{cases}$$

つりあいでは，$a = b = 0$ ゆえ，

$$N = mg\,, \quad d = |x| = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3mg}{k}}\,.$$

(2)　略.

(3)　略.

(4)　束縛条件から $a = b$ ゆえ，運動方程式から，

$$a = -\frac{k}{3m}\left(x + \frac{3mg}{k}\right)\,.$$

よって，物体（A，B を合わせて 1 つと見たもの）の運動は，角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{3m}}$，振動中心 $x_0 = -\dfrac{3mg}{k}$ である．したがって，定数を C，D として，

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{3mg}{k} + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

初期条件より，

$$\begin{cases} -\dfrac{9mg}{2k} = -\dfrac{3mg}{k} + D\,, \\ 0 = C\omega\,, \end{cases} \qquad \therefore C = 0\,,\quad D = -\frac{3mg}{2k}\,.$$

よって，

$$\begin{cases} x(t) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-\dfrac{3mg}{k} - \dfrac{3mg}{2k}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{3m}}\,t\right)}\,, \\ v(t) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\dfrac{g}{2}\sqrt{\dfrac{3m}{k}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{3m}}\,t\right)}\,. \end{cases}$$

II (1)　束縛条件より $a = b$ ゆえ，運動方程式から，

$$N = \underset{\sim\sim\sim\sim}{-\frac{1}{3}kx}\,.$$

(2)　初期条件より[*11][*12]，

$$\left\{\ x(t) = -\frac{3mg}{k} - d' \cos(\omega t)\right.,$$

と求まり，

$$N = mg + \frac{1}{3}kd' \cos(\omega t).$$

物体 B が物体 A から離れるためには，$\cos(\omega t) = -1$ のとき $N < 0$ を満たすように d を選べばよく[*13]，

$$\underline{d' > \frac{3mg}{k}}.$$

(3)　$d' = \sqrt{2}\,d$ より，

$$N = mg\left(1 + \sqrt{2}\cos(\omega t)\right).$$

$N = 0$ を解いて，

$$\cos(\omega t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \therefore t = \underline{\frac{3}{4}\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}}.$$

[*11] $x(0) = -d' - d$，$v(0) = 0$

[*12] $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{3m}}$

[*13] 「$N > 0$ ならば離れない」の対偶を考えればよい．物理では文字計算でも実際には有効数字を想定して計算する以上，等号はどちらでもよいので省略．

13. 単振動の時間追跡とエネルギー①

図のように，ばね（ばね定数 k）の一端を固定された壁に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．水平右向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．時刻 $t=0$ に原点にある物体に，x 軸正の向きに大きさ v_0 の初速度を与えた．

I　物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を立式せよ．

II　物体の位置 x を時刻 t の関数として表せ．また，位置 x を時刻 t で微分することにより，速度 v を時刻 t の関数として表せ．なお，必要であれば以下の微分公式か，位置および速度に関する公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\} = \omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\} = -\omega\sin(\omega t)\,,$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt} = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

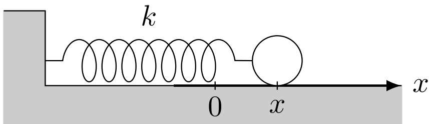
III　v，x の 2 式について時刻 t を消去することで，v と x の間の直接の関係式を記せ．

IV　1 回目に物体が位置 $-\dfrac{v_0}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ を通過したときの速度 v を，

(1)　時間追跡で得た 2 式を解くことにより求めよ．

(2)　物体の運動エネルギー変化と物体がされる仕事の関係に注目することにより求めよ．

(3)　物体とばねを 1 つの系と見て，全体の力学的エネルギーが保存することに注目することにより求めよ．



【解答】

I　運動方程式より，

$$ma = -kx\,.$$

II　運動方程式・初期条件より[*14]，

$$\begin{cases} x(t) = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right), \\ v(t) = v_0\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right). \end{cases}$$

III　II より[*15]，

$$v^2 + \frac{k}{m}x^2 = {v_0}^2\,.$$

IV (1)　$x = -\dfrac{v_0}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ より，

$$v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) = -\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\,, \qquad \therefore t = \frac{7}{6}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

この時刻での位置 v は，

$$v = v_0\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\,.$$

(2)　物体のみを 1 つの系と見てエネルギー収支を考えれば[*16]，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \int_0^{-\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}(-kx)\,dx\,, \qquad \therefore v = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\,.$$

(3)　全体を 1 つの系と見て力学的エネルギー保存則を考えれば[*17]，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(-\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2\,, \qquad \therefore v = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\,.$$

[*14] 問題 7 と同じ設定なので，詳しくはそちらの解答を参照.

[*15] 物体とばねを合わせて一つと見た系の持つエネルギー（力学的エネルギー）保存則と整合している.

[*16] 物体の運動の状況から，$v < 0$ が適当.

[*17] 物体の運動の状況から，$v < 0$ が適当.

14. 単振動の時間追跡とエネルギー②

図のように，ばね（ばね定数 k，質量無視）の一端を固定された天井に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．物体は $x = \dfrac{mg}{k}$ の位置でつりあった．時刻 $t = 0$ に物体を位置 $x = 0$ で静かに手を放した．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を立式せよ．

II　物体の位置 x を時刻 t の関数として表せ．また，位置 x を時刻 t で微分することにより，速度 v を時刻 t の関数として表せ．なお，必要であれば以下の微分公式か，位置および速度に関する公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\} = \omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\} = -\omega\sin(\omega t)\,,$$
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt} = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

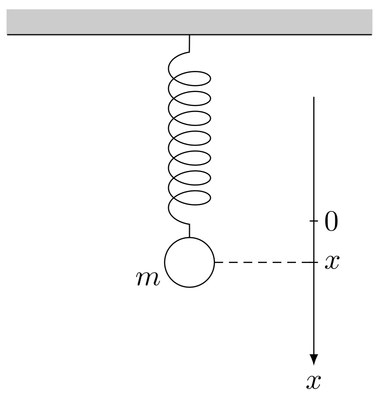
III　v，x の 2 式について時刻 t を消去することで，v と x の間の直接の関係式を記せ．

IV　1 回目に物体が位置 $x = \dfrac{mg}{2k}$ を通過したときの速度 v を，

(1)　時間追跡で得た 2 式を解くことにより求めよ．

(2)　物体の運動エネルギー変化と物体がされる仕事の関係に注目することにより求めよ．

(3)　物体と重力場とばねを 1 つの系と見て，全体の力学的エネルギーが保存することにより求めよ．



【解答】

I　運動方程式より，

$$\underset{\sim\sim\sim}{ma = -kx + mg}\,.$$

II　運動方程式・初期条件より，

$$x(t) = \frac{mg}{k}\left\{1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right\}, \quad v(t) = g\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

III　II より[*18]，

$$v^2 + \frac{k}{m}x^2 - 2gx = 0\,.$$

IV (1)　$x = \dfrac{mg}{2k}$ より，

$$\frac{mg}{k}\left\{1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right\} = \frac{mg}{2k}\,, \qquad \therefore t = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}\,, \quad v = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}\,.$$

(2)　物体のみを 1 つの系と見てエネルギー収支を考えれば[*19*20]，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - 0 &= \int_0^{\frac{mg}{2k}} (-kx + mg)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k}\right)^2 + mg\frac{mg}{2k}\,, \qquad \therefore v = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}\,.\end{aligned}$$

(3)　全体を 1 つの系と見て力学的エネルギー保存則を考えれば，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k}\right)^2 + mg\left(-\frac{mg}{2k}\right) = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2 + mg\cdot 0$$
$$\therefore v = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}\,.$$

---

*18 物体とばねと重力場を合わせて一つと見た系の持つエネルギー（力学的エネルギー）保存則と整合している．

*19 物体の運動の状況から，$v > 0$ が適当．

*20 ばねと重力のする仕事がともに経路に依らず，始点と終点のみで決まることがわかる．この式変形によって，ばね，および重力場（重力の作用する空間）には「エネルギー」が宿ると解釈し，これを位置エネルギーと呼んでいる．エネルギーとは何かと言えば，運動方程式を変形した結果都合の良い（便利な）関係式（時刻という媒介変数によらない関係式）となり，その各項をエネルギーと呼んでいるに過ぎない．初めから意味や実態があるのではなく，数式に現れる項に人類が意味や解釈を見出したのである．というのは言い過ぎで，この論理では理由もなく力や加速度を特別視し，これらには本質的な意味や実態があるということになってしまうし，歴史的にもそのように辿っているわけではない．エネルギーや仕事も目に見えないが，力や加速度も目に見るわけではない（そもそも目に見えることが「本質的」な量である根拠となるかどうかもわからない）．どちらをアプリオリに仮定しても両者は数学的に同値であり，どちらを本質的な量とするかは結局のところイデオロギーの対立である．

§2.2 多体系の力学

第 2 章では，多体系（多体と言っても 2 物体）を扱う．物体が複数ある場合，その運動の解析（時間追跡）は殆どの場合で困難が生じる．そこで，時間変化しないもの，すなわちその系を特徴づけるような保存量に注目することで，各瞬間における力学変数（位置，速度）を決定する．この際に有効な保存量が運動量である．そこで，まず初めに運動量と関係付く力積という量の計算方法について学ぶ．そして，2 物体系の問題を扱う．なお，衝突や分裂といった現象は，衝突/分裂が一瞬で起こることやその力学モデルの詳細が不明なために，力の詳細が不明で力積や仕事の計算が行えない．そこで，衝突・分裂の問題は，例外的な扱いとして問題を解くこととなる．

■簡単なまとめ

- 多体系の基本：
  - ❶ 解法整理：

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{系全体の力学的エネルギー保存則} \\ \text{（束縛条件）} \end{cases}$$

束縛条件に関しては，明示的に考えなくとも良い場合が多い．束縛条件を明示的に考えないと解けないような問題は難しい．

  - ❷ 内力のする仕事：個々の物体のエネルギー収支に注目する．特に，摩擦の場合，系全体の力学的エネルギーが保存しないことに注意．

- 衝突・分裂：衝突/分裂時の力の詳細が不明なため，問題文で考えているモデル（平たく言えば条件）を与える必要がある．

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{問題文の条件} \end{cases}$$

条件として，はね返り係数が与えられることがあるが，はね返り係数の式は分数式でなく以下のように用いるのが良い．

$$v^{(\mathrm{A})}_{\text{終}} - v^{(\mathrm{B})}_{\text{終}} = -e\left(v^{(\mathrm{A})}_{\text{始}} - v^{(\mathrm{B})}_{\text{始}}\right)$$

- 力積の計算の分類：力積は，問題文で「力積」と言われて初めて考える．

$$\begin{cases} f\ \text{の関数形が既知} & \to & \text{定義通りの計算（積分，もしくは}\ f-t\ \text{図の面積評価）} \\ f\ \text{の関数形が不明} & \to & \text{運動量収支から逆算} \end{cases}$$

- 重心の定義：i 番目 $(i=1,2,\cdots n)$ の物体の質量を m_i，位置を x_i とする．

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

1. 力積の計算①（定義による計算・一定の大きさの力）

$t=0$ に物体（質量 m）を鉛直下向きに初速 v_0 で放した．正の向きを鉛直下向きに定める．また，重力加速度の大きさを g とする．

(1)　時刻 t までに物体が重力から受けた力積 I を計算せよ．

(2)　運動量収支を利用し，時刻 t での物体の速度 v を求めよ．

【解答】

(1)　力積の定義より，

$$I = \underline{mgt}\,.$$

(2)　運動量収支より，

$$mv - mv_0 = mgt\,, \qquad \therefore v = \underline{v_0 + gt}\,.$$

2. 力積の計算②（定義による計算・時間変化する力）

ばね（ばね定数 k，質量無視）の一端を固定された壁に，他端を物体（質量 m）に取り付けた．ばねは常に水平かつ直線的で，物体はなめらかな水平面上を運動する．原点をばねが自然長での物体の位置に取り，水平でばねが伸びる向きに x 軸を定める．物体の初期条件は $x(0) = A\,(>0)$，$v(0) = 0$ とする．

(1)　物体の位置 x を，時刻 t の関数として表せ．

(2)　時刻 $t = 0$ から t までの間に物体が受けた力積 I を，時刻 t の関数として表せ．

(3)　運動量収支を利用し，物体の速度 v を，時刻 t の関数として表せ．

【解答】

(1)　運動方程式より，角振動数は $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ である．よって，初期条件より[*21]，

$$x = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}.$$

(2)　力積の定義より，

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t (-kx)\,dt \\ &= \int_0^t \left\{-kA\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right\} dt \\ &= -A\sqrt{km}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right). \end{aligned}$$

(3)　運動量収支より，

$$mv - m\cdot 0 = -A\sqrt{km}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right), \qquad \therefore v = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

[*21] 時間追跡の章でやったように丁寧にやっても良いし，運動の状況から明らかに $+\cos$ と判断しても良い（今は前者のように丁寧にやった方がいい気もするが，後者のようにできないのも今後困る）．

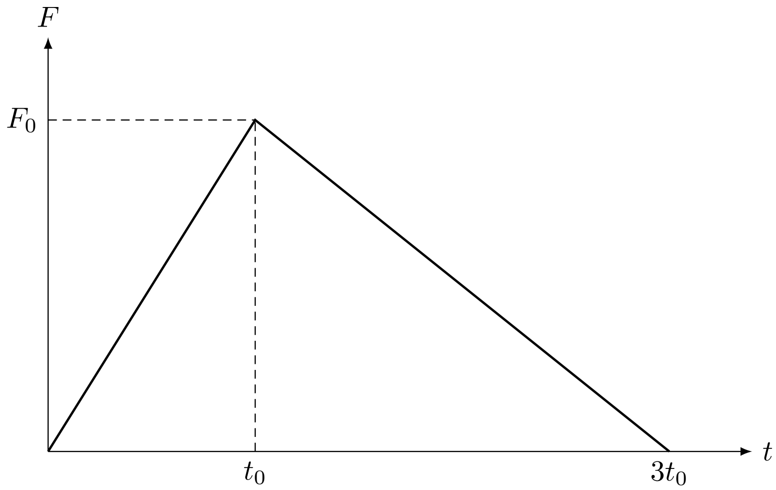
3. 力積の計算③（定義による計算・グラフの面積利用）

一定速度 v_0 で運動する物体に，時刻 $t = 0$ に物体（質量 m）に図のように時間変化する外力 F を加えた．

(1)　時刻 $3t_0$ までに物体が受けた力積 I を計算せよ．

(2)　物体の運動量変化が受けた力積に等しいことから，時刻 $3t_0$ での物体の速度 v を求めよ．

(3)　おまけ：力積の値から，時間 $3t_0$ の間に物体が受けた平均の力の大きさ $\overline{F}$ を求めよ．



【解答】

(1)　力積の定義より，グラフを利用して，

$$I = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}F_0 t_0}\,.$$

(2)　運動量収支より，

$$mv - mv_0 = \frac{3}{2}F_0 t_0\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim}{v_0 + \frac{3F_0}{2m}t_0}\,.$$

(3)　力積の定義より，

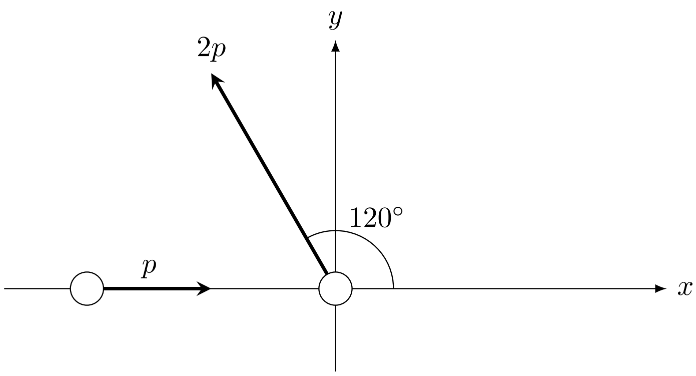
$$\overline{F}\cdot 3t_0 = \frac{3}{2}F_0 t_0\,, \qquad \therefore \overline{F} = \underset{\sim\sim}{\frac{1}{2}F_0}\,.$$

4. 力積の計算④（運動量収支から逆算）

xy 平面内を運動する物体の運動を考える．x 軸正方向に大きさ p の運動量で運動していた物体が原点を通過する瞬間ごく短い間外力を加えたことで，物体は x 軸正方向からの 120° の方向へ大きさ $2p$ の運動量で運動をした．

(1)　物体が受けた力積の x 成分，および y 成分を求めよ．

(2)　物体が受けた力積の大きさ I を求めよ．



【解答】

(1)　運動量収支から，

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ \sqrt{3}\,p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2p \\ \sqrt{3}\,p \end{pmatrix}.$$

(2)　設問 I より，

$$I = \sqrt{{I_x}^2 + {I_y}^2} = \sqrt{7}\,p.$$

5. 多体系を特徴付ける保存量としての運動量保存則

以下の文章を読み，$\boxed{}$ に適した式または数を答えよ．

1 次元上の 2 物体の運動（物体 A，物体 B）を考え，物体の運動方向に x 軸を定める．両物体は何らかを介して[*22]互いに力を及ぼし合い，物体 A は $+f\,(>0)$，物体 B は $-f$ の力を受けている．物体 A の物理量には添え字として 1 を，物体 B の物理量には添え字として 2 を付する．

両物体の運動方程式は，

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{dv_1}{dt} = \boxed{\quad ① \quad}, \\ m_2 \dfrac{dv_2}{dt} = \boxed{\quad ② \quad}, \end{cases}$$

と書ける．ここで，2 式の和を取ると，

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} = \boxed{\quad ③ \quad}$$

となり，m_1，m_2 が一定の下では，

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad ④ \quad}\right) = \boxed{\quad ③ \quad}, \qquad \therefore \boxed{\quad ④ \quad} = \mathrm{const}$$

を得る．以上から，物体 A，および物体 B から成る系の x 軸方向の運動量の和は保存することがわかる．

なお，物体 A に外力 F が作用するとき，

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad ④ \quad}\right) = \boxed{\quad ⑤ \quad},$$

となり，系の運動量は保存せず，系の運動量収支は（物体 A が）外部から受ける力積に等しくなる[*23]．

【解答】

① $+f$　　② $-f$　　③ 0　　④ $m_1v_1 + m_2v_2$　　⑤ F

[*22] ばねや糸，面，空間など．

[*23] 両辺 $t = 0$ から t までの時間積分を考えれば，

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(m_1v_1 + m_2v_2)\,dt = \int_0^t F\,dt$$

$$\{m_1v_1(t) + m_2v_2(t)\} - \{m_1v_1(0) + m_2v_2(0)\} = \int_0^t F\,dt\,.$$

6. ばねによる相互作用

図のように，水平右向きに x 軸を定める．物体 B（質量 M）にばね（ばね定数 k，質量無視）の一端を取り付け，物体 A（質量 m）に x 正方向に大きさ v_0 の初速度を与え，ばねの他端に向かわせた．物体 A，物体 B，ばねからなる系の力学的エネルギーは保存する．物体 A がばねに接触してからの運動を考える．

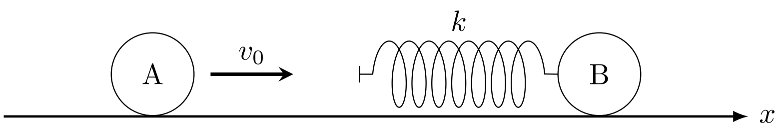
I　両物体の速度が等しく u となったとき，ばねの縮みは s であった．

(1)　x 方向には外力が働かないことから，全体を 1 つの系と見たときの系の x 方向の運動量は保存する．運動量保存則を立式せよ．

(2)　系の力学的エネルギーは保存する．力学的エネルギー保存則を立式せよ．

(3)　u，s を求めよ．

II　初速度を与えてから，ばねが初めて自然長に戻ったときの A の速度を v，B の速度を V とする．v，V を求めよ．



【解答】

I (1)　略

(2)　略

(3)　力学的エネルギー・運動量保存則より，

$$\begin{cases} mu + Mu = mv_0\,, \\ \dfrac{1}{2}mu^2 + \dfrac{1}{2}mu^2 + \dfrac{1}{2}ks^2 = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,, \end{cases} \qquad \therefore u = \frac{m}{M+m}v_0\,, \quad s = v_0\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}\,.$$

II (1)　力学的エネルギー・運動量保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}MV^2 = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,, \\ mv + MV = mv_0\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \frac{m-M}{M+m}v_0\,, \quad V = \frac{2m}{M+m}v_0\,.$$

7. 面を介した相互作用①

水平な床の上に物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $M\,(>m)$）を置く．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．物体 A に x 正方向に大きさ v_0 の初速度を与えた．物体 B と床はなめらかに繋がっており，全ての摩擦は無視する．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体 A が物体 B 上の曲面上を折り返したときの両物体の速度を u，物体 A の床からの高さを h とする．

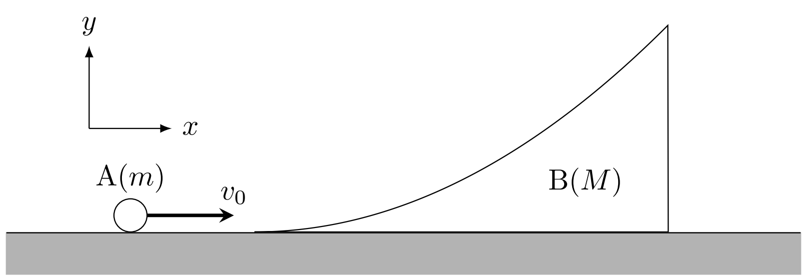
(1)　x 方向には外力が働かないことから，全体を 1 つの系と見たときの系の x 方向の運動量は保存する．運動量保存則を立式せよ．

(2)　系の力学的エネルギーは保存する．力学的エネルギー保存則を立式せよ．

(3)　u，h を求めよ．

II　A が再び床に戻った後の A の速度を v，B の速度を V とする．v，V を求めよ．

III　おまけ：これは時間追跡ができない（現実的でない）．それは何故か考えよ．例として，曲面が円の一部である場合を考えて，束縛条件を立ててみると良い．



【解答】

I (1)　x 方向の運動量保存則は，

$$\underset{\sim\sim\sim}{Mu+mu=mv_0}\,.$$

(2)　力学的エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}Mu^2+\frac{1}{2}mu^2+mgh=\frac{1}{2}m{v_0}^2\,.$$

(3)　力学的エネルギー・運動量保存則より，

$$u=\frac{m}{M+m}v_0\,,\quad h=\frac{M{v_0}^2}{2(M+m)g}\,.$$

II　力学的エネルギー・運動量保存則より[*24]，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}MV^2=\dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,,\\ mv+MV=mv_0\,,\end{cases}\qquad \therefore v=\frac{m-M}{M+m}v_0\,,\quad V=\frac{2m}{M+m}v_0\,.$$

III　補足を参照.

[*24] この一連の運動はこれより後ろにある衝突の問題の弾性衝突と見なすことができる．実際，力学的エネルギー保存則に運動量保存則から得られる $MV=m(v_0-v)$ を用いて，$V\neq 0$ より，

$$MV^2=m{v_0}^2-mv^2=m(v_0-v)(v_0+v)=MV(v_0+v)$$
$$\therefore V=v_0+v$$

を得る．このとき，$V=v_0+v$ ははね返り係数 1 の式と同値であることがわかる（ひとつ前のばねの問題の設問 II でも同じことが言えるが，解答のスペースの都合でこちらに載せた）.

【補足 1】束縛条件に関する一般論（難しい）

A が B の曲面上の任意の点にある瞬間を考える．この瞬間の A の位置を (x, y)，B の位置を (X, Y) とする．このとき，束縛条件は曲面の方程式を $y - Y = f(x - X)$ とすると[*25]，これが面が変形せず物体がこの曲面上を運動することからこの方程式が束縛条件になっており，この両辺の t 微分を考えることで[*26]，

$$\begin{aligned} \dot{y} - \dot{Y} &= \frac{df}{d(x-X)}\frac{d(x-X)}{dt} = f' \cdot (\dot{x} - \dot{X}) \\ \therefore f' \cdot (\dot{x} - \dot{X}) &- (\dot{y} - \dot{Y}) = 0 \,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

したがって，次の 2 つのベクトルが平行であることが言える．

$$\begin{pmatrix} \dot{x} - \dot{X} \\ \dot{y} - \dot{Y} \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ f' \end{pmatrix} .$$

このことは，B に対する A の相対速度が，接面の傾き（右側のベクトル）[*27]と平行であることを意味する．

今，一般の場合[*28]で議論してきたため，一般論として(相対速度)//(接面) は成り立つ[*29]．加速度に関する束縛条件は，速度に関する束縛条件 (2.1) 式の両辺をもう 1 回 t で微分すれば得ることができ，右辺は積の微分公式を利用することで

$$\begin{aligned} \ddot{y} - \ddot{Y} &= \frac{d}{dt}\left\{ f' \cdot (\dot{x} - \dot{X}) \right\} \\ &= f'' \cdot (\dot{x} - \dot{X})^2 + f' \cdot (\ddot{x} - \ddot{X}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

となる．このようにして，加速度に関する束縛条件が複雑な形となってしまうために，運動方程式と連立して解くことが，すなわち未知力の決定が困難となる[*30][*31]．

---

*25 この問題では $Y = 0$ である．

*26 ドット記号 $\dot{O}$ は，$\dot{O} = \dfrac{dO}{dt}$ を表す．

*27 数学で習った微分の意味を確認せよ．わかりにくければ，中学で習った傾きの定義を思い出す．

*28 曲面の断面の方程式が直線だとか，放物線，円など具体的に指定していないという意味．

*29 そもそも垂直抗力の大きさが未知量なのはフック則により，垂直抗力が未知量であるということは面が硬く（ばね定数無限大），それゆえ面の変形がゼロであるからであった．面の変形がゼロということが物体の運動の軌道を制限（束縛）するわけだが，軌道を決定するというのは次に瞬間に進む方向まで決めてしまうということでもある．面が変形しないというたった 1 つの条件が，相対速度の方向まで決定してしまうのであり，束縛条件を知った今であれば，「変形しない面上を運動する物体の相対速度の方向」といういまいちピンとこなさそなもののイメージも持てるだろう．イメージが先に在ってわかるのではなく，すでに知っている（わかっている）からイメージできる．

*30 加速度だけの関係式ならば解くことはできるが，（相対）速度の 2 乗が含まれることにより解くことが困難となる．$f'' = 0$，すなわち $\ddot{y} - \ddot{Y} = f' \cdot (\ddot{x} - \ddot{X})$ のような場合（面の傾き f' が一定な場合），加速度の束縛条件もシンプルな形となり，運動方程式と連立させる問題が作れる．この場合，斜面の傾きである $\tan\theta$ がそのまま f' に入る）．

*31 実は円の場合も特殊な考えを持ち出すことで例外的に未知力を決定することができる（一部の私大ではここ数年ほぼ毎年のように出題されている）．

【補足 2】全体で見たとき，垂直抗力のする仕事が相殺することについて[*32]

A が B から受ける垂直抗力（大きさ N）と鉛直線のなす角を θ とする[*33]．物体 A，B の運動方程式は B が床から受ける垂直抗力の大きさを R として，

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = -N\sin\theta\,, \\ m\dot{v}_y = N\cos\theta - mg\,, \\ M\dot{V}_x = N\sin\theta\,, \\ M\cdot 0 = R - Mg - N\cos\theta\,. \end{cases}$$

それぞれの式に対応した速度成分と積を取り，全ての式の和を取って整理すると[*34]，

$$m\dot{v}_x v_x + m\dot{v}_y v_y + M\dot{V}_x V_x + M\cdot 0\cdot 0 + mgv_y = -N\sin\theta v_x + N\cos\theta v_y + N\sin\theta V_x$$
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m({v_x}^2+{v_y}^2)+\frac{1}{2}M({V_x}^2+0^2)+mgy\right\} = N\underbrace{\begin{pmatrix} v_x - V_x \\ v_y - 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{A に対する B の}\\\text{相対速度ベクトル}}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\substack{N\text{ と平行な}\\\text{単位ベクトル}}},$$

となり，右辺はこの瞬間における垂直抗力の仕事率を表す．ここで，$\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ は接面と直交した（N と同じ方向の）単位ベクトルゆえ，接面と平行である相対速度ベクトル[*35]とは直交している．このことから，垂直抗力の仕事率は全体としてはゼロとなり[*36]，以下のように，系の力学的エネルギー保存則が確認できる．

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m({v_x}^2+{v_y}^2)+\frac{1}{2}M({V_x}^2+0^2)+mgy\right\} = 0$$
$$\therefore \underbrace{\frac{1}{2}m({v_x}^2+{v_y}^2)}_{\text{物体 A}}+\underbrace{\frac{1}{2}M({V_x}^2+0^2)}_{\text{物体 B}}+\underbrace{mgy}_{\text{重力場}} = \text{const}\,.$$

[*32] 自分で再現できなくてもよいが，読んで理解できるのが望ましい．

[*33] 今，A が運動する B の面は曲面のため，角 θ は B の曲面上の位置による．すなわち，相対位置 $x - X$ の関数であり $\theta = \theta(x - X)$ と書ける（物体の相対的な位置が変われば θ も変わる）．

[*34] 上の式から下の式はわからなくても良いが，下の式から上の式は確認できるようにしたい．合成関数の微分公式から，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m{v_x}^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dv_x}\left({v_x}^2\right)\frac{dv_x}{dt} = mv_x\dot{v}_x\,.$$

v_y，V_x についても同様である．右辺は，内積の定義より，

$$N\begin{pmatrix} v_x - V_x \\ v_y - 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = -N(v_x - V_x)\sin\theta + Nv_y\cos\theta\,.$$

[*35] **【補足 1】**の波線部を参照．

[*36] 互いに直交したベクトルの内積はゼロ．

8. 面を介した相互作用②（束縛条件が絡む問題）

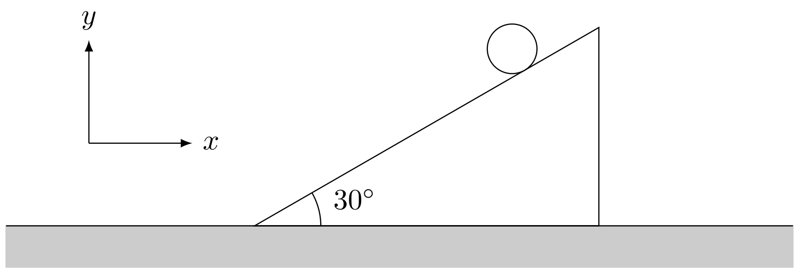
図のように，三角台（質量 $2m$，傾斜角 $30°$）を水平面上に置き，三角台の斜面上に質量 m の小物体を静かに置いた．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．はじめ，小物体は三角台上の高さ h の位置にあった．小物体が水平面上に達する直前の小物体の速度を $\vec{v}=(v_x, v_y)$，三角台の速度の x 成分を V とする．全ての摩擦は無視する．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　小物体と三角台から成る系の x 方向の運動量保存則を立式せよ．

(2)　小物体と三角台，重力場から成る系の力学的エネルギー保存則を立式せよ．

(3)　小物体が三角台上を運動することから，v_x，v_y，V の間に成り立つ関係式を立式せよ．

(4)　v_x，v_y，V を求めよ．



【メモ】

保存則に加え，束縛条件も考慮する必要がある．なお，このように束縛条件が単純な場合，例外的に時間追跡も可能である．

【解答】

(1)　x 方向の運動量保存則は，

$$\underset{\sim\sim\sim}{mv_x + 2mV = 0}\,.$$

(2)　力学的エネルギー保存則は，

$$\underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2) + \frac{1}{2}\cdot 2mV^2 = mgh}\,.$$

(3)　束縛条件は，

$$y - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - X)\,, \qquad \therefore\ \underset{\sim\sim\sim}{v_y = \frac{1}{\sqrt{3}}(v_x - V)}\,.$$

(4)　力学的エネルギー・運動量保存則，および束縛条件より，

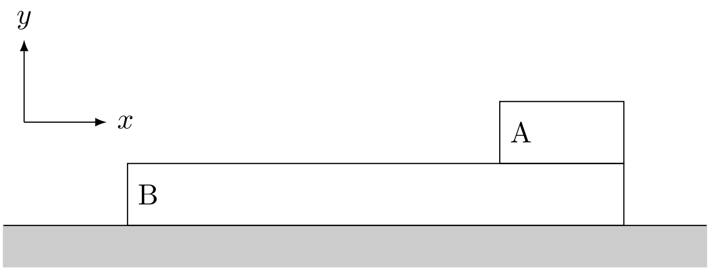
$$v_x = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{2}{3}\sqrt{2gh}}\,,\quad v_y = \underset{\sim\sim\sim}{-\sqrt{\frac{2}{3}gh}}\,,\quad V = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\sqrt{2gh}}{3}}\,.$$

9 . 摩擦によるエネルギー損失

図のように，物体 A（質量 m）を物体 B（質量 $2m$）の端に置く．物体 A と B の間には摩擦が働き，物体 B と床の間の摩擦は無視できる．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．物体 B に x 正方向に大きさ v_0 の初速度を与えたところ，物体 A は物体 B 上をすべり，物体 B 上のある位置で物体 B に対して静止した．物体 A，B 間の動摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする．

(1)　両物体間ですべりが生じなくなった時刻における両物体の速度を u とする．u を求めよ．

(2)　両物体間ですべりが生じなくなった時刻において，物体 B は床に対して D だけ変位し，物体 A は物体 B 上を d だけすべった．各物体のエネルギー収支を考えることで，d，D を求めよ．



【メモ】

内力のする仕事は各物体のエネルギー収支に注目する．

【解答】

(1)　運動量保存則より，

$$2mu + mu = 2mv_0\,, \qquad \therefore u = \underset{\sim\sim}{\frac{2}{3}v_0}\,.$$

(2)　各物体のエネルギー収支の式は，

$$\begin{cases} \mathrm{A} : \dfrac{1}{2}mu^2 - \dfrac{1}{2}m \cdot 0^2 = +\mu mg(D-d) \\ \mathrm{B} : \dfrac{1}{2} \cdot 2mu^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 2m{v_0}^2 = -\mu mgD \end{cases} \qquad \therefore D = \underset{\sim\sim}{\frac{5{v_0}^2}{9\mu g}}\,, \quad d = \underset{\sim\sim}{\frac{{v_0}^2}{3\mu g}}\,.$$

10.2 物体の衝突

物体 A（質量 m，初速 u）と物体 B（質量 M，静止）の衝突を考える．物体間のはねかえり係数（反発係数）を e とする．衝突は，水平面内で 1 次元的に起こるものとする．

(1)　弾性衝突の場合を考える．衝突後の物体 A の速度 v，および物体 B の速度 V をそれぞれ求めよ．

(2)　非弾性衝突の場合を考える．衝突後の物体 A の速度 v，および物体 B の速度 V をそれぞれ求めよ．

(3)　完全非弾性衝突の場合を考える．衝突後の両物体の速度を求めよ．

【解答】

(1)　略（以下の解答に $e = 1$ を代入せよ）．

(2)　運動量保存則・はね返り係数の定義より，

$$\begin{cases} mv + MV = mu\,, \\ v - V = -e(u-0)\,, \end{cases} \qquad \therefore v = -\frac{eM-m}{M+m}u\,,\quad V = \frac{(1+e)m}{M+m}u\,.$$

(3)　この場合，衝突方向の速度成分が等しくなる[*37]．運動量保存則より，

$$mv + Mv = mu\,, \qquad \therefore v = V = \frac{m}{M+m}u\,.$$

[*37] はね返り係数の式より．いちいち式を立ててもいいけど…

***11*.2** 物体の衝突（2 次元）①

(1)　xy 平面内（水平でなめらか，摩擦なし）での 2 体の衝突を考える．質量 m の物体 A を，$+x$ 方向から速さ v_0 で運動させ，静止している質量 M の物体 B へ衝突させた．衝突後，物体 A は速さ v で x 軸から時計回りに $\theta > 0$ の方向へ，物体 B は速さ V で x 軸から反時計回りに $\phi > 0$ の方向へ運動した．

各方向の運動量保存則を考えることで，v，V を求めよ．

(2)　上記の問題で，衝突は弾性的であるとし，$m = M$ の場合を考える．このとき，$\theta + \phi = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

【解答】

(1)　運動量保存則より，

$$\begin{cases} mv\cos\theta + MV\cos\phi = mv_0\,, \\ m(-v\sin\theta) + MV\sin\phi = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \frac{\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}v_0\,, \quad V = \frac{m\sin\theta}{M\sin(\theta+\phi)}v_0\,.$$

(2)　弾性衝突ゆえ力学的エネルギーより，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,.$$

ここに上記結果を代入して，$M = m$ とすれば，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\left(\frac{\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m\sin\theta}{M\sin(\theta+\phi)}v_0\right)^2 &= \frac{1}{2}m{v_0}^2 \\ 2\sin\theta\sin\phi(\sin\theta\sin\phi - \cos\theta\cos\phi) &= 0 \\ 2\sin\theta\sin\phi\cos(\theta+\phi) &= 0\,. \end{aligned}$$

ここで，$\sin\theta \neq 0$，$\sin\phi \neq 0$ より，

$$\cos(\theta+\phi) = 0\,, \qquad \therefore \theta + \phi = \frac{\pi}{2}\,.$$

12.2 物体の衝突（2 次元）②

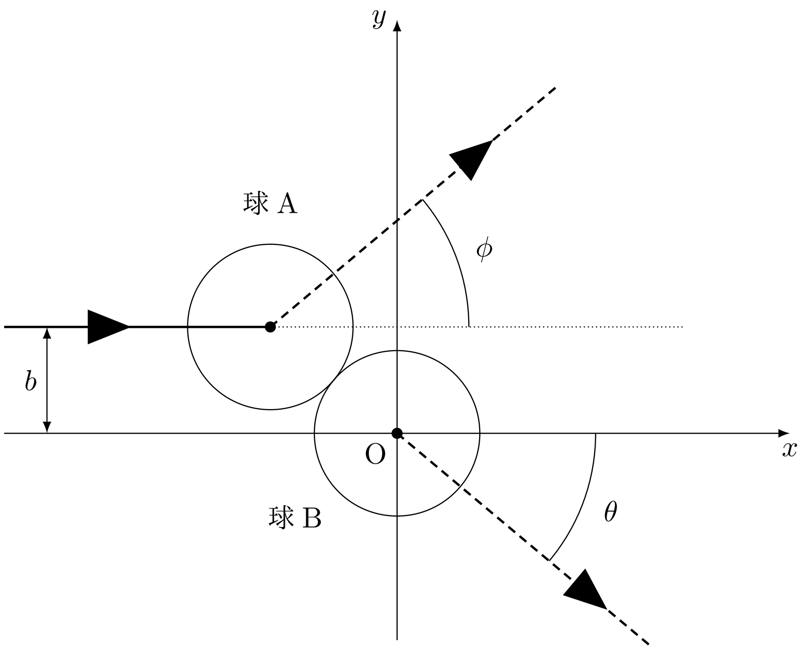
滑らかで水平な xy 平面上を，x 軸の正方向に速さ v_0 で運動する半径 r の剛体球 A が，原点に静止している半径 r の剛体球 B に弾性衝突するとき，球 A，B の質量をそれぞれ m，M，衝突後の球 A，B の速さをそれぞれ v，V として，以下の問いに答えよ．ただし，$v > 0$，$V > 0$，$M > m$ とする．

図 2 のように，球 A の中心が y 軸の正方向に $b\,(0 < b < 2r)$ ずれて衝突した．衝突の瞬間には 2 つの球の中心を通る直線に沿って力が働き，衝突後に球 A，B はそれぞれ x 軸の正方向と角度 ϕ，θ をなす方向に運動した．

(1) 運動量保存則を用いて，衝突後の球 A の速度の x 成分 $v\cos\phi$ と y 成分 $v\sin\phi$ を，v_0，V，m，M，θ の中から必要なものを用いて表せ．

(2) 衝突後の球 B の速さ V を v_0，m，M，θ を用いて表せ．

(3) 衝突後の球 A の運動エネルギーを v_0，m，M，r，b を用いて表せ．



【メモ】

2015 年岩手大学より，前半の問題を削除と問題文に少しだけ手を加えた．なお，問題の削除に伴い，図 1 を削除した．

【解答】

(1)　運動量保存則より，

$$\begin{cases} mv\cos\phi + MV\cos\theta = mv_0\,, \\ mv\sin\phi + M(-V\sin\theta) = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore v\cos\phi = v_0 - \frac{M}{m}V\cos\theta\,,\quad v\sin\phi = \frac{M}{m}V\sin\theta\,.$$

(2)　弾性衝突ゆえ，2 物体の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,.$$

ここに (4) の結果を代入して，

$$V = \frac{2m}{M+m}v_0\cos\theta\,.$$

(3)　図 2 より，

$$\sin\theta = \frac{r}{2b}\,,\quad \cos\theta = \sqrt{1-\frac{r^2}{4b^2}}\,.$$

よって，

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2\left\{1-\frac{4Mm}{(M+m)^2}\left(1-\frac{r^2}{4b^2}\right)\right\}.$$

13. 壁との衝突①

図に示した壁面と物体の間の衝突を考える．x 軸を水平右向きに定める．物体の初速度を $v_0\,(>0)$ とし，物体と壁面の間のはねかえり係数（反発係数）を e とする．

I　壁面が固定されているときを考える．

(1)　衝突後の物体の速度 v を求めよ．

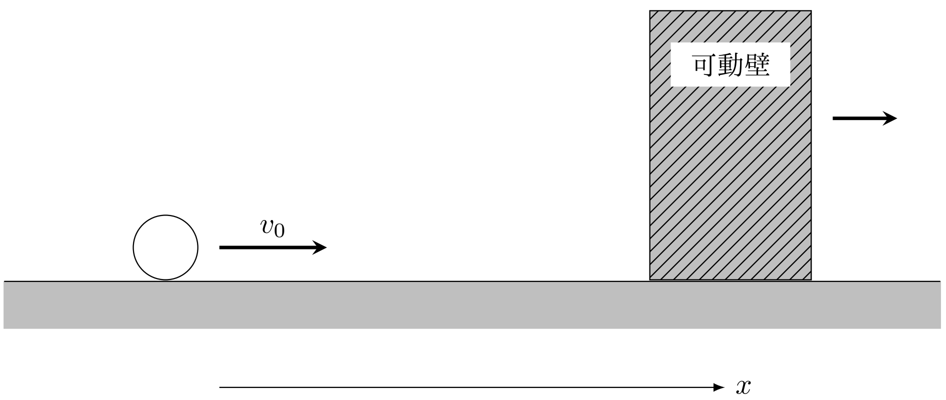
(2)　衝突の前後で，物体が壁から受けた力積 I を求めよ．

II　壁面が常に一定の速さ $u\,(<v_0)$ で運動している状況を考える．

(1)　衝突後の物体の速度 v を求めよ．

(2)　衝突後，物体が x 正方向に運動するための u の条件を求めよ．

(3)　衝突の前後で，壁が物体から受けた力積 I' を求めよ．



【メモ】

壁を等速で運動させるために，物体と壁からなる系には外力がはたらいており運動量は保存しない.

【解答】

I (1)　衝突の条件（はね返り係数）より，

$$v-0=-e(v_0-0)\,,\qquad \therefore v=\underset{\sim\sim\sim}{-ev_0}\,.$$

(2)　物体の運動量収支より，

$$I=\varDelta p=m(-ev_0)-mv_0=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-(1+e)mv_0}\,.$$

II (1)　衝突の条件より，

$$v-u=-e(v_0-u)\,,\qquad \therefore v=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(1+e)u-ev_0}\,.$$

(2)　$v>0$ を解いて，

$$(1+e)u-ev_0>0\,,\qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{u>\frac{e}{1+e}v_0}\,.$$

(3)　物体が受ける力積を I とすると，作用・反作用の関係から $I=-I'$ であり，

$$I'=-\varDelta p=-(mv-mv_0)=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{m(1+e)(v_0-u)}\,.$$

14. 壁との衝突②

重力加速度の大きさを g とする．小物体と滑らかな壁面，および床面の間のはねかえり係数（反発係数）を e とする．

I　位置 $(0,h)$ から位置 $x=\alpha h\,(\alpha>0)$ にある壁に向かい，水平方向に速さ v_0 で小物体を打ち出した．小物体は床面に達する前に壁に衝突した．

(1)　地面に衝突する前に壁に衝突するための v_0 の条件を求めよ．

(2)　落下時刻 t を求めよ．

(3)　衝突後，床面に達した小物体の位置 x を求めよ．

II　小物体を高さ h の位置から静かに放した．この時刻を $t=0$ とする．

(1)　床面に衝突する時刻 t を求め，この瞬間の速度 v を求めよ．

(2)　１回目に床面と衝突した後，次に折り返す高さ h_1 を求めよ．

(3)　衝突が収まる時刻 T を求めよ．なお，$0<a<1$ の定数に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n=0$ となることを用いてよい．

【解答】

I (1)　衝突する時刻 t は水平方向の運動から $t=\dfrac{\alpha h}{v_0}$ である．この時刻で $y>0$ であればよいので，

$$y=h-\frac{1}{2}g\left(\frac{\alpha h}{v_0}\right)^2>0\,,\qquad \therefore\, \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{v_0>\alpha\sqrt{\frac{1}{2}gh}}\,.$$

(2)　衝突直後の速度の x 方向成分は，衝突の条件（はね返り係数の定義）より，

$$v_x-0=-e(v_0-0)\,,\qquad \therefore\, v_x=-ev_0\,.$$

鉛直方向は力積を受けないため，鉛直成分の速度成分は衝突の前後で変化しない．よって，落下時刻は $t'=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ であり[*38]，

$$x=\alpha h-ev_0\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}-\frac{\alpha h}{v_0}\right)=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(1+e)\alpha h-ev_0\sqrt{\frac{2h}{g}}}\,.$$

II (1)　$y=0$ を解いて，

$$h-\frac{1}{2}gt^2=0\,,\qquad \therefore\, t=\underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}\,,\quad v=\underset{\sim\sim\sim\sim}{-\sqrt{2gh}}\,.$$

(2)　衝突後の速度は $e\sqrt{2gh}$，最高点での速度が 0 より，衝突後から最高点までの時間は $t=e\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ である[*39]．よって，

$$h_1=e\sqrt{2gh}\cdot e\sqrt{\frac{2h}{g}}-\frac{1}{2}g\left(e\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2=\underset{\sim\sim}{e^2h}\,.$$

(3)　n 回目の衝突直後の速度を v_n とする．$n-1$ 回目の衝突直後から n 回目の衝突までの時間 τ_n は $\tau_n=\dfrac{2ev_{n-1}}{g}$ であり，v_n ははね返り係数の定義より，

$$v_n=-e(-v_{n-1})=ev_{n-1}=e^2v_{n-2}=\cdots=e^n\sqrt{2gh}\,.$$

よって，

$$T=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}+2e^k\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{2e(1-e^n)}{1-e}\right\}\sqrt{\frac{2h}{g}}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{g}}}\,.$$

[*38] 等加速度運動の式で，加速度が $-g$ として $y=0$ を解く．

[*39] 等加速度運動の式で，加速度が $-g$ として $v=0$ を解く．(3) では $y=0$ を解けばよい．

15. 分裂

(1)　静止している質量 $3m$ の物体が，質量 m の物体 A と質量 $2m$ の物体 B に分裂した．物体 A の速度を $-v$ とするとき，物体 B の速度 V を求めよ．

(2)　速度 v_0 で運動する質量 M の物体の質量 $m\,(< M)$ の部分を，運動方向と逆方向に打ち出し分離させた．分離後の質量 $M-m$ の方の物体を A，質量 m の物体を B とする．A から観測した B の相対的な速さは，進行方向とは逆向きに u である．A の速度 V，B の速度 v をそれぞれ求めよ．

【解答】

(1)　運動量保存則より，

$$2mV + m(-v) = 3m\cdot 0\,, \qquad \therefore V = \underset{\sim}{\frac{v}{2}}\,.$$

(2)　運動量保存則・相対速度の式より，

$$\begin{cases} (M-m)V + mv = Mv_0\,, \\ v - V = -u\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{v_0 - \left(1-\frac{m}{M}\right)u}\,,\quad V = \underset{\sim\sim\sim}{v_0 + \frac{m}{M}u}\,.$$

16.（やらなくてもよい）重心運動と相対運動

図のように，滑らかで水平な床の上にばね（ばね定数 k，自然長 ℓ，質量無視）で繋がれた物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $2m$）が置いてある．床に沿って水平右向きに x 軸を定める．

時刻 $t=0$ に，A に初速度 $v_0\,(v_0>0)$ を与えた．時刻 t における A の位置を x_A，B の位置を x_B，A の速度を v_A，B の速度を v_B，A の加速度を a_A，B の加速度を a_B と記す．$t=0$ において，$x_\mathrm{A}=0$，$x_\mathrm{B}=\ell$ とする．

(1)　2 物体の運動方程式を立式せよ．

(2)　2 物体の運動方程式の和を取ることで，2 物体の重心の位置 X を，時刻 t の関数として表せ．

(3)　$y=x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}$ とする[*40]．2 物体の運動方程式を利用して，y を，時刻 t の関数として表せ．

(4)　x_A，x_B を，時刻 t の関数として表せ．

(5)　はじめてばねの縮みが最大となる時刻 t_1 を求めよ．また，t_1 における A の速度 v_1，および B の速度 u_1，ばねの縮み s_1 を求めよ．

(6)　はじめてばねが自然長に戻る時刻 t_2 を求めよ．また，t_2 における A の速度 v_2，および B の速度 u_2 を求めよ．

[*40] A に対する B の相対位置．今の場合ばねの長さを表す．

【メモ】

一見複雑（解くのが困難）に見える運動だが，実は運動方程式が既知の微分方程式に帰着するタイプの運動[*41][*42]．今後学習する『動く座標系』の章の知識を用いた誘導も存在する[*43]．

【解答】

(1)　運動方程式は，

$$\begin{cases} \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{ma_{\mathrm{A}} = +k\{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) - \ell\}}, \\ \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2ma_{\mathrm{B}} = -k\{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) - \ell\}}. \end{cases}$$

(2)　2 式の和を取って[*44]，

$$\begin{aligned} ma_{\mathrm{A}} + 2ma_{\mathrm{B}} &= 0 \\ \therefore mv_{\mathrm{A}} + 2mv_{\mathrm{B}} &= mv_0 + 2m \cdot 0 \\ \therefore mx_{\mathrm{A}} + 2mx_{\mathrm{B}} &= m \cdot 0 + 2m\ell + mv_0 t \\ \therefore X &= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{2}{3}\ell + \frac{1}{3}v_0 t}. \end{aligned}$$

(3)　$y = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}$ より，

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) = \frac{d^2x_{\mathrm{B}}}{dt^2} - \frac{d^2x_{\mathrm{A}}}{dt^2} = a_{\mathrm{B}} - a_{\mathrm{A}}.$$

よって，運動方程式より，

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{3k}{2m}(y - \ell)$$

となり，y は，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{3k}{2m}}$，振動中心 $y = \ell$ の単振動を行うことがわかる．初期条件から求まる積分定数を C，D とすれば，

$$y = \ell + C\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}\,t\right) + D\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}\,t\right)$$

---

*41 この問題の基本は保存則の連立である．このような誘導がない限りこの計算をたどる必要はない．

*42 鉛直方向の問題も作れる．この場合，2 物体からなる系に対して，運動方向に重力が外力として作用するため運動方向の運動量は保存しない．そのため，このような誘導を付ける他ない．

*43 重心とともに動く座標系（重心系）から 2 物体を観測する誘導，A とともに動く座標系から B を観測する誘導がある．

*44 運動量保存則と同値．

と表せる．$t=0$ において，$y=\ell$，$\dfrac{dy}{dt}=-v_0$ より[*45]，

$$\begin{cases} \ell = \ell + D \\ -v_0 = C\sqrt{\dfrac{3k}{2m}} \end{cases} \qquad \therefore C = -v_0\sqrt{\frac{2m}{3k}}\,,\quad D = 0\,,$$

と求まり，

$$y = \ell - v_0\sqrt{\frac{2m}{3k}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}\,t\right).$$

(4)　I，II より，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{3}v_0 t + \dfrac{2}{3}v_0\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}\,t\right), \\ x_{\mathrm{B}} = \ell + \dfrac{1}{3}v_0 t - \dfrac{1}{3}v_0\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}\,t\right). \end{cases}$$

(5)　y の最小値を取る瞬間を考えればよい[*46]．したがって，

$$\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}\,t\right) = 1\,,\qquad \therefore t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2m}{3k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{6k}}\,.$$

このときのばねの縮みは，

$$s_1 = \ell - y = v_0\sqrt{\frac{2m}{3k}}\,.$$

また，このとき 2 物体の速度は等しく[*47]，

$$v_1 = u_1 = \frac{1}{3}v_0\,.$$

(6)　再び $y=\ell$ となるときを考えて，

$$\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}\,t\right) = 0\,,\qquad \therefore t_2 = \pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}\,.$$

*45 $y(0) = x_{\mathrm{B}}(0) - x_{\mathrm{A}}(0)$，$\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = v_{\mathrm{B}}(0) - v_{\mathrm{A}}(0)$ である．

*46 ばねの縮み $\ell - y$ の最大となる瞬間を考えても良い．

*47 実際に代入してもわかるし，相対位置が極値を取ることから $\dfrac{dy}{dt}=0$ を満たし，2 物体の速度が等しい（相対速度が 0 である）ことがわかる．このとき，2 物体の速度は重心速度とも一致する．

よって[*48]，

$$v_2 = -\underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{3}v_0}\,,\quad u_2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2}{3}v_0}\,.$$

[*48] $v_{\mathrm{A}} = \dfrac{dx_{\mathrm{A}}}{dt}$，$v_{\mathrm{B}} = \dfrac{dx_{\mathrm{B}}}{dt}$ に代入して計算してもよいし，運動量保存則（重心の運動方程式から得られた速度の関係式）とこの瞬間の相対速度 $\dfrac{dy}{dt} = -v_0$ を用いて連立方程式を解いてもよい．

§2.3 円運動

第 3 章では，円に束縛された運動を扱う．円に束縛された運動は，高校範囲では例外的に扱う．また，等速円運動と非等速円運動で解法が異なることに留意する．

■簡単なまとめ

- 等速円運動：

$$\begin{cases}\text{運動方程式の中心成分} \\ \text{（力のつりあい）}\end{cases}$$

- 非等速円運動：

$$\begin{cases}\text{運動方程式の中心成分} \\ \text{力学的エネルギー保存則}\end{cases}$$

力学的エネルギー保存則は，運動方程式の接線成分と同値である．力学的エネルギー保存則でなく運動方程式の接線成分で考えるもので主なものは，①単振り子，②ベータトロン（磁気分野）がある．

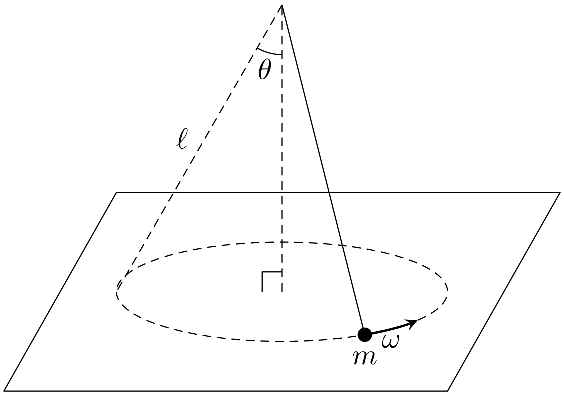
1. 等速円運動①

図のように，糸（長さ ℓ，質量，伸縮ともに無視）の一端を固定し，他端になめらかで水平な板上にある質量 m の小球を取り付け，糸と鉛直線とのなす角 θ の位置で角速度 ω の等速円運動をさせた．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　小球の速さ v，および円運動の周期 T を求めよ．

(2)　運動方程式，およびつりあいより，張力の大きさ S，垂直抗力の大きさ N を求めよ．

(3)　小球が板から離れないための角速度 ω の条件を求めよ．



【解答】

(1)　公式より，

$$v = \ell\omega\sin\theta\,, \qquad \therefore T = \frac{2\pi\ell\sin\theta}{v} = \frac{2\pi}{\omega}\,.$$

(2)　運動方程式（中心成分），および鉛直方向のつりあいより[*49]，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{\ell\sin\theta} = S\sin\theta\,, \\ 0 = S\cos\theta + N - mg\,, \end{cases} \qquad S = m\ell\omega^2\,, \quad N = mg - m\ell\omega^2\cos\theta\,.$$

(3)　$N \geq 0$ を考えて[*50]，

$$mg - m\ell\omega^2\cos\theta \geq 0\,, \qquad \therefore \omega \leq \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\theta}}\,.$$

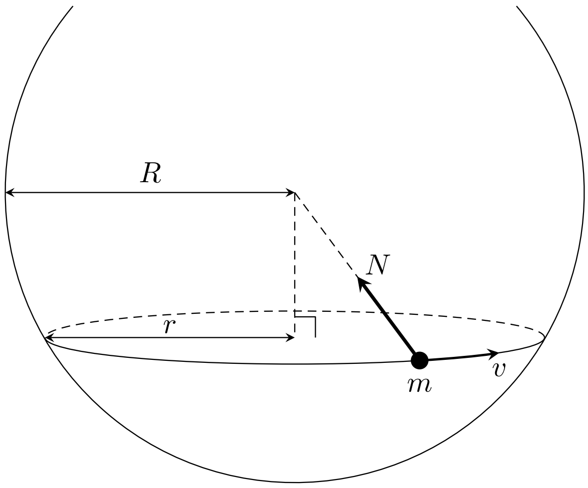
*49 中心方向の加速度は $\dfrac{(\text{速さ})^2}{(\text{半径})}$ の形を優先して覚えてほしいので解答はこちらで載せてある．v は前問の値を代入すればよい．

*50 等号の取り扱いだが，付けて議論しても付けなくて議論してもどちらでもよい．問題文を読んで判断する．

2. 等速円運動②

図のように，半径 R の球殻内で，大きさの無視できる質量 m の小球を半径 $r\ (< R)$ の円運動をさせた．小球の運動は水平面内に限られるものとし，重力加速度の大きさを g とする．

小球の速さ v，および小球が球殻から受ける垂直抗力の大きさ N を求めよ．



【解答】

運動方程式（中心成分），および鉛直方向のつりあいより，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{r} = N\dfrac{r}{R}\,, \\ 0 = N\dfrac{\sqrt{R^2-r^2}}{R} - mg\,, \end{cases} \qquad N = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\dfrac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}mg}\,,\quad v = r\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\dfrac{g}{\sqrt{R^2-r^2}}}}\,.$$

3. 非等速円運動①

糸（長さ ℓ，質量，伸縮ともに無視）に吊られ静止している小球（質量 m）に，大きさ v_0 の初速を与えた．小球の回転角 θ を図のように定める．重力加速度の大きさを g とする．

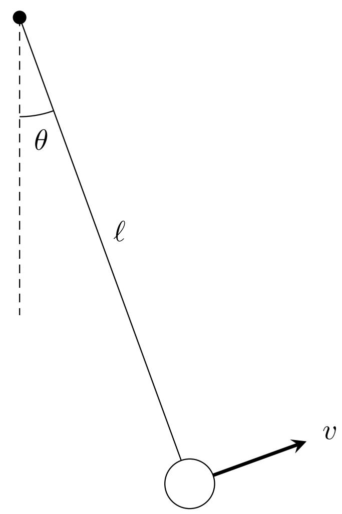
(1)　小球が角度 θ にあるときの小物体の速さ v を，力学的エネルギー保存則を考えることで求めよ．

(2)　小球が角度 θ にあるときの張力の大きさ S を，運動方程式の中心成分を考えることで求めよ．

(3)　小球が円軌道を取るための v_0 の最小値を求めよ．

(4)　小球を繋ぐ糸を，質量の無視できる変形のない棒に変えた．このとき，小球が円軌道を取るための v_0 の最小値を求めよ．

(5)　初速が十分小さいとき，小球の運動は単振動と見なせる．振動の周期 T を求めよ．ただし，$|\theta| \ll 1$ に対して成り立つ近似式 $\sin\theta \fallingdotseq 1$ を用いてよい．



【メモ】

非等速円運動は，以下の 2 式を連立する[*51][*52]．

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} & \leftarrow \quad v \text{ を決定した後，拘束力の決定} \\ \text{力学的エネルギー保存則} & \leftarrow \quad v \text{ の決定} \end{cases}$$

【解答】

(1)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,, \qquad \therefore v = \underline{\sqrt{{v_0}^2 - 2g\ell(1-\cos\theta)}}\,.$$

(2)　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{\ell} = S - mg\cos\theta\,, \qquad \therefore S = \underline{m\frac{{v_0}^2}{\ell} - mg(2-3\cos\theta)}\,.$$

(3)　$\theta = \pi$ で $S \geq 0$ が必要．よって，

$$S = m\frac{{v_0}^2}{\ell} - 5mg \geq 0\,, \qquad \therefore v_0 \geq \underline{\sqrt{5g\ell}}\,.$$

(4)　最高点での速さが 0 以上であればよい．よって，

$${v_0}^2 - 4mg\ell \geq 0\,, \qquad \therefore v_0 \geq \underline{2\sqrt{g\ell}}\,.$$

(5)　運動方程式（接線成分）より，

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta\,.$$

ここで，$v = \ell\dfrac{d\theta}{dt}$ であり，微小角の場合を考えて，

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \fallingdotseq -\frac{g}{\ell}\theta\,.$$

よって，運動の周期 T は，

$$T = \underline{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}\,.$$

[*51] 等速円運動は，運動方程式（中心成分）と必要に応じて各種つりあいを立てる．

[*52] 単振り子やベータトロンなどでは，力学的エネルギー保存則ではなく，それと数学的には同値な接線方向の運動方程式を考える．

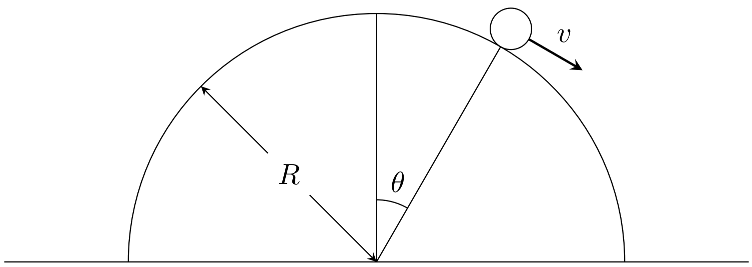
4. 非等速円運動②

図のように，水平面上に半径 R の半球台が固定されて置かれている．その最高点に質量 m で大きさの無視できる小物体が静止している．小物体に水平右向きの初速 v_0 を与えたところ，小物体は球面上を運動し，ある点で台から離れた．小物体の球面上の位置は，鉛直線と小物体と球の中心を結ぶ線分とのなす角 θ で与えることができる．重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ．摩擦は全て無視できるものとする．

(1)　小物体が球面上から離れていない間の運動を考える．角度 θ にあるときの小物体の速さを v，小物体が台から受ける垂直抗力の大きさを N とする．力学的エネルギー保存則より，v を θ の関数として求めよ．また，中心方向の運動方程式をより，N を θ の関数として求めよ．

(2)　小物体が $\theta = 0$ で球面上から離れないための条件を求めよ．

(3)　小物体が台から離れる位置を $\theta = \theta_0$ とする．$\cos\theta_0$ を求めよ．



【解答】

(1)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgR\,, \quad \therefore v(\theta) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{{v_0}^2 + 2gR(1-\cos\theta)}}\,.$$

中心方向の運動方程式より，

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N\,, \quad \therefore N(\theta) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{mg(3\cos\theta - 2) - m\frac{{v_0}^2}{R}}\,.$$

(2)　$\theta = 0$ で $N > 0$ が必要．よって，

$$N(\theta = 0) = mg - m\frac{{v_0}^2}{R} > 0\,, \quad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{v_0 < \sqrt{gR}}\,.$$

(3)　$N(\theta = \theta_0) = 0$ より，

$$N(\theta = 0) = mg(3\cos\theta_0 - 2) - m\frac{{v_0}^2}{R} = 0\,, \quad \therefore \cos\theta_0 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{3}\left(2 + \frac{{v_0}^2}{gR}\right)}\,.$$

5. 非等速円運動

図１－１のように，半径 R の半円筒形を持つ質量 $3m$ の台と，台上にある質量 m の小球の運動について考える．小球が円筒面上にあるとき，小物体の台上での位置を，その中心 O からの角 θ で表す（図１－2）．台は水平面から離れることなく運動するものとし，一切の摩擦を無視する．重力加速度の大きさを g とする．

I　台を固定し，小球に水平右向きに大きさ v_0 の初速を与えた．

(1)　小球が角 θ の位置にあるとき，小球の速さ v，および小球が台から受ける垂直抗力の大きさ N を求めよ．

(2)　小球が円筒面の点 A を通過して飛び出すためには，v_0 はある値 v_{m} より大きい必要がある．v_{m} を求めよ．

II　台を自由にし，小球に水平右向きに大きさ v_0 の初速を与えた．水平右向きを正とする．

(1)　小球はある位置で台の円筒面上を折り返した．この瞬間の小球の速度 v_1 を求めよ．

(2)　小球が折り返した後，小球が再び台の水平面上を運動するときの小球の速度 v_2，および台の速度 V_2 を求めよ．なお，折り返しの前後で小球が台から離れることはないものとする．

(3)　小球が台上の位置 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ を一回目に通過するときの台の速度 V を求めよ．

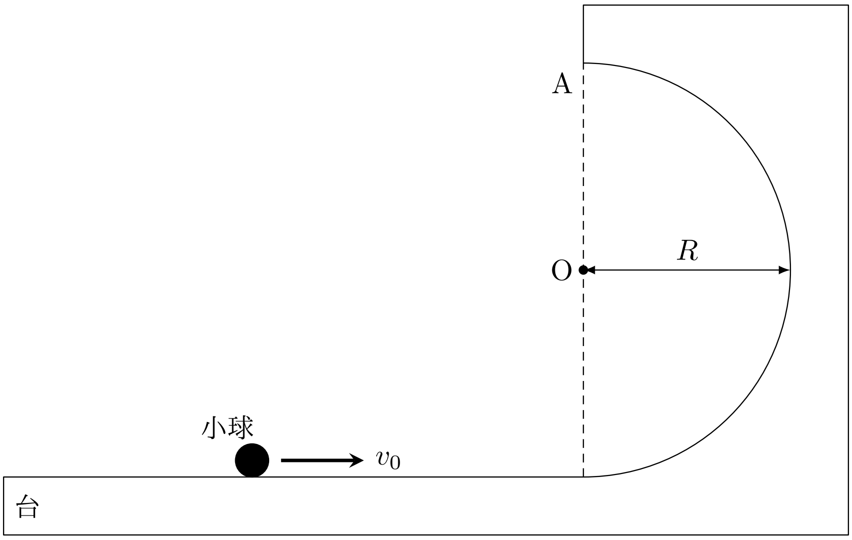


図 1 − 1

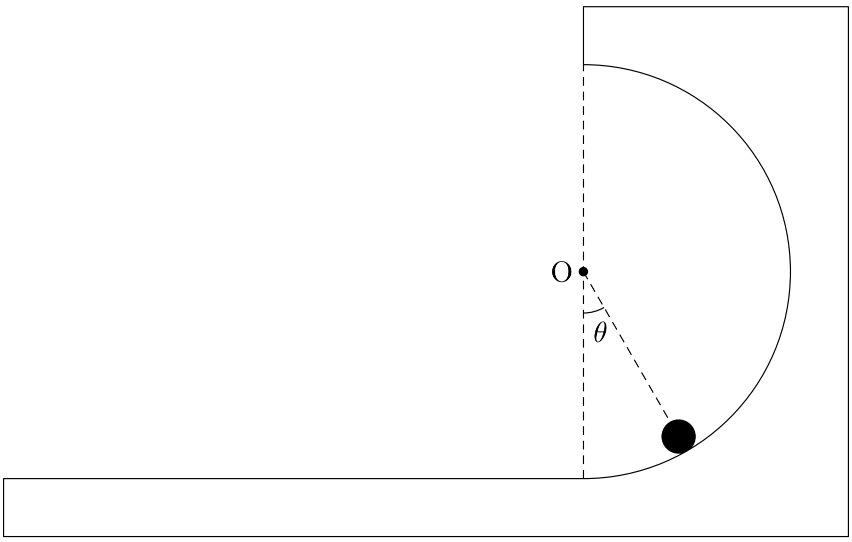


図 1 − 2

【解答】

I (1)　運動方程式（中心成分）・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta\,, \\ \dfrac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta) = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,. \end{cases}$$

以上 2 式より，

$$v = \sqrt{{v_0}^2 - 2gR(1-\cos\theta)}\,,\quad N = m\frac{{v_0}^2}{R} - mg(2-3\cos\theta)\,.$$

(2)　$\theta=\pi$ で $N>0$ を満たせばよく，

$$N(\theta=\pi) = m\frac{{v_0}^2}{R} - 5mg > 0\,,\qquad \therefore v_0 > \sqrt{5gR}\,(=v_{\mathrm{m}})\,.$$

II (1)　小球の速度を $\vec{v}=(v_x,\,v_y)$，台の速度を $\vec{V}=(V,\,0)$ と記す．折り返したことから，小球と台の水平方向の相対的な位置は極値を取り，$v_x=V$ である．よって，運動量保存則より[*53]，

$$mv_1 + 3mv_1 = mv_0\,,\qquad \therefore v_1 = \frac{1}{4}v_0\,.$$

(2)　運動量・全体のエネルギー保存則より，$V\neq 0$ なので[*54*55]，

$$\begin{cases} mv_2 + 3mV_2 = mv_0\,, \\ \dfrac{1}{2}m({v_2}^2+0^2) + \dfrac{1}{2}\cdot 3m{V_2}^2 = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 + 3V_2 = v_0\,, \\ 3{V_2}^2 = {v_0}^2 - {v_2}^2 = (v_0-v_2)(v_0+v_2)\,, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 + 3V_2 = v_0\,, \\ V_2 = v_0 + v_2\,, \end{cases}\qquad \therefore v_2 = -\frac{1}{2}v_0\,,\quad V_2 = \frac{1}{2}v_0\,.$$

(3)　束縛条件まで考慮して，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ を代入すれば，

$$\begin{cases} mv_x + 3mV = mv_0\,, \\ \dfrac{1}{2}m({v_x}^2+{v_y}^2) + \dfrac{1}{2}\cdot 3mV^2 + \dfrac{1}{2}mgR = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,, \\ v_y = \sqrt{3}\,(v_x - V)\,, \end{cases}$$

---

*53 以下，小球，台，重力場を 1 つの系と見る．

*54 2 つ目から 3 つ目の計算では，$3V = v_0 - v_x$ を利用．

*55 全体で見たとき垂直抗力は仕事をせず系のエネルギーは保存するため（詳しくは**【補足 5】**），この状況を弾性衝突と見なして始めから 3 つ目の式を立てても良い．というのも，3 つ目の第 2 式は，

$$V - v_x = -1\cdot(0 - v_0)$$

とはね返り係数 1 の式と同値となっている．

運動量保存則から v_x を V で表し，束縛条件から v_y を V で表し，エネルギー保存則を解いて[*56]，

$$
\begin{aligned}
(v_0-3V)^2+\{\sqrt{3}\,(v_0-4V)\}^2+3V^2+gR={v_0}^2 \\
60V^2-30v_0V+3{v_0}^2+gR=0 \\
\therefore V=\frac{v_0}{4}\left(1\pm\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{4gR}{15{v_0}^2}}\right).
\end{aligned}
$$

このとき，v_y は

$$
v_y=\mp v_0\sqrt{\frac{3}{5}-\frac{4gR}{5{v_0}^2}}
$$

であり，一回目に通過することから $v_y>0$ となる解を選んで，

$$
V=\frac{v_0}{4}\left(1+\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{4gR}{15{v_0}^2}}\right).
$$

【補足 1】運動方程式の接線成分と力学的エネルギー保存則

設問 I において，運動方程式は，

$$
\begin{cases}
m\dfrac{v^2}{R}=N-mg\cos\theta\,, \\
m\dfrac{dv}{dt}=-mg\sin\theta\,.
\end{cases}
$$

ここでは，第 2 式の接線成分に注目する．両辺に v をかけて，

$$
mv\frac{dv}{dt}+mgv\sin\theta=0\,.
$$

ここで，$v=R\omega=R\dfrac{d\theta}{dt}$ より，

$$
\begin{aligned}
mv\frac{dv}{dt}+mgR\frac{d\theta}{dt}\sin\theta=0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2-mgR\cos\theta\right)=0 \\
\therefore \frac{1}{2}mv^2-mgR\cos\theta=\text{const}
\end{aligned}
$$

を得る．本問では，はじめ $v=v_0$，$\theta=0$ より，

$$
\frac{1}{2}mv^2-mgR\cos\theta=\frac{1}{2}m{v_0}^2-mgR
$$

となり，解答で用いた式を得る[*57]．

[*56] 根号の前の符号が正の解が上り，負の解が下りの解を与えている．

[*57] この式の両辺を t で微分すれば運動方程式の接線成分が得られる．

【補足２】束縛条件

小球の位置を $(x,\,y)$，台の位置を $(X,\,R)$[*58]，小球の速度を $\vec{v}=(v_x,\,v_y)$，台の速度を $\vec{V}=(V,\,0)$ と記す．

このとき，面が変形せず，小球が台にめり込んだり台から離れたりしないことから必ず次の関係を満たす．

$$\begin{cases} x-X=R\sin\theta\,, \\ y-R=-R\cos\theta\,. \end{cases}$$

この式の時間微分を考えて，

$$\begin{cases} v_x-V=R\dot{\theta}\cos\theta\,, \\ v_y-0=R\dot{\theta}\sin\theta\,, \end{cases} \qquad \therefore v_y-0=(v_x-V)\tan\theta\,,$$

を得る[*59]．なお，相対速度の式の 2 乗の和を取ると，

$$(v_x-V)^2+(v_y-0)^2=(R\dot{\theta})^2=(R\omega)^2$$

となり，台に対する小球の相対速度の大きさは，円運動で用いる $v=R\omega$ の式を満たしていることも確認できる．

また，

$$\begin{pmatrix} v_x-V \\ v_y-0 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

より，相対速度は台の曲面の接線方向を向いていることも確認できる[*60]．

---

*58 y 軸の原点はどこにとっても良いが，今回は台の上面に取る．O の位置を原点とするのが最も単純な気がする．

*59 相対加速度は簡単（キレイ）な形にならないことに注意（速度と三角関数の積の微分による項が生じてしまうため）．相対加速度がキレイな形となるのは面が直線の場合に限る．ということは，面が直線のとき（三角台とか）は，保存則以外にも運動方程式による解法が存在するわけである（例えば，1 学期の中間試験で出したようなやつ）．ここら辺についても詳しく知りたい場合は前期補講の教材で確認を．

*60 $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ は，円弧に接する方向の単位ベクトル．

§2.4 中心力

第 4 章では，中心力場での物体の運動を扱う（主に天体が絡むの運動）．中心力場での物体の運動は時間追跡が困難なため，保存則の頼る他ない[*61]．そこで，系の力学的エネルギーに加えて，中心力場での物体の運動固有の保存量である面積速度という物理量を導入し，力学変数（位置や速度）を決定することとなる．なお，問題 ***1*** のように，天体が絡む運動以外で面積速度保存則を利用する場合，必ず問題文中に断り書きが入る．

■簡単なまとめ

- 天体が絡む運動：

  ❶ 円軌道の場合：円運動ゆえ円運動と同様例外的に扱う．

  $$\begin{cases}\text{運動方程式の中心成分} \\ \text{（力のつりあい）}\end{cases}$$

  なお，運動の周期は，速さ v で円周 $2\pi\times$（半径）だけ進む時間を考えればよい．

  ❷ 円以外の軌道：

  $$\begin{cases}\text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{面積速度保存則}\end{cases}$$

  また，楕円軌道（長半径 a，短半径 b）の場合は周期 T が存在し，その決定は以下の 2 通り存在する（ケプラー第 3 法則を利用するのが一般的）．

  $$\begin{cases}\dfrac{T^2}{a^3} = \mathrm{const} = \text{（同一天体周りの別軌道での値）} \quad \leftarrow \quad \text{ケプラー第 3 法則} \\ \dfrac{\pi ab}{T} = \text{（ある地点での面積速度）}\end{cases}$$

- 重力加速度の大きさ g と万有引力定数 G：地表付近の物体のつりあいより以下が成立（R：地球の半径，M 地球の質量）．

  $$mg = G\frac{Mm}{R^2}\,, \qquad \therefore g = \frac{GM}{R^2}\,.$$

*61 高校範囲での話．

1. 万有引力

地球（質量 M）の周囲を回る人工衛星（質量 m）の運動を考える．万有引力定数を G とする．以下の設問に答えよ．なお，各設問においてすべての軌道は地球の内側を通らないものとする．

(1)　人工衛星が半径 r の円軌道をしている場合を考える．人工衛星の速さ v_0 を，G，M，r を用いて表せ．

(2)　円軌道をしている人工衛星を，適当な操作によって加速させた（この間の人工衛星の質量変化は無視）．地球の中心と近地点（地球から最も近い点）までの距離を r，遠地点（地球から最も遠い点）までの距離を R，近地点での人工衛星の速さを v_{P}，遠地点での人工衛星の速さを v_{Q} とする．v_{P}，v_{Q} を，G，M，R，r を用いて表せ．

【メモ】

円軌道→運動方程式，楕円軌道（一般に，円以外の軌道）→面積速度・力学的エネルギー保存則．

【解答】

(1)　運動方程式（中心方向）より，

$$m\frac{{v_0}^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}, \qquad \therefore v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

(2)　面積速度・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}rv_{\mathrm{P}} = \dfrac{1}{2}Rv_{\mathrm{Q}}, \\ \dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{P}}}^2 + \left(-G\dfrac{Mm}{r}\right) = \dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{Q}}}^2 + \left(-G\dfrac{Mm}{r}\right), \end{cases}$$

$$\therefore v_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}\frac{R}{R+r}}, \quad v_{\mathrm{Q}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}\frac{r}{R+r}}.$$

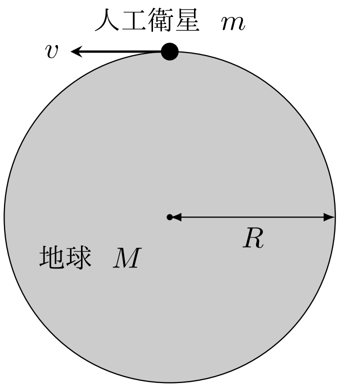
2. g と G，第〇宇宙速度

図のように，地球（質量 M，半径 R）から人工衛星（質量 m）を打ち上げる．万有引力定数を G，重力加速度の大きさを g とする．以下の設問に答えよ．

(1)　重力加速度の大きさ g を，G，M，R を用いて表せ．

(2)　速さ v_1 で打ち上げたとき，地上上空を周回した．この軌道は円軌道とみなせ，その半径は R としてよい．v_1 を，g，R を用いて表せ[*62]．

(3)　ある速さ v_2 より大きな速さで打ち上げたとき，人工衛星は無限遠へ飛び去った．v_2 を，g，R を用いて表せ[*63]．



[*62] この速さ v_1 を第 1 宇宙速度と呼ぶ．
[*63] この速さ v_2 を第 2 宇宙速度と呼ぶ．

【メモ】

地表における物体に働く重力から，万有引力定数 G を重力加速度の大きさ g で書き換える．

【解答】

(1)　地球表面において物体に働く重力から，

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}\,, \qquad \therefore g = \frac{GM}{R^2}\,.$$

(2)　運動方程式（中心方向）より，

$$m\frac{{v_1}^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}\,, \qquad \therefore v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}\,.$$

(3)　力学的エネルギー保存則より，

$$K_\infty + U_\infty = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right)\,.$$

ここで，無限遠へ到達するためには，$K_\infty > 0$ が必要．$U_\infty = 0$ であるから，

$$K_\infty = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) > 0\,, \qquad \therefore v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}\,.$$

3. ケプラー第 1 法則・第 2 法則，万有引力の法則から，第 3 法則を導く

太陽（質量 M）を不動と見なし，その周囲を公転する惑星について考える．惑星は，太陽からの万有引力のみを受けて運動するものとし，万有引力定数を G，太陽と近日点の距離を r，太陽と遠日点の距離を R とする．以下では，ケプラー第 1 法則，ケプラー第 2 法則を前提とする．

(1)　惑星の太陽を中心とした面積速度を h とする．近日点での惑星の速さ v，および遠日点での惑星の速さ V を，それぞれ h，r，R の中から必要なものを用いて表せ．

(2)　惑星の太陽を中心とした面積速度 h を，それぞれ r，R を用いて表せ．

(3)　楕円の性質を利用し，惑星の楕円軌道の長半径 a，および短半径 b を，それぞれ r，R を用いて表せ．

(4)　ケプラー第 2 法則を前提とすると，惑星の公転周期は，

$$T = \frac{\pi ab}{h}$$

を満たす．このことを用いて，$\dfrac{T^2}{a^3}$ の値を求め，ケプラー第 3 法則の成立を確認せよ．

【解答】

(1)　面積速度保存則（ケプラー第 2 法則）より，

$$v=\frac{2h}{r}\,,\quad V=\frac{2h}{R}\,.$$

(2)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{2h}{r}\right)^2+\left(-G\frac{Mm}{r}\right)=\frac{1}{2}m\left(\frac{2h}{R}\right)^2+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)\,,\qquad \therefore h=\sqrt{\frac{GMRr}{2(R+r)}}\,.$$

(3)　楕円の性質より，

$$2a=r+R\,,\qquad \therefore a=\frac{r+R}{2}\,.$$

また，

$$2a=2\sqrt{b^2+\left(\frac{R-r}{2}\right)^2}\,,\qquad \therefore b=\sqrt{Rr}\,.$$

(4)　前問の結果より，面積速度は，

$$h=\sqrt{\frac{GMRr}{2(R+r)}}=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}}\,.$$

よって*64，

$$T=\frac{\pi ab}{b/2\sqrt{GM/a}}=4\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}\,,\qquad \therefore \frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}\,.$$

*64 $\dfrac{T^2}{a^3}$ の値は太陽（中心にある天体）の質量で決まることから，太陽の周囲を公転する天体では共通の値を取る．

4. ケプラー則

地球（質量 M，半径 R）の周囲を回る静止衛星（周回軌道の半径 R，質量 m）を考える．万有引力定数を G とする．以下の設問に答えよ．

(1)　静止衛星の周期 T_1 を，G，M，R を用いて表せ．

(2)　続いて，人工衛星を適当な方法によって加速し（この間の質量変化は無視する），軌道を楕円軌道に移した．地球の中心から近地点（地球から最も近い点）までの距離は R，地球の中心から遠地点（地球から最も遠い点）は $3R$ である．この周回軌道における周期 T_2 を，G，M，R を用いて表せ．

(3)　近地点における人工衛星の速さ v，遠地点における人工衛星の速さ u を，G，M，R を用いて表せ．

【解答】

(1)　運動方程式（中心方向）より，

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}\,, \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{R}}\,.$$

今，等速円運動ゆえ 1 周（円周 $2\pi R$）に要する時間 T_1 は，

$$T_1 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}}\,.$$

(2)　ケプラー第 3 法則より，

$$\frac{{T_2}^2}{(2R)^3} = \frac{{T_1}^2}{R^3}\,, \qquad \therefore T_2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{4\pi R\sqrt{\frac{2R}{GM}}}\,.$$

(3)　面積速度・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}Rv = \dfrac{1}{2}\cdot 3Ru\,, \\ \dfrac{1}{2}mv^2 - G\dfrac{Mm}{R} = \dfrac{1}{2}mu^2 - G\dfrac{Mm}{3R}\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{3GM}{2R}}}\,, \quad u = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{GM}{6R}}}\,.$$

5. 天体の運動・計算ドリル

xy 平面上の原点 O に質量 M の大天体がある．大天体からの万有引力のみを受けて運動する質量 m の小天体の運動について考えよう．大天体の質量 M は，小天体の質量 m に比べて十分大きく，大天体は動かないものとする．小天体は，点 $\mathrm{A}(-r_0, 0)$ から，初速 $(0, v_0)$ で運動を始めた（ただし，$r_0 > 0$，$v_0 > 0$）．万有引力定数を G とする．以下の設問に答えよ．

I　$v_0 = v_1$ のとき，小天体は半径 r_0 の円軌道をとる．また，$v_0 > v_2$ のとき，小天体は無限遠へ飛び去る．v_1，v_2 をそれぞれ G，M，r_0 を用いて表せ．

II　v_0 が $v_0 < v_2$ を満たす場合を考える．このとき，小天体は楕円軌道をとり，小天体が大天体から最も遠ざかった点を点 $\mathrm{B}(\alpha r_0, 0)$（$\alpha > 1$）とする．なお，解答には G，M，r_0，α 以外の文字を用いてはならず，円周率を π とせよ．

(1)　小天体が点 B を通過する瞬間の速さを v とする．v_0，v をそれぞれ求めよ．

(2)　小天体が x 軸から最も遠い点 $\mathrm{D}\left(\dfrac{\alpha-1}{2}r_0, b\right)$，または点 $\mathrm{E}\left(\dfrac{\alpha-1}{2}r_0, -b\right)$ を通過する瞬間の速さを V とする．b，V をそれぞれ求めよ．

(3)　運動の周期 T を，ケプラーの第 3 法則を利用して求めよ．

(4)　運動の周期 T を，面積速度保存則を利用して求めよ．

III　v_0 が $v_0 > v_2$ を満たす場合を考える．このとき，小天体は双曲線軌道をとり，双曲線の漸近線を ℓ とする．無限遠での小天体の速さを v_∞，漸近線 ℓ と原点 O（大天体）の距離 c とする．v_∞，c をそれぞれ求めよ．

I　（おまけ）

(1)　図 1 のように，楕円軌道上の適当な点 P と，楕円の中心 C 対して点 P と点対称な位置にあるような点 Q をとる．小天体が点 P，および点 Q の位置にあるときの小天体の速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v}_\mathrm{P}$，$\vec{v}_\mathrm{Q}$，その大きさをそれぞれ v_P，v_Q とする．v_P と v_Q の積 $v_\mathrm{P}v_\mathrm{Q}$ を求めよ．

(2)　小天体の速度ベクトルの先端が描く軌跡（ホドグラフ）について考える．ホドグラフを，その概形の図形的な特徴を与える量を記し図示せよ．

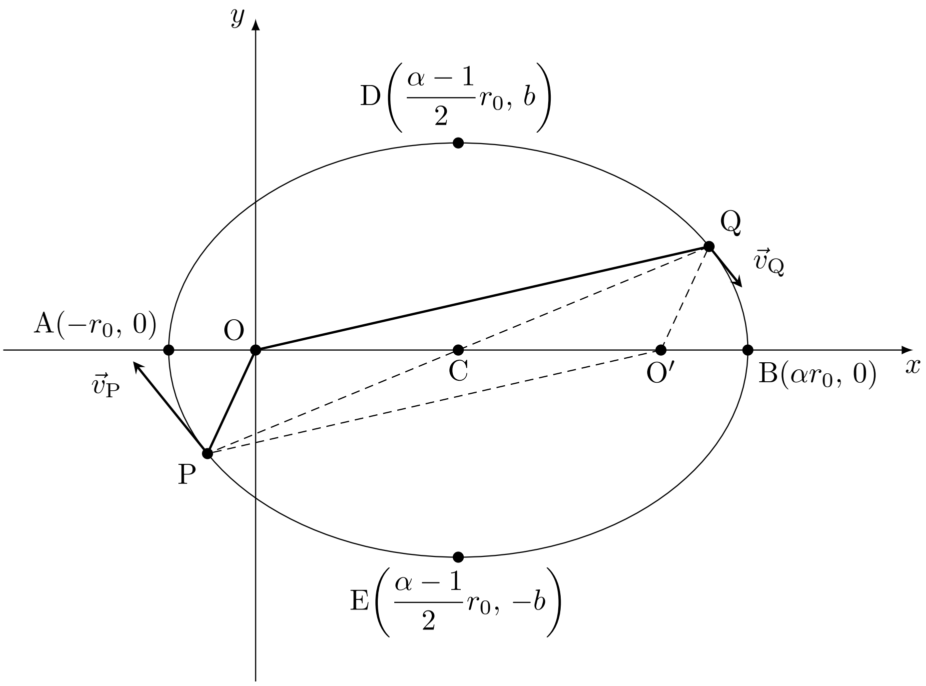

y
D$\left(\dfrac{\alpha-1}{2}r_0,\ b\right)$
Q
$\vec{v}_{\mathrm{Q}}$
A$(-r_0,\ 0)$
O
C
O$'$
B$(\alpha r_0,\ 0)$
x
$\vec{v}_{\mathrm{P}}$
P
E$\left(\dfrac{\alpha-1}{2}r_0,\ -b\right)$

図 1

【メモ】

円軌道→運動方程式，楕円軌道（より一般に，放物線（設問 I），双曲線軌道（設問 III））→面積速度・力学定期エネルギー保存則．

【解答】

I　$v_0 = v_1$ のとき，小天体は円運動を行うため，

$$m\frac{{v_1}^2}{r_0} = G\frac{Mm}{{r_0}^2}\,,\quad \therefore v_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{GM}{r_0}}}\,.$$

$v_0 > v_2$ のとき，小天体は無限遠へ到達することから，

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - G\frac{Mm}{r_0} = K_\infty + 0 = 0\,,\quad \therefore v_2 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}}\,.$$

II (1)　面積速度・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}r_0 v_0 = \dfrac{1}{2}\alpha r_0 v\,, \\ \dfrac{1}{2}m{v_0}^2 - G\dfrac{Mm}{r_0} = \dfrac{1}{2}mv^2 - G\dfrac{Mm}{\alpha r_0}\,, \end{cases}$$

$$\therefore v_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{2GM}{r_0}}}\,,\quad v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\frac{2GM}{r_0}}}\,.$$

(2)　楕円の性質から，

$$2\sqrt{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2{r_0}^2 + b^2} = r_0 + \alpha r_0\,,\quad \therefore b = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\alpha}\,r_0}\,.$$

面積速度・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}r_{\mathrm{D}}V\sin\theta = \dfrac{1}{2}r_0 v_0\,, \\ \left(\dfrac{1}{2}mV^2 - G\dfrac{Mm}{r_{\mathrm{D}}} = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2 - G\dfrac{Mm}{r_0}\right)\,. \end{cases}$$

ここで，$r_{\mathrm{D}} = \sqrt{\left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right)^2{r_0}^2 + b^2}$ であり，$\sin\theta$ は図より $\sin\theta = \dfrac{b}{r_{\mathrm{D}}}$ ゆえ，II(1) の結果を利用し v_0 を消去すれば，

$$V = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{1}{\alpha+1}\frac{2GM}{r_0}}}\,.$$

(3)　円軌道での周期は $T_0 = 2\pi r_0\sqrt{\dfrac{r_0}{GM}}$ なので，ケプラー第 3 法則より，

$$\frac{T^2}{(\alpha+1)^3{r_0}^3/8} = \frac{T_0^2}{{r_0}^3}\,,\quad \therefore T = \underset{\sim\sim\sim}{\pi(\alpha+1)r_0\sqrt{\frac{(\alpha+1)r_0}{2GM}}}\,.$$

(4)　面積速度保存則より,

$$\frac{\pi\dfrac{\alpha+1}{2}b}{T}=\frac{1}{2}r_0v_0\,,\quad \therefore T=\pi(\alpha+1)r_0\sqrt{\frac{(\alpha+1)r_0}{2GM}}\,.$$

III　面積速度・力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}r_0v_0=\dfrac{1}{2}cv_\infty\,,\\ \dfrac{1}{2}m{v_0}^2-G\dfrac{Mm}{r_0}=\dfrac{1}{2}m{v_\infty}^2\,,\end{cases}\qquad \therefore v_\infty=\sqrt{{v_0}^2-\frac{2GM}{r_0}}\,,\quad c=\frac{v_0}{\sqrt{{v_0}^2-\dfrac{2GM}{r_0}}}r_0\,.$$

IV (1)　原点 O から点 P までの距離を r_{P}，点 Q までの距離を r_{Q}，位置ベクトルと速度ベクトルのなす角をそれぞれ θ_{P}，θ_{Q} とする．面積速度・力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}r_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{P}}\sin\theta_{\mathrm{P}}=\dfrac{1}{2}r_{\mathrm{Q}}v_{\mathrm{Q}}\sin\theta_{\mathrm{Q}}\,,\\ \dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{P}}}^2-G\dfrac{Mm}{r_{\mathrm{P}}}=\dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{Q}}}^2-G\dfrac{Mm}{r_{\mathrm{Q}}}\,.\end{cases}$$

ここで，一般に楕円の性質として $\theta_{\mathrm{P}}+\theta_{\mathrm{Q}}=\pi$ が成り立つ[*65]ので，$\sin\theta_{\mathrm{Q}}=\sin(\pi-\theta_{\mathrm{P}})=\sin\theta_{\mathrm{P}}$ が成り立つ．ゆえに，面積速度保存則は,

$$\frac{1}{2}r_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{P}}=\frac{1}{2}r_{\mathrm{Q}}v_{\mathrm{Q}}$$

と書ける．以上 2 式を解いて,

$$v_{\mathrm{P}}=\sqrt{\frac{2GM}{r_{\mathrm{P}}+r_{\mathrm{Q}}}\frac{r_{\mathrm{Q}}}{r_{\mathrm{P}}}}\,,\quad v_{\mathrm{P}}=\sqrt{\frac{2GM}{r_{\mathrm{P}}+r_{\mathrm{Q}}}\frac{r_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{Q}}}}\,.$$

したがって，これらの積を取れば,

$$v_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{Q}}=\frac{2GM}{r_{\mathrm{P}}+r_{\mathrm{Q}}}=\frac{2GM}{(\alpha+1)r_0}\,.$$

(2)　II(5) より，逆向きのベクトルの大きさの積が一定値となることから，方べきの定理の逆よりベクトルの先端の点は円状に並ぶ．したがって，ホドグラフは円となる．また，その半径を R とすると，$R=\dfrac{v_0+v}{2}=\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\dfrac{GM}{2r_0}}$ である．

*65 図を考えれば明らか．

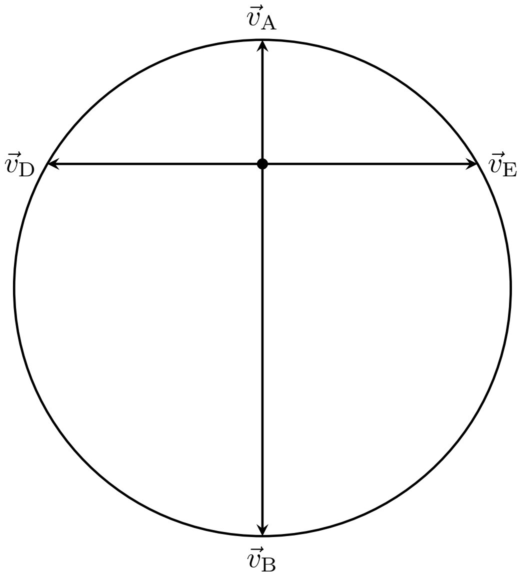


図　ホドグラフ

各点での速度を $v_k\,(k=\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})$ としてある.

6. 面積速度保存則

図のように，なめらかで十分に広い水平板に小穴 O をあけ，質量の無視できる伸び縮みしない糸を通し，その一端に質量 m の小物体 P を取り付け，他端は糸が弛むことのないように外力を加える．$\overline{\mathrm{OP}}=\ell$ となる位置で，OP と直交した方向に速さ v_0 の初速度を与えた．$\overline{\mathrm{OP}}=r$ となる位置における OP と直交した方向の速度成分 v を求めよ．

【メモ】

小物体の運動方向には張力のみが作用し，張力は常に中心 O を向くことから小物体 P の面積速度は保存する．

【解答】

面積速度保存則より[*66]，

$$\frac{1}{2}rv=\frac{1}{2}\ell v_0 \qquad \therefore v=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{\ell}{r}v_0}\,.$$

有線のイヤホンなど，ひも状の物体をぶんぶん回しながら指に巻き付けると短くなるにつれて速く巻き付いてくることを確かめてみよう（周囲に気を配ってからやりましょう）．

[*66] 余力がある人は，外力が F で一定の場合のとき，OP と平行な速度成分を求めてみよ（次の問題問題 7 を参考にせよ）．

7. 面積速度保存則

図 1 のように，なめらかで十分に広い水平板に小穴 O をあけ，質量の無視できる伸び縮みしない糸を通し，その両端に質量 m の小物体 P と質量 M の小さいおもり Q を付ける．おもり Q，小穴 O は同一鉛直線上にあり，Q は鉛直方向にのみ動けるものとする．小物体 P は水平板上にあり，糸は十分に長く，おもり Q が水平板に衝突することはない．小穴 O と糸との間の摩擦，空気抵抗は無視する．重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ．

I　P に水平板上で O から距離 a だけ離れた位置で，糸に直交する方向に大きさ v の初速度を与えたところ，P は半径 a の等速円運動をした．v を，a，M，m，g を用いて表せ．

II　P に水平板上で O から距離 a だけ離れた位置で，糸に直交する方向に大きさ $\sqrt{2}v$ の初速度を与えたところ，Q は上昇を始めた．Q が最も高い位置に達したときの P の速さを u，OP 間の距離を b とする．

(1)　P は中心力のみを受けて運動しているため，P の面積速度は保存する．P の面積速度保存則を表す式を記せ．

(2)　P，Q，糸を合わせた系全体の力学的エネルギー保存則を考えることにより，u，b を，a，M，m，g の中から必要なものを用いて表せ．

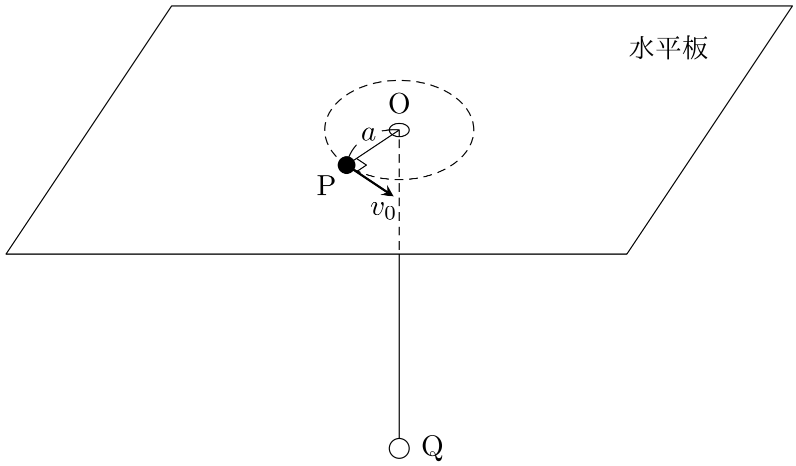


図 1

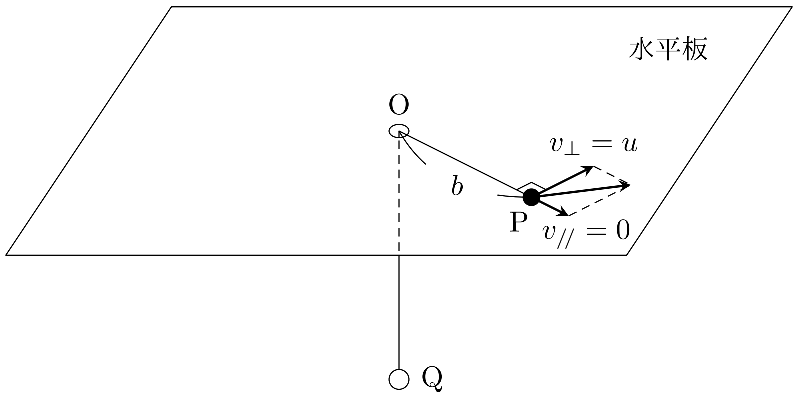


図 2

【メモ】

中心力を受ける物体の運動.「入試物理」において，ケプラー第 2 法則以外での面積速度保存則の利用は，必ず問題文で指示される.

【解答】

I　運動方程式（P は中心方向）より，

$$\begin{cases} \mathrm{P}: m\dfrac{v^2}{a} = T\,, \\ \mathrm{Q}: M\cdot 0 = T - Mg\,, \end{cases} \qquad \therefore\ v = \sqrt{\frac{M}{m}ga}\,,\quad T = Mg\,.$$

II (1)　面積速度保存則より，

$$\frac{1}{2}bu = \frac{1}{2}a\cdot\sqrt{2}\,v\,.$$

(2)　P，Q 合わせた全体の系における力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}M\cdot 0^2 + Mg(b-a) = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{2}\,v\right)^2 + \frac{1}{2}M\cdot 0^2 + Mg\cdot 0$$
$$\therefore\ \frac{1}{2}mu^2 + Mg(b-a) = mv^2\,.$$

面積速度保存則，および力学的エネルギー保存則より[*67]，

$$b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a\,,\quad u = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\frac{2M}{m}ga}\,.$$

[*67] I の結果を利用.

§2.5 動く座標系

第 5 章では，動く座標系内での運動のうち，特に加速運動している座標系内での物体の運動を扱う．加速座標系内部での物体には見かけの力/架空の力（慣性力）が生じる．高校範囲では，並進に対する慣性力と，回転座標系での慣性力のうち遠心力のみを扱う[*68]．

なお，この章での学習は，どの座標系で考えているかという「視点の固定」が重要であり，扱う問題では，視点を固定し慣性力さえ考慮できればさほど難しくないので，意図的に難しめにした．そのため，全ての問題に手を付ける必要はない（問題タイトルの指示にしたがってくれればよい）．

■簡単なまとめ

- 加速座標系での運動方程式（並進）：

$$ma_{\mathrm{rel}} = f - mA\,.$$

  a_{rel} は加速座標系に対する物体の相対加速度，A は座標系の加速度．

- 回転座標系での運動方程式：

$$ma = f - mr\omega^2\,.$$

  a は回転する座標系に対する動径方向の相対加速度，r は回転軸からの距離，ω は座標系の回転角速度．

- 見かけの重力：見かけの重力加速度の方向に見かけの高さを取ることで通常の重力のように扱える．

[*68] 授業では，コリオリ力，オイラー力についても言及している．

1. 相対運動

原点にある物体 A には，初速度 $v_0\,(>0)$，加速度 $a\,(>0)$ を与え，同時に，物体 B には初速 0，加速度 $b\,(>a)$ を与えた．運動を始めた時刻を $t=0$ とする．

(1)　時刻 t における物体 A，B それぞれの位置 x_{A}，x_{B} をそれぞれ求めよ．

(2)　時刻 t における物体 A，B それぞれの速度 v_{A}，v_{B} をそれぞれ求めよ．

(3)　B に対する A の相対位置 x_{AB}，および相対速度 v_{AB} をそれぞれ求めよ．

(4)　$t>0$ において，2 物体が最も遠ざかる時刻 t を求めよ．また，このときの物体間の距離 ℓ を求めよ．

【解答】

(1)　公式より，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2\,, \\ x_{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{2}bt^2\,. \end{cases}$$

(2)

(3)　公式より，

$$\begin{cases} v_{\mathrm{A}} = v_0 + at\,, \\ v_{\mathrm{B}} = bt\,. \end{cases}$$

(4)　定義より，

$$x_{\mathrm{BA}} = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = -v_0 t + \frac{1}{2}(b-a)t^2\,,$$

$$v_{\mathrm{BA}} = v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}} = -v_0 + (b-a)t\,.$$

(5)　最も遠ざかるとき，相対速度は 0 となるので[*69]，

$$v_{\mathrm{BA}} = -v_0 + (b-a)t = 0 \qquad \therefore t = \frac{v_0}{b-a}\,.$$

このとき，B に対する A の相対位置（物体間の距離）は，

$$x_{\mathrm{BA}} = \frac{{v_0}^2}{2(b-a)}\,(=\ell)\,.$$

[*69] 相対位置が極値を取るため，その導関数である相対速度は 0 となる．なお，普通に x_{BA} の最大値最小値を考えてもよい．

2. 慣性力①

図のように，電車内の吊り革（質量 m）が θ だけ傾いて静止している．この吊り革の運動について，電車の外で静止している A さん視点，電車内部で電車に運ばれている B さん視点でそれぞれ考えよう．電車の加速度を a，重力加速度の大きさを g とする．

(1)　A さん視点で考える．A さんから見た場合，吊り革は θ だけ傾いた状態を保ちながら水平右向きに加速度 a で運動している．張力の大きさを T とする．

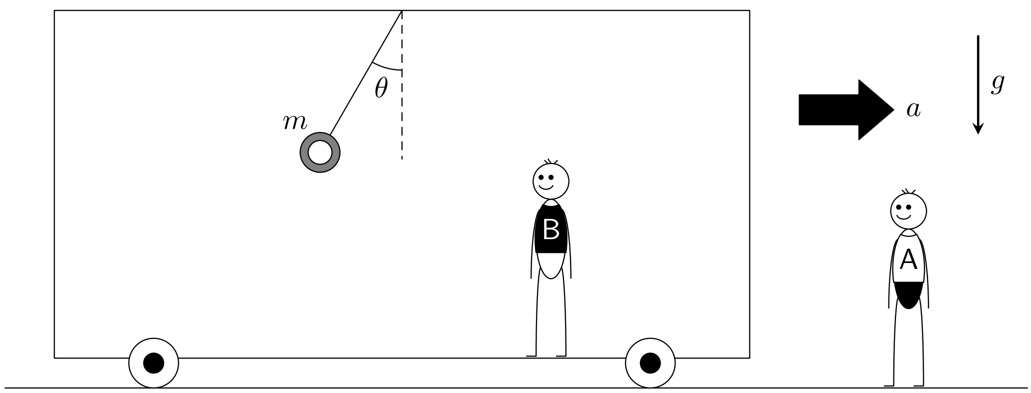
(1)　水平方向の運動方程式，および鉛直方向のつりあいをそれぞれ立式せよ．

(2)　T，$\tan\theta$ を，それぞれ m，a，g のうちから必要なものを用いて表せ．

(2)　B さん視点で考える．B さんから見た場合，吊り革は θ だけ傾いた状態を保ちながら静止している．すなわち，B さんから見れば吊り革にはたらく力はつりあっていなければならない．張力の大きさを T とする．

(1)　水平方向，および鉛直方向のつりあいをそれぞれ立式せよ．

(2)　T，$\tan\theta$ を，それぞれ m，a，g のうちから必要なものを用いて表せ．



【解答】

(1) (1)　運動方程式の各成分は，

$$\begin{cases} ma = T\sin\theta\,, \\ m\cdot 0 = T\cos\theta - mg\,. \end{cases}$$

(2)　2 式を解いて，

$$\tan\theta = \frac{a}{g}\,,\quad T = m\sqrt{a^2+g^2}\,.$$

(2) (1)　B さんから見た場合，吊り革には電車の加速度の方向と逆向きに大きさ ma の慣性力がはたらいているように見える．これを踏まえつりあいの式は，

$$\begin{cases} m\cdot 0 = T\sin\theta - ma\,, \\ m\cdot 0 = T\cos\theta - mg\,. \end{cases}$$

(2)　略.

$\mathit{3}$. 慣性力②

水平面上にある板状の台（質量 M，以後台と呼ぶ）の上の物体（質量 m）の運動を考える．今，2 物体の間にのみ摩擦が生じ，物体間の静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ' とする．台に，時間に比例して大きくなる外力 $F = kt\,(k > 0)$ を加えたところ，時刻 t_1 を超えたところで，物体は台の上をすべり始めた．

(1)　物体間に滑りが生じていないときの物体間の静止摩擦力の大きさを R，2 物体の加速度の大きさを a とする．台固定座標系での物体の運動方程式，および地面固定座標系での台の運動方程式より，a，R を求めよ．

(2)　t_1 を求めよ．

(3)（おまけ）$t > t_1$ において，台固定座標系における物体の加速度 b を求めよ．動摩擦力がはたらく向きを正とする．

【解答】

(1)　台固定座標系での物体の運動方程式，および地面固定座標系での台の運動方程式より，

$$\begin{cases} m \cdot 0 = R - ma\,, \\ Ma = kt - R\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{k}{M+m}t\,,\quad R = \frac{m}{M+m}kt\,.$$

(2)　最大摩擦となる瞬間を考えて，$N = mg$ より，

$$R = \mu N\,, \qquad \therefore t_1 = \frac{\mu(M+m)g}{k}\,.$$

(3)　台固定座標系での物体の運動方程式，および地面固定座標系での台の運動方程式より，

$$\begin{cases} mb = \mu' mg - ma\,, \\ Ma = kt - \mu' mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = -\mu'\frac{m}{M}g + \frac{k}{M}t\,,\quad b = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\mu' g - \frac{k}{M}t\,.$$

4. 慣性力③　三角台と台上物体の運動（II-(3) まで必答）

図のように，斜面の傾斜角 $\theta\,(0 < \theta < \pi/2)$，質量 M の台形状の台を床に置き，台の斜面上に質量 m の小物体を静かに置いた．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸，三角台上の斜面下向きに X 軸，斜面垂直上向きに Y 軸を定める．一切の摩擦は無視し，重力加速度の大きさを g とする．

I　台に水平右向きの一定外力を加え加速度 A_0 の等加速度運動をさせたところ，小物体は斜面上に静止したままだった．

(1)　台と小物体の間の垂直抗力の大きさを N，糸の張力の大きさを T とする．台固定系における小物体の X 方向，および Y 方向の運動方程式を立式し，T，N をそれぞれ求めよ．

(2)　小物体が台に対して静止するための A_0 の範囲を求めよ．

II　再び台と小物体を静止させた状態で糸を切断した．この時刻を $t = 0$ とし，このときの小物体の斜面上の位置座標は $(X, Y) = (L, 0)$ である．また，$\mathrm{OO'}$ 間の距離は h である．

(1)　台と小物体の間にはたらく垂直抗力の大きさを N，台の x 方向の加速度を A，台から見た小物体の相対加速度を a とする．台の x 方向の運動方程式と，台固定系における小物体の X 方向および Y 方向の運動方程式を立式せよ．

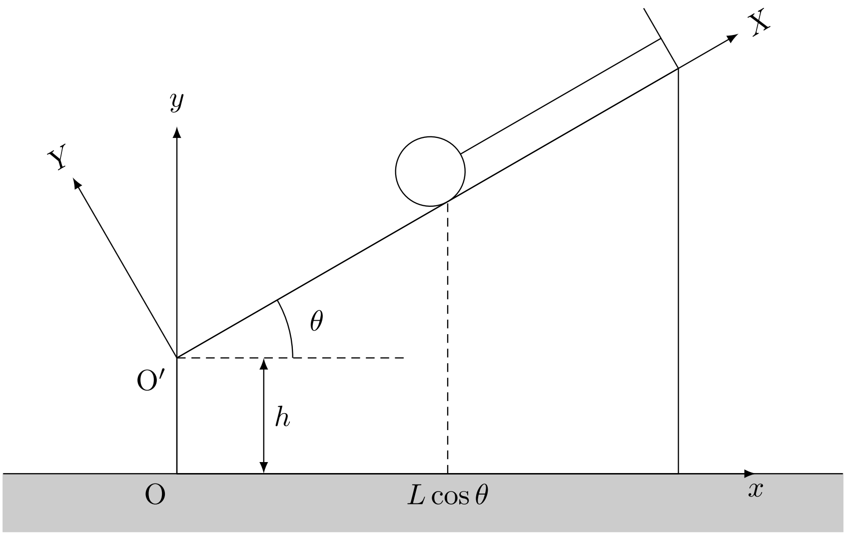
(2)　A，a，N を求めよ．

(3)　小物体の x 方向の加速度を a_x，y 方向の加速度を a_y とする．a_x，a_y を求めよ．

(4)　小物体が台から飛び出す時刻 t_0 を求めよ．

(5)　時刻 t_0 における小物体，および台の速度を求めよ．

(6)　$M = 2m$，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$h = \dfrac{4}{3}L$ とする．小物体が床面に落下する時刻 t_1，および落下した位置 x_1 を求めよ．


X
y
Y
θ
O′
h
O
L cos θ
x

【メモ】

よくある 2 体の運動．束縛条件を利用した解き方が基本で，慣性力はあくまでも問題文で指示されたときに考える．

【解答】

I (1)　台固定系での運動方程式より，

$$\begin{cases} X : m\cdot 0 = T - mg\sin\theta - mA_0\cos\theta\,, \\ Y : m\cdot 0 = N + mA_0\sin\theta - mg\cos\theta\,, \end{cases}$$

$$\therefore T = m(g\sin\theta + A_0\cos\theta)\,,\quad N = m(g\cos\theta - A_0\sin\theta)\,.$$

(2)　$T>0$ かつ $N>0$ を満たせばよい．よって，

$$-g\tan\theta < A_0 < \frac{g}{\tan\theta}\,.$$

II (1)　運動方程式は，

$$\begin{cases} X : ma = -mA_x\cos\theta - mg\sin\theta\,, \\ Y : m\cdot 0 = N + mA_x\sin\theta - mg\cos\theta\,, \\ x : MA_x = N\sin\theta\,. \end{cases}$$

(2)　運動方程式を解いて，

$$A_x = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g\,,\quad a = -\frac{(M+m)\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}g\,.\quad N = \frac{Mm\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g\,.$$

(3)　相対加速度の x 成分，y 成分はそれぞれ，

$$\vec{a}_{\mathrm{rel}} = \begin{pmatrix} a_x - A_x \\ a_y - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix}\,.$$

よって，

$$a_x = a\cos\theta + A_x = -\frac{M\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g\,,\quad a_y = a\sin\theta = -\frac{(M+m)\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta}g\,.$$

(4)　台固定系での小物体の運動について，$X=0$ を満たす時刻を考えて，

$$0 = L + \frac{1}{2}at^2\,,\qquad \therefore t_0 = \sqrt{\frac{2L}{-a}} = \sqrt{\frac{M+m\sin^2\theta}{(M+m)\sin\theta}\frac{2L}{g}}\,.$$

(5)　地面固定系での小物体の速度，および台の速度は，

$$v_x = a_x t_0 = \underset{\sim\sim\sim}{-M\cos\theta\sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}}}\,,$$

$$v_y = a_y t_0 = \underset{\sim\sim\sim}{-\sin\theta\sqrt{\frac{(M+m)\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}2gL}}\,,$$

$$V = At_0 = \underset{\sim\sim\sim}{m\cos\theta\sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}}}\,.$$

(6)　このとき[*70]，

$$t_0 = \sqrt{\frac{3L}{g}}\,,\quad v_y = -\sqrt{\frac{gL}{3}}\,,\quad a_x = -\frac{2\sqrt{3}}{9}g\,,\quad v_x = a_x t_0 = -\frac{2}{3}\sqrt{gL}\,.$$

飛び出した瞬間を $\tau = 0$ として，

$$h - \sqrt{\frac{gL}{3}}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = 0\,, \qquad \therefore \tau = -\sqrt{\frac{L}{3g}}\left(-1+\sqrt{1+6\frac{h}{L}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3L}{g}}\,.$$

よって，

$$t_1 = t_0 + \tau = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{5}{3}\sqrt{\frac{3L}{g}}}\,.$$

このとき[*71]，

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}L - \frac{2}{3}\sqrt{gL}\tau = \frac{\sqrt{3}}{6}L - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3L}{g}} = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{5\sqrt{3}}{18}}L\,.$$

[*70] 先に共通して出る量を計算しておくとよい．

$$M+m = 3m\,,\quad M+m\sin^2\theta = 2m+\frac{1}{4}m = \frac{9}{4}m\,.$$

[*71] 台から離れた時刻を $\tau = 0$ とすると，このとき $x = \dfrac{\sqrt{3}}{6}L$ にあり，以降 x 方向には $v_x = -\dfrac{2}{3}\sqrt{gL}$ で等速運動をする．

5. 慣性力④

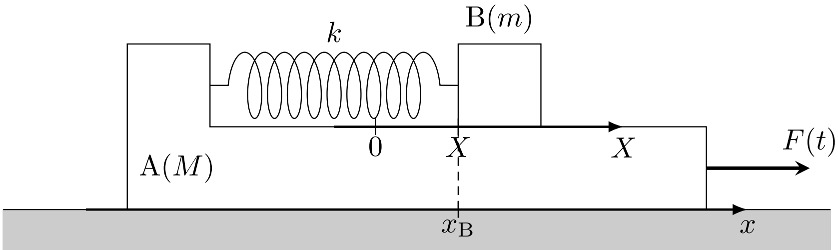
図のように，水平面上に物体 A（質量 M）があり，A の上に物体 B（質量 m）が載せられ，両物体はばね（ばね定数 k，質量無視）で接続されている．静止している物体 A に，時間変化する外力 F を加えることで，物体 A を一定の加速度 A で運動させた．運動を始めた時刻を $t=0$ とする．物体 A 上に，ばねが自然長の位置を原点とし，右向きに X 軸（台固定座標系と呼ぶ）を定める．また，同様にして地面に固定された座標軸として水平右向きに x 軸（地面固定座標系と呼ぶ）を定める．一切の摩擦を無視する．

(1)　B が X 軸上で位置 X にあるとき，台固定座標系での B の加速度を a とする．B の運動方程式を立式せよ．

(2)　B は A に対して単振動を行う．単振動の周期 T と，振動中心 X_0 を求めよ．

(3)　F を時刻 t の関数として求めよ．ただし，$t=0$ における A，および B の位置はともに $x_{\mathrm{A}}=x_{\mathrm{B}}=0$ とする．

(4)　B の速度 v_{B} を，時刻 t の関数として表せ．また，各物体の $v-t$ グラフの概形を図示せよ．



【解答】

(1)　台固定座標系での運動方程式は，

$$\underline{ma = -kX - mA}\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$a = -\frac{k}{m}\left(X + \frac{mA}{k}\right)\,.$$

よって，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\,,\quad X_0 = \underline{-\frac{mA}{k}}\,.$$

(3)　初期条件 $X(0) = 0$，$\dot{X}(0) = 0$ より，

$$X(t) = -\frac{mA}{k} + \frac{mA}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\,.$$

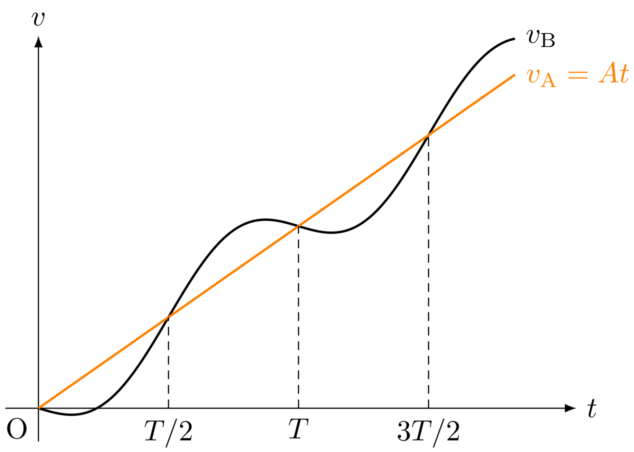
A の運動方程式より，

$$MA = +kX(t) + F(t)\,,\qquad \therefore F(t) = \underline{(M+m)A\left\{1 - \frac{m}{M+m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right\}}\,.$$

(4)　$V = \dot{X}$ は相対速度ゆえ，

$$V = v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}}\,,\qquad \therefore v_{\mathrm{B}} = V + v_{\mathrm{A}} = \underline{A\left\{t - \sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right\}}\,.$$

グラフは以下のような概形になる[*72]．



[*72] 三角関数の位相が π の整数倍となる時刻では At 上を通る．$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍のときは，At 上から $\pm\sqrt{\frac{m}{k}}$ ずれた点を通る．これらを踏まえて図示すればよい．

6. 回転座標系の慣性力①（遠心力）((3) まで頑張りたい）

図のように，水平に置かれた円板板の中心を通るようにまっすぐに掘られた溝に小物体（質量 m）があり，小物体は水平板の中心とばね（ばね定数 k，自然長 ℓ，質量無視）で繋がれている．円板の中心を原点とし，中心から溝に沿って円の周に向かう向きに X 軸（台固定座標系と呼ぶ）を定める．また，円板の中心を原点とし，水平面上に xy 平面（xy 平面を地面固定座標系と呼ぶ）を定める．時刻 $t=0$ に，小物体は $(x(0), y(0)) = (\ell, 0)$ にあり，円板を中心を回転軸に角速度 ω で回転させた．小物体は溝に沿って運動し，一切の摩擦は無視する．

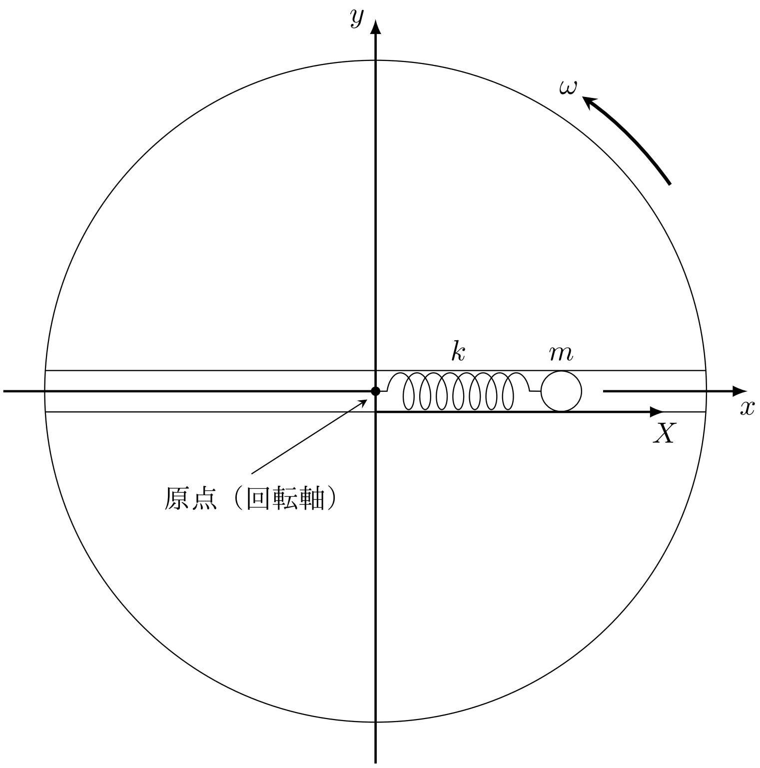
(1)　小物体が X 軸上で位置 X にあるとき，台固定座標系での小物体の加速度を a とする．小物体の運動方程式を立式せよ．

(2)　小物体が X 軸上で単振動を行うために，ω が満たす条件を求めよ．

(3)　ω が上記の条件を満たすとき，単振動の周期 T と，振動中心 X_0 を求めよ．

(4)　地面固定座標系における物体の位置 (x, y) を，時刻 t の関数として表せ．

(5)　円板が 1 周したときに，小物体の軌道が閉じたものとなるために ω が満たすべき条件を求めよ．自然数として n を用いよ．



【解答】

(1)　台固定座標系での運動方程式は，

$$ma = -k(X-\ell) + mX\omega^2 \,.$$

(2)　運動方程式より，

$$a = -\frac{k-m\omega^2}{m}\left(X - \frac{k}{k-m\omega^2}\ell\right) \,.$$

小物体が X 軸上で単振動を行うには，X の比例定数が負であればよく，

$$-\frac{k-m\omega^2}{m} < 0 \,, \qquad \therefore \omega < \sqrt{\frac{k}{m}} \,.$$

(3)　運動方程式より，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k-m\omega^2}} \,, \quad X_0 = \frac{k}{k-m\omega^2}\ell \,.$$

(4)　初期条件 $X(0)=\ell$，$\dot{X}(0)=0$ より，

$$X(t) = \frac{k}{k-m\omega^2}\ell - \frac{m\omega^2}{k-m\omega^2}\ell\cos\left(\sqrt{\frac{k-m\omega^2}{m}}\,t\right) \,.$$

ここで，

$$\begin{cases} x(t) = X(t)\cos(\omega t) \,, \\ y(t) = X(t)\sin(\omega t) \,, \end{cases}$$

より，

$$\begin{cases} x(t) = \left\{\dfrac{k}{k-m\omega^2}\ell - \dfrac{m\omega^2}{k-m\omega^2}\ell\cos\left(\sqrt{\dfrac{k-m\omega^2}{m}}\,t\right)\right\}\cos(\omega t) \,, \\ y(t) = \left\{\dfrac{k}{k-m\omega^2}\ell - \dfrac{m\omega^2}{k-m\omega^2}\ell\cos\left(\sqrt{\dfrac{k-m\omega^2}{m}}\,t\right)\right\}\sin(\omega t) \,, \end{cases}$$

(5)　小物体の単振動の角振動数を Ω とする．このとき，$\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\Omega}n$ を満たせばよく，

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{n^2+1}\frac{k}{m}} \,.$$

$\boldsymbol{7}$. 回転座標系の慣性力②（遠心力）（(3) まで頑張りたい）

図のように，円形のリング（半径 r）に小球（質量 m）を通してある．リングの中心を通る鉛直線と，小球とリングの中心を結んだ線の間の角度を反時計回りを正に $\theta\,(-\pi < \theta < \pi)$ と定める．リングをその中心を通る鉛直線を回転軸として一定角速度 ω で回転させたときの小球の運動について，リングとともに回転する座標系に乗って考える．重力加速度の大きさを g とし，一切の摩擦を無視する．

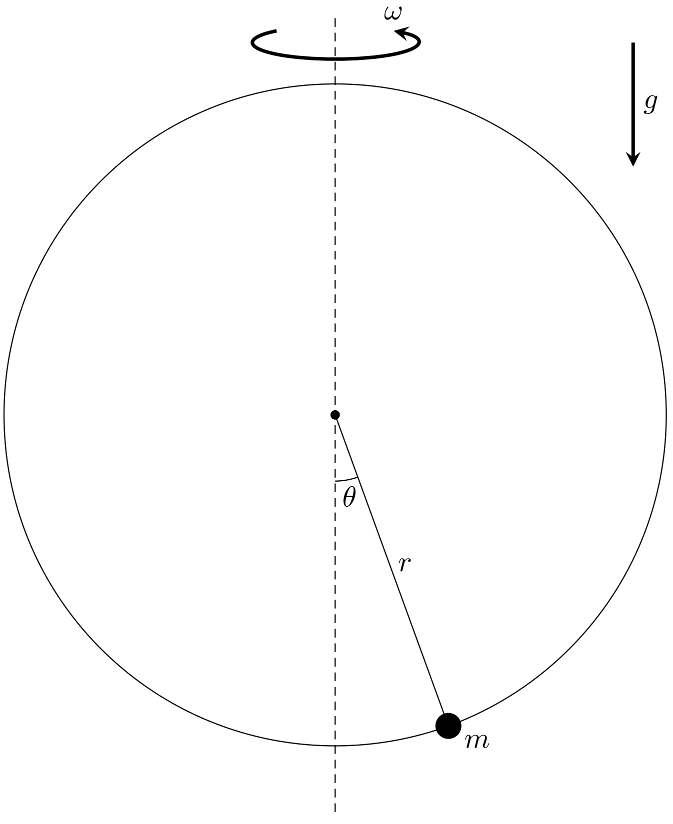
(1)　小球が θ にあるとき，小球にはたらく力の（リングに対する）接線成分 F_θ を求めよ．

(2)　θ が $|\theta| \ll 1$ を満たす場合，小球の運動が単振動と見なせるためには ω は ω_0 より小さい必要がある．ω_0 を求めよ．

(3)　$\omega < \omega_0$ のとき，振動の周期 T を求めよ．

(4)　$\omega > \omega_0$ の場合を考える．$F_\theta = 0$ を満たす角を θ_0 とする．$\cos\theta_0$ を求めよ．

(5)　$\omega > \omega_0$ のとき，$\theta = \theta_0$ にある小球のつりあいが，安定なつりあいか不安定なつりあいかを論ぜよ．


ω
g
θ
r
m

【解答】

(1)　リング固定系では遠心力を考慮する必要があり[*73]，

$$F_\theta = mr\omega^2 \sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta\,.$$

(2)　運動方程式（接線成分）より，

$$m\frac{dv}{dt} = mr\omega^2\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta\,.$$

ここで，$v = r\dfrac{d\theta}{dt}$ であり，微小角では $\sin\theta \fallingdotseq \theta$，$\cos\theta \fallingdotseq 1$ より，

$$mr\frac{d^2\theta}{dt^2} \fallingdotseq mr\omega^2\theta - mg\theta = -mr\left(\frac{g - r\omega^2}{r}\right)\theta\,, \qquad \therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g - r\omega^2}{r}\right)\theta\,.$$

すなわち，$g - r\omega^2$ が正であれば単振動を行う．よって，

$$g - r\omega^2 > 0\,, \qquad \therefore \omega < \sqrt{\frac{g}{r}}\,(= \omega_0)$$

(3)　運動方程式より，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g - r\omega^2}}\,.$$

(4)　設問 I より，

$$F_\theta = \sin\theta(mr\omega^2\cos\theta - mg) = 0\,, \qquad \therefore \theta = 0\,,\ \pi\,,\quad \cos\theta_0 = \frac{g}{r\omega^2}\,.$$

(5)　$\theta = \theta_0 + \delta\,(|\delta| \ll 1)$ において，$\cos\theta_0 = \dfrac{g}{r\omega^2}$，$\sin\theta_0 = \dfrac{\sqrt{(r\omega^2)^2 - g^2}}{r\omega^2}$ であるから[*74][*75]，

$$\begin{aligned}
F_\theta &= \sin(\theta_0 + \delta)\{mr\omega^2\cos(\theta_0 + \delta) - mg\} \\
&= mr\omega^2(\sin\theta_0\cos\delta + \cos\theta_0\sin\delta)\left(\cos\theta_0\cos\delta - \sin\theta_0\sin\delta - \frac{g}{r\omega^2}\right) \\
&\fallingdotseq mr\omega^2\left(\sin\theta_0 + \frac{g}{r\omega^2}\delta\right)\left(\frac{g}{r\omega^2} - \sin\theta_0\delta - \frac{g}{r\omega^2}\right) \\
&= -mr\omega^2\sin^2\theta_0\delta - mg\sin\theta_0\delta^2 \\
&\fallingdotseq -mr\omega^2\left\{1 - \left(\frac{g}{r\omega^2}\right)^2\right\}\delta\,.
\end{aligned}$$

[*73] 「遠心力」は，回転軸の中心から離れる向きに「生じる」ことに注意せよ．

[*74] 加法定理を利用した後，δ について $\sin\delta \fallingdotseq \delta$，$\cos\delta \fallingdotseq 1$ と 1 次まで近似した．

[*75] δ の 2 次の項は落とした．

ここで，$\dfrac{g}{r\omega^2} < 1$ より，F_θ は復元力の形をとる．すなわち，つりあいの位置から角度 δ だけ回転した位置に変位したとき，変位方向とは逆向きに F_θ が作用する．したがって，$\theta = \theta_0$ は安定なつりあいである[*76]．

[*76] 一方，$\theta = 0, \pi$ では，

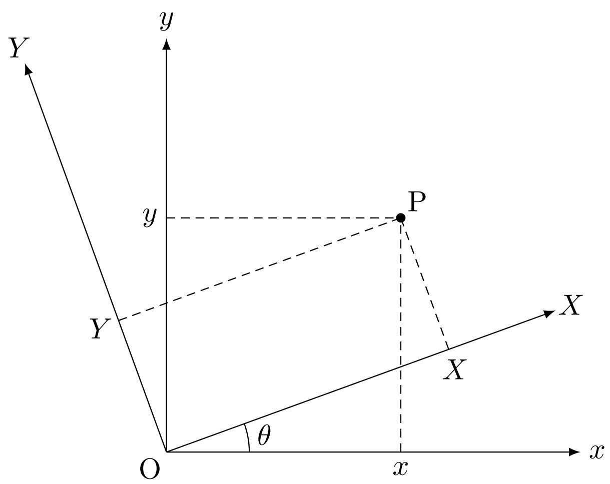
$$F_\theta \simeq mr\omega^2 \left(1 \pm \frac{g}{r\omega^2}\right) \delta > 0$$

となり，F_θ は復元力の形を満たさない．そのため，不安定なつりあいと確認できる．

【参考】遠心力，コリオリ力，オイラー力

ここでは，一般の場合の 2 次元回転座標系における慣性力の導出を行う[*77].

質点 P（質量 m）の静止系での座標を (x, y)，回転座標系での座標を (X, Y) とし，質点にはたらく力の成分は，静止系，および回転座標系において $\vec{F} = (F_x, F_y) = (F_X, F_Y)$ と記す．以下では，回転角 θ，および角速度 $\dot{\theta}$ は，一般に一定とは限らず時間の関数であることに留意せよ．



図より，P の位置 (x, y) を (X, Y) で表現すれば[*78],

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta\,, \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta\,. \end{cases}$$

この式の両辺を，θ が時刻 t の関数であることに留意して時刻 t で微分すれば[*79],

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{X}\cos\theta - X\dot{\theta}\sin\theta - \dot{Y}\sin\theta - Y\dot{\theta}\cos\theta\,, \\ \dot{y} = \dot{X}\sin\theta + X\dot{\theta}\cos\theta + \dot{Y}\cos\theta - Y\dot{\theta}\sin\theta\,. \end{cases}$$

同様にして，

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\ddot{X}\cos\theta - \ddot{Y}\sin\theta) \\ \qquad -2\dot{\theta}(\dot{X}\sin\theta + \dot{Y}\cos\theta) - \dot{\theta}^2(X\cos\theta - Y\sin\theta) - \ddot{\theta}(X\sin\theta + Y\cos\theta)\,, \\ \ddot{y} = (\ddot{X}\sin\theta + \ddot{Y}\cos\theta) \\ \qquad -2\dot{\theta}(\dot{X}\cos\theta - \dot{Y}\sin\theta) - \dot{\theta}^2(X\sin\theta + Y\cos\theta) + \ddot{\theta}(X\cos\theta - Y\sin\theta)\,. \end{cases}$$

[*77] 授業内では，角速度 $\dot{\theta} = \omega$ が一定かつ $Y = 0$ の簡単な場合で計算をした（このとき，オイラー力の項は生じない）.

[*78] 例えば，X から x 軸に垂線を下ろして，原点 O を頂点とした x 軸と X 軸に挟まれる 2 つの相似な三角形に注目して，

$$x = X\cos\theta - Y\tan\theta\cos\theta = X\cos\theta - Y\sin\theta\,.$$

また，上の y が関与する直角三角形と，y 軸と Y 軸に挟まれる，三角形に注目して，

$$y = \frac{Y}{\cos\theta} + x\tan\theta = X\sin\theta + Y\cos\theta\,.$$

[*79] ドット記号は $\dot{O} = \dfrac{dO}{dt}$ を表す.

さて，回転座標系において質点 P にはたらく力の各成分は[*80]，

$$\begin{cases} F_x = F_X \cos\theta - F_Y \sin\theta \,, \\ F_y = F_X \sin\theta + F_Y \cos\theta \,, \end{cases}$$

と表せるので，静止系での質点 P の運動方程式は，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_X \cos\theta - F_Y \sin\theta \,, \\ m\ddot{y} = F_X \sin\theta + F_Y \cos\theta \,. \end{cases}$$

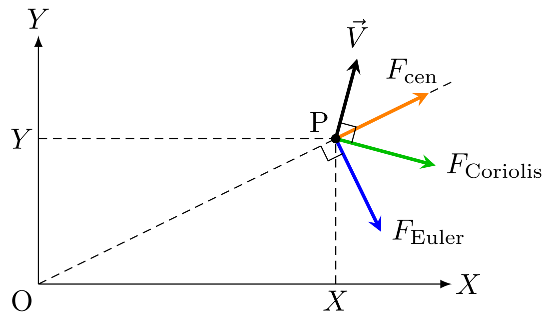
ここに，$\ddot{x}$，$\ddot{y}$ をそれぞれ代入し，$\sin\theta$，$\cos\theta$ をかけるなどをして 2 式の和を取って整理すれば[*81]，

$$\begin{cases} m\ddot{X} = F_X + m\dot{\theta}^2 X + 2m\dot{\theta}\dot{Y} + m\ddot{\theta}Y \,, \\ m\ddot{Y} = F_Y + \underbrace{m\dot{\theta}^2 Y}_{\text{遠心力}} - \underbrace{2m\dot{\theta}\dot{X}}_{\text{コリオリ力}} - \underbrace{m\ddot{\theta}X}_{\text{オイラー力}} \,, \end{cases}$$

を得る．右辺第 2 項から第 4 項はそれぞれ順に，遠心力，コリオリ力，オイラー力と呼ばれる慣性力である．各力の大きさは，$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$[*82]，$V = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}$ として，

$$F_{\text{cen}} = m\dot{\theta}^2 R \,, \quad F_{\text{Coriolis}} = 2m\dot{\theta}V \,, \quad F_{\text{Euler}} = m\ddot{\theta}R$$

となり，それぞれの向きは，式から読み取れば以下の図のようになる．遠心力は回転座標系における位置ベクトルと同じ向きに，コリオリ力は回転座標系における速度ベクトルを時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させた向きに，オイラー力は回転座標系における位置ベクトルを時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させた向きに生じる．



[*80] 図を描けばすぐにわかる（書いてみてわからなければノートを参照）．

[*81] 具体的には，$\ddot{x}$ の式に $\cos\theta$，$\ddot{y}$ の式に $\sin\theta$ をかけて和を取れば $\ddot{X}$ に関する運動方程式が得られる．$\ddot{Y}$ については，かけるのを逆にして差を取ればよい．

[*82] 回転変換においては長さは不変に保たれ，$r = \sqrt{x^2 + y^2} = R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ を満たす．

6. 見かけの重力

糸（長さ ℓ，伸縮，質量ともに無視）の一端を部屋の天井に繋ぎ，他端を物体に繋いだ．重力加速度の大きさを g とする．

I　部屋を鉛直方向に加速度 α で運動させた．はじめ，部屋内部から観測した物体は静止させた状態にしてあるものとする．

(1)　物体にはたらく張力の大きさ S を求めよ．

(2)　物体をつりあっている状態から少しだけ傾けたところ，単振動と見なせる運動を行った．振動の周期 T を求めよ．

II　部屋を水平方向に加速度 β で運動させた．はじめ，部屋内部から観測した物体は静止させた状態にしてあるものとする．

(1)　部屋の内部から観測した物体がつりあうときの鉛直線と糸の角度の正接 $\tan\theta$ と，物体にはたらく張力の大きさ S を求めよ．

(2)　つりあっている物体につながれている糸を切ったとき，部屋内部から観測した物体の軌道を説明せよ．

(3)　物体をつりあっている状態から少しだけ傾けたところ，単振動と見なせる運動を行った．振動の周期 T を求めよ．

【解答】

I (1)　つりあいより，

$$0 = S - mg - m\alpha\,, \qquad \therefore S = \underset{\sim\sim\sim\sim}{m(g+\alpha)}\,.$$

(2)　回転角を反時計回りを正に θ とする（最下点を原点に定める）．運動方程式より[*83]，

$$m\frac{dv}{dt} = -m(g+\alpha)\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \fallingdotseq -\frac{g+\alpha}{\ell}\theta\,, \qquad \therefore T = \underset{\sim\sim\sim\sim}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+\alpha}}}\,.$$

II (1)　つりあいより，

$$\begin{cases} 0 = S\cos\theta - mg\,, \\ 0 = S\sin\theta - m\beta\,, \end{cases} \qquad \therefore \tan\theta = \underset{\sim}{\frac{\beta}{g}}\,, \quad S = \underset{\sim\sim\sim\sim}{m\sqrt{g^2+\beta^2}}\,.$$

(2)　部屋内部に貼られた座標系として，部屋の加速方向に x 軸，鉛直方向上向きに y 軸を定める（原点を物体の始状態に定める）．部屋内部に固定された座標系での物体の運動方程式は[*84]，

$$\begin{cases} ma_x = -m\beta\,, \\ ma_y = -mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a_x = -\beta\,, \quad a_y = -g\,.$$

よって，初期条件を $v_x(0) = v_y(0) = 0$，$x(0) = y(0) = 0$ とするとそれぞれ $x = -\frac{1}{2}\beta t^2$，$y = -\frac{1}{2}gt^2$ となり，適当な定義域 $x_0 \leq x \leq x_1$ の下での軌跡の方程式は，

$$y = \frac{g}{\beta}x\,, \quad (x_0 \leq x \leq x_1)$$

となる．よって，内部から見た軌跡は直線的になることがわかる．

(3)　運動方程式より[*85]，

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta - m\beta\cos\theta = -m\sqrt{g^2+\beta^2}\sin(\theta+\theta_0)$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} \fallingdotseq -\frac{\sqrt{g^2+\beta^2}}{\ell}(\theta+\theta_0)\,.$$

よって，公式より，

$$T = \underset{\sim\sim\sim\sim}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{g^2+\beta^2}}}}\,.$$

---

*83 $v = \ell\frac{d\theta}{dt}$，および三角関数の 1 次近似を用いた．

*84 このとき，運動方程式の左辺にある加速度の成分は，部屋から観測した物体の相対加速度であることに注意せよ．

*85 三角関数の合成を利用．このとき $\tan\theta_0 = \frac{\beta}{g}$ であり，$\theta = -\theta_0$ が振動中心である．

§2.6 剛体のつりあい

第 6 章では，剛体のつりあいを扱う．剛体のつりあいは定石自体はすごく単純で，滑らない条件などを考える点に注意が必要．なお，本来剛体の重心はこの章で扱うのがキレイな流れだが，剛体の重心は第 2 章多体系の力学の重心のところで触れているので，各自そちらを参照すること．

■簡単なまとめ

- 剛体のつりあい：

$$\begin{cases} \text{各方向の力のつりあい（並進しない条件）} \\ \text{ある回転軸まわりの力のモーメントのつりあい（回転しない条件）} \end{cases}$$

- 滑らない条件：

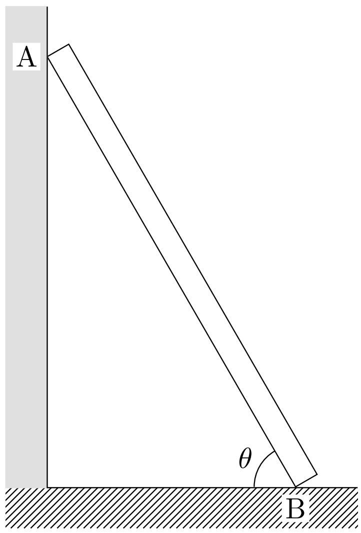
$R < \mu N$（R：静止摩擦力の大きさ，N：垂直抗力の大きさ，μ: 静止摩擦係数）

1. 滑る条件①

図のように，一様で変形の無視できる棒（質量 M，長さ L）を壁に立てかけた．このとき，棒と床とのなす角は θ である．棒と壁との接触点を A，棒と床との接触点を B とする．壁と棒の間には摩擦はなく，床と棒の間の静止摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする．

(1)　棒が A で受ける垂直抗力の大きさを N_A，B で受ける垂直抗力の大きさを N_B，静止摩擦力の大きさを R とする．N_A，N_B，R を求めよ．

(2)　棒と床面の間に滑りが生じないための μ の条件を求めよ．



【解答】

(1)　力のつりあい，および B まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = N_\mathrm{A} - R\,, \\ 0 = N_\mathrm{B} - Mg\,, \\ 0 = -N_\mathrm{A} L\sin\theta + Mg\dfrac{L}{2}\cos\theta\,, \end{cases} \qquad \therefore N_\mathrm{A} = R = \frac{1}{2\tan\theta}Mg\,,\quad N_\mathrm{B} = Mg\,.$$

(2)　滑らない条件を考えて，

$$R < \mu N_\mathrm{B}\,, \qquad \therefore \frac{1}{2\tan\theta} < \mu\,.$$

***2*. 滑る条件②**

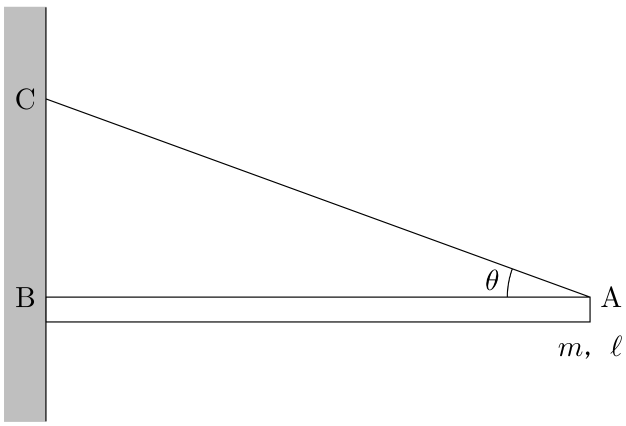
図のように，糸（質量，伸縮ともに無視）の一端を壁に取り付け，他端を一様で変形の無視できる棒（質量 m，長さ ℓ）に取り付けて粗い壁にかけたところ，棒は水平な状態で静止した．棒と糸のなす角を θ とし，棒と糸との接続点を A，棒と壁との接触点を B，糸と壁との接続点を C とする．壁と棒の間の静止摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする．

(1)　棒が壁から受ける垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを R，糸から受ける張力の大きさを T とする．力のつりあい，および適当な点まわりの力のモーメントのつりあいを考えることで，N，R，T を求めよ．

(2)　棒と壁面との間に滑りが生じないための μ の条件を求めよ．

(3)　棒の A 側から距離 x の位置に質量 m_0 のおもり（大きさ無視）を吊るしたところ，棒と壁面の間に滑りが生じた．x を求めよ．

(4)　前問において，任意の位置で滑りが生じないとき，m_0 の取り得る値の範囲を求めよ．ただし，このとき $\mu > \tan\theta$ を満たしているとする．



【解答】

(1)　力のつりあい，A まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = N - T\cos\theta\,, \\ 0 = T\sin\theta + R - mg\,, \\ 0 = \dfrac{L}{2}mg - LR\,, \end{cases} \qquad \therefore R = \frac{1}{2}mg\,,\quad T = \frac{mg}{2\sin\theta}\,,\quad N = \frac{mg}{2\tan\theta}\,.$$

(2)　滑らない条件より，

$$R < \mu N\,, \qquad \therefore \mu > \tan\theta\,.$$

(3)　力のつりあい，A まわりの力のモーメントのつりあい，静止摩擦が最大摩擦と等しいことより，

$$\begin{cases} 0 = N - T\cos\theta\,, \\ 0 = T\sin\theta + \mu N - (m + m_0)g\,, \\ 0 = \dfrac{L}{2}mg + xm_0g - L\mu N\,, \end{cases} \qquad \therefore x = \left\{\frac{\mu\cos\theta}{\sin\theta + \mu\cos\theta}\left(1 + \frac{m}{m_0}\right) - \frac{1}{2}\frac{m}{m_0}\right\}L\,.$$

(4)　$x = \alpha L\,(0 \le \alpha \le 1)$ とする．A まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = N - T\cos\theta\,, \\ 0 = T\sin\theta + R - mg\,, \\ 0 = \dfrac{L}{2}mg + \alpha L m_0 g - LR\,, \end{cases}$$

$$\therefore R = \frac{1}{2}mg + \alpha m_0 g\,,\quad T = \frac{m + 2(1-\alpha)m_0}{2\sin\theta}g\,,\quad N = \frac{m + 2(1-\alpha)m_0}{2\tan\theta}g\,.$$

したがって，$x = L\,(\alpha = 1)$ で静止摩擦力の大きさ R は最大となり，このときに最大摩擦を超えなければ，棒の間の任意の位置 x ですべり出さない[*86]．よって，

$$\frac{1}{2}mg + m_0 g < \frac{\mu}{2\tan\theta}mg\,, \qquad \therefore m_0 < \frac{m}{2}\left(\frac{\mu}{\tan\theta} - 1\right).$$

---

*86 なお，α を残して計算を進めて，

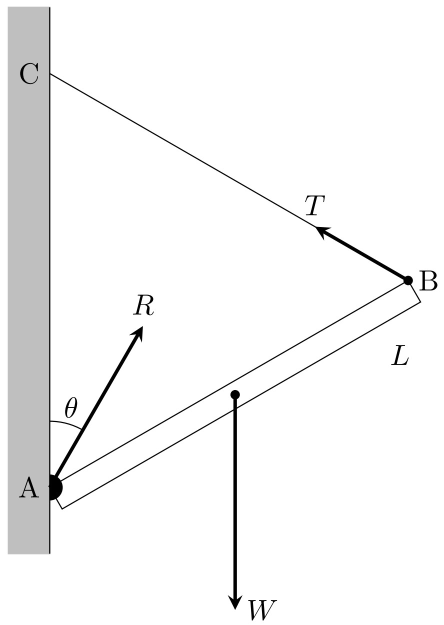
$$R < \mu N\,, \qquad \therefore m_0 < \frac{m}{2}\frac{\mu - \tan\theta}{(\mu + \tan\theta)\alpha - \mu}$$

となり，上記の不等式を $\alpha = 1$ で満たすような m_0 を選べば，$0 \le \alpha \le 1$ の任意の α ですべり出さない，としても良い．

3. 蝶番①

図のように，一端を蝶番に取り付けた一様な棒（重さ W，長さ L）の他端に壁に繋いだ糸（長さ L，質量，伸縮ともに無視）を取り付けた．このとき，蝶番と壁の接続点を A，糸と棒の接続点を B，糸と壁の接続点を C としたとき，$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CA}} = L$ を満たすように蝶番を取り付ける．重力加速度の大きさを g とする．

棒が蝶番から受ける抗力の大きさを R，その抗力と壁面とのなす角を θ，糸から受ける張力の大きさを T とする．R，θ，T を求めよ．



【解答】

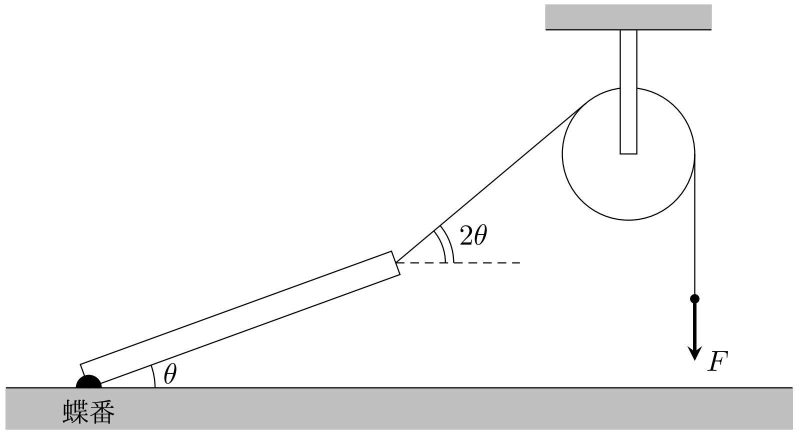
力のつりあい，A まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = R\sin\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}T\,, \\ 0 = \dfrac{1}{2}T + R\cos\theta - W\,, \\ 0 = -\dfrac{L}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}W + L\dfrac{\sqrt{3}}{2}T\,, \end{cases} \qquad \therefore R = \underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}W}\,,\ \ T = \underset{\sim\sim}{\dfrac{1}{2}W}\,,\ \ \theta = \underset{\sim}{\dfrac{\pi}{6}}\,.$$

4. 蝶番②（復習）

図のように，一様な棒（質量 m，長さ L，変形無視）の一端に糸（伸縮，質量ともに無視）と床に取り付けた蝶番を取り付け，糸を天井に固定された滑車にかけ，大きさ F の力を加え静止させた．このとき，棒と床の間のなす角は θ，糸と水平面とのなす角を 2θ，重力加速度の大きさを g とする．

棒が蝶番から受ける抗力の大きさを R，その抗力の水平面からの角度を反時計回りに α，棒が糸から受ける張力の大きさを T とする．R，$\tan\alpha$，T を求めよ．



【解答】

力のつりあい，蝶番まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = R\cos\alpha + T\cos 2\theta\,, \\ 0 = R\sin\alpha + T\sin 2\theta - mg\,, \\ 0 = -\dfrac{L}{2}mg\cos\theta + LT\sin(2\theta - \theta)\,, \end{cases}$$

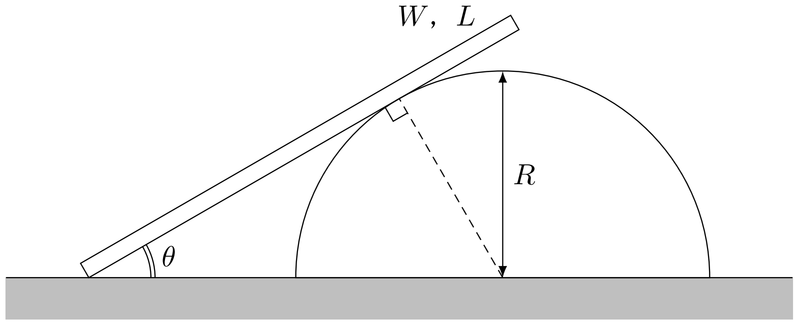
$$\therefore \tan\alpha = \frac{\sin 2\theta - 2\tan\theta}{\cos 2\theta}\,,\quad T = \frac{mg}{2\tan\theta}\,,\quad R = \frac{mg}{2\tan\theta}\sqrt{1 + 4\tan^2\theta(1 - 2\cos^2\theta)}\,.$$

5. 滑らず転がる①

図のように，一様な棒（重さ W，長さ L）を，水平面上に固定された半円筒（半径 R）に水平面とのなす角 θ で立てかける．棒と円筒の間には摩擦はなく，棒と床間の静止摩擦力を μ とする．

(1)　棒が床から受ける垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを F，半円筒から受ける垂直抗力の大きさを N' とする．N，N'，F を求めよ．

(2)　角度 θ の状態で棒がすべり出さないための μ の条件を求めよ．



【解答】

(1)　力のつりあい・力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = N + +N'\cos\theta - W\,, \\ 0 = F - N'\sin\theta\,, \\ 0 = W\cos\theta\left(\dfrac{R}{\tan\theta} - \dfrac{L}{2}\right) + FR\cos\theta - N\cos\theta\frac{R}{\tan\theta}\,, \end{cases}$$

$$\therefore N' = \frac{L}{2R}W\sin\theta,\quad N = \left(1 - \frac{L}{2R}\sin\theta\cos\theta\right)W\,,\quad F = \frac{L}{2R}W\sin^2\theta\,.$$

(2)　すべらない条件は，

$$\frac{L}{2R}W\sin^2\theta < \mu\left(1 - \frac{L}{2R}\sin\theta\cos\theta\right)W\,,\qquad \therefore \mu > \frac{L\sin^2\theta}{2R - L\sin\theta\cos\theta}\,.$$

6. 滑らず転がる①（I は頑張ろう）

角度を変えることができる床上に，高さ a，幅 b の直方体状の物体（重さ W）を置き，その上面の頂点に，常に水平方向となるように大きさ F の力を加えた．このとき，物体は静止している．床面と物体の間の静止摩擦係数を μ とする．

I　床が水平な状態（$\theta = 0$ の場合）を考える．

(1)　物体が床から受ける垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを R，抗力の作用点と頂点 A との距離を x とする．N，R，x を求めよ．

(2)　物体が滑らず回転するための μ の条件を求めよ．

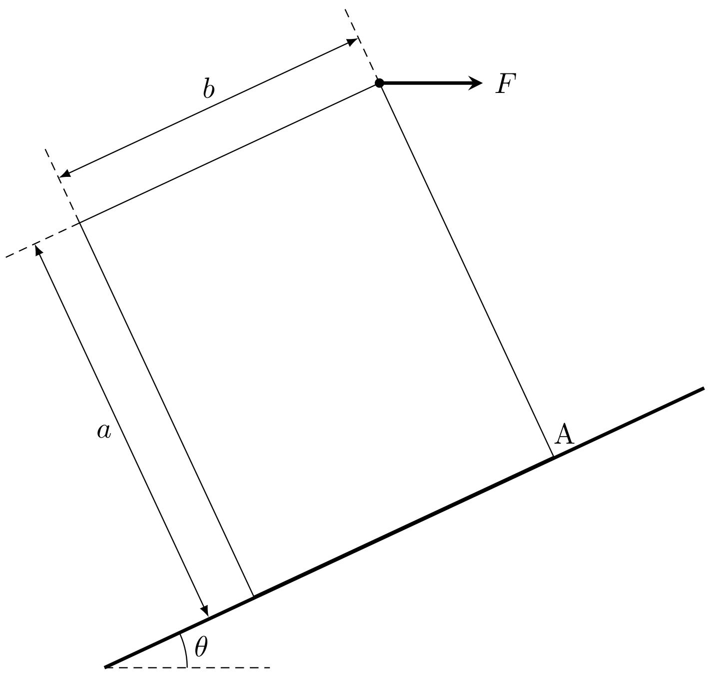
(3)　F を大きくしていき，F_0 を超えたところで，物体は滑らずに回転し始めた．F_0 を求めよ．

II　床を角度 θ だけ傾けた状態を考える（図 2）．

(1)　物体が床から受ける垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを R，抗力の作用点と頂点 A との距離を x とする．N，R，x を求めよ．

(2)　F を大きくしていき，F_0 を超えたところで，物体は滑らずに回転し始めた．F_0 を求めよ．

(3)　$\theta = 30°$，$a = b$ のとき，このような運動が実現されるための μ の条件を求めよ．



【解答】

I (1)　力のつりあい，A まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = F - R\,, \\ 0 = N - W\,, \\ 0 = \dfrac{b}{2}W - xN - aF\,, \end{cases} \qquad \therefore R = F\,,\quad N = W\,,\quad x = \frac{b}{2} - \frac{F}{W}a\,.$$

(2)　滑らない条件は，

$$R < \mu N\,, \qquad \therefore F < \mu W\,.$$

ここで，抗力の存在条件は $x \geq 0$ より，

$$x = \frac{b}{2} - \frac{F}{W}a \geq 0\,, \qquad \therefore F \leq \frac{b}{2a}W\,.$$

抗力の存在範囲が滑らない条件を常に満たせばすべり出すことはないので，

$$\frac{b}{2a}W < \mu W\,, \qquad \therefore \mu > \frac{b}{2a}\,.$$

(3)　転がり始めるとき $x = 0$ ゆえ，

$$F_0 = \frac{b}{2a}W\,.$$

なお，前問において $F = F_0$ のとき $R = F < \mu N$ を満たすと考えるのがシンプルだが，今回はすごく丁寧に（回りくどく）やった．以降の同様の問題の解答はこのように計算する．

II (1)　力のつりあい，A まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = F\cos\theta - W\sin\theta \pm R\,, \\ 0 = N - F\sin\theta - W\cos\theta\,, \\ 0 = \dfrac{b}{2}W\cos\theta + \dfrac{a}{2}W\sin\theta - xN - aF\cos\theta\,, \end{cases}$$

$$\therefore R = |F\cos\theta - W\sin\theta|\,,\quad N = F\sin\theta + W\cos\theta\,,$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{(a\sin\theta + b\cos\theta)W - 2aF\cos\theta}{W\cos\theta + F\sin\theta}\,.$$

(2)　$x = 0$ の下で力のつりあい，A まわりの力のモーメントのつりあいを解いて，

$$F_0 = \left(\tan\theta + \frac{b}{a}\right)\frac{W}{2}\,.$$

(3)　このとき，F_0 は，

$$F_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)\frac{W}{2}$$

であり，静止摩擦力，垂直抗力それぞれの大きさは，

$$R = \frac{\sqrt{3}-1}{4}W\,,\quad N = \frac{7\sqrt{3}+3}{12}W$$

である．よって，滑らない条件を考えて，

$$\frac{\sqrt{3}-1}{4}W < \mu\frac{7\sqrt{3}+3}{12}W \qquad \therefore \mu > \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{7+\sqrt{3}}\ \left(= \frac{12-5\sqrt{3}}{23}\right).$$

7. 滑らず回転②（やらなくてよい）

図のように，質量 M の水平な板の上に，高さ a，幅 b，質量 m の物体を置く．板には，ばね定数 k のばね（質量無視）の一端が取り付けられており，ばねの他端は固定された壁に取り付けられている．水平右向きに x 軸を定め，ばねが自然長な状態での板の位置を原点に定める．

原点にある板と物体に，向きと大きさの等しい初速度を与える実験を行う．与える初速は，x 正方向とし，その大きさを徐々に大きくしていく．はじめ，2 物体がは一体となって単振動をしていたが，速さ v_0 の初速を与えたときに物体は板上で転倒した．板と物体の間の摩擦のみを考えるものとし，その静止摩擦係数を μ とする．重力加速度の大きさを g とする．

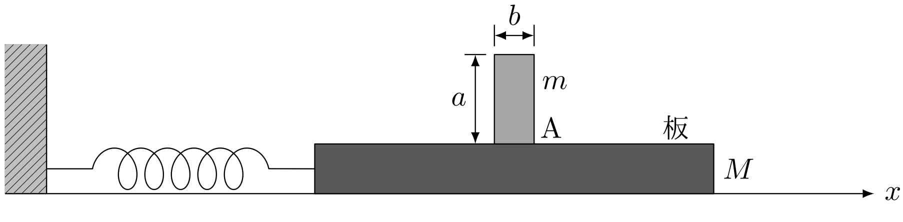
(1) 板が位置 x にあるときの板の加速度を a とする．このとき，物体が板から受ける垂直抗力の大きさ N，および静止摩擦力の大きさ R を求めよ．

(2) 物体と板の接地面において，x 正側の角（カド）を点 A とする．板が位置 x にあるとき，物体にはたらく抗力の作用点の点 A からの距離 c を求めよ．

(3) 物体が転倒する瞬間の板の位置 x を求めよ．

(4) v_0 を，a，b を含む式で表せ．

(5) このような運動が実現するための μ の条件を，a，b を用いて表せ．



【解答】

(1)　運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = R\,, \\ m\cdot 0 = N - mg\,, \\ Ma = -kx - R\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{-k}{M+m}x\,,\quad N = mg\,,\quad R = -\frac{m}{M+m}kx\,,$$

(2)　台固定系では，物体は板に対して静止している．台固定系での力のモーメントのつりあいより，

$$0 = \frac{b}{2}mg - cN - \frac{a}{2}\frac{m}{M+m}kx\,, \qquad \therefore c = \frac{b}{2} - \frac{kx}{2(M+m)g}a\,.$$

(3)　x が最大の値を取ったとき物体は転倒する．よって，単振動の振幅を計算して[*87]，

$$x = v_0\sqrt{\frac{M+m}{k}}\,.$$

(4)　$x = v_0\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$ で $c = 0$ より，

$$\frac{b}{2} - \frac{k}{2(M+m)g}av_0\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 0\,, \qquad \therefore v_0 = \frac{bg}{a}\sqrt{\frac{M+m}{k}}\,.$$

(5)　$R = -\dfrac{m}{M+m}kx$ より，$x = v_0\sqrt{\dfrac{M+m}{k}} = \dfrac{b}{a}\dfrac{(M+m)g}{k}$ で $|R|$ は最大の値を取る．このとき，滑り出さないかつ回転することから[*88]，

$$\left|-\frac{m}{M+m}k\frac{b}{a}\frac{(M+m)g}{k}\right| < \mu mg\,, \qquad \therefore \mu > \frac{b}{a}\,.$$

[*87] 単に公式として（振幅）$= \dfrac{v_0}{\omega}$ としても良いし，力学的エネルギー保存則を用いて計算しても良い．

[*88] 滑り出さない条件は $|R| < \mu N$，回転する条件は設問 IV．

8. 質量中心（重心）[*89]

以下の物体の重心の位置 (x, y) を求めよ．図の色が塗られている部分には一様な質量が分布している．

(1)　半径 a の円板からその中心と接するように半径 $b\,(<a)$ の円を切り取った物体（図 1）．

(2)　長さ ℓ の棒を，$s : 1-s$ に内分して直角に折り曲げた物体（図 2）．

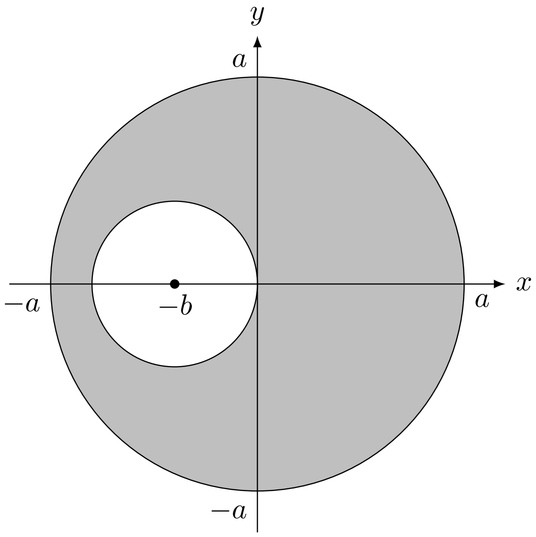


図 1

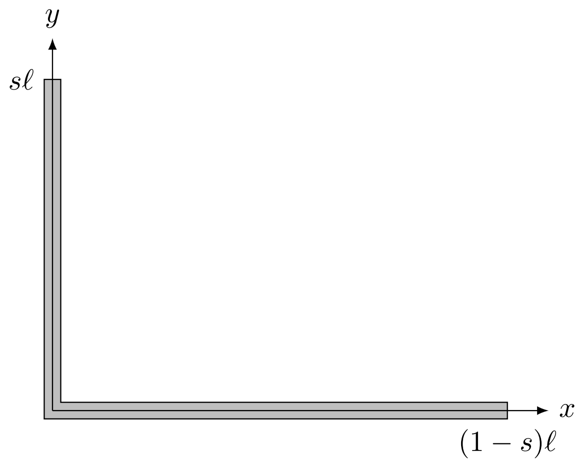


図 2

【解答】

(1)　y 成分は対称性から 0 であることは明らか．色付きの部分の質量は，面密度を ρ とすると $\pi(a^2-b^2)\rho$ である．よって，重心の定義より，

$$0 = \frac{\pi(a^2-b^2)\rho x + \pi b^2\rho(-b)}{\pi(a^2-b^2)\rho + \pi b^2\rho}, \qquad \therefore x = \frac{b^3}{a^2-b^2}.$$

(2)　線密度を ρ とする．重心の定義より，

$$(x, y) = \left(\frac{s\ell\rho\cdot 0 + (1-s)\ell\rho/2}{s\ell\rho + (1-s)\ell\rho}, \frac{s\ell\rho/2 + (1-s)\ell\rho\cdot 0}{s\ell\rho + (1-s)\ell\rho}\right) = \left(\frac{(1-s)}{2}\ell, \frac{s}{2}\ell\right).$$

*89 厳密には，質量中心と重心は等しいものをささない．