

8

原子分野

第8部原子分野では、1900年から1940年代の量子力学（前期量子論）や相対論に関するいくつかの題材を、テーマごとに扱う。すなわち、体系的な学習ではない。第1章では、電子に関する2つの実験、トムソンの実験とミリカンの実験を扱う。この2つの実験により、直接の測定が困難であった電子の質量を見積もることができた。第2章では、光の粒子性に関する内容として、光電効果とコンプトン散乱を扱う。授業では扱っていない光の圧力についてもここで触れる。第3章では、物質の波動性に関する内容として、電子波を扱い、電子波の干渉と電子波の屈折を扱う。電子波の干渉は粒子性から説明することはできないが、屈折に関しては、粒子性・波動性ともに説明される。第4章では、原子の構造について、水素原子についてボーアの2つの仮説を扱う。また、X線の発生についてもここで扱う。第5章では、原子核の結合エネルギー・質量欠損、核反応、核崩壊、半減期の計算を扱う。質量欠損、核崩壊、半減期では新しい知識を覚える必要があり、核反応は複数物体系の力学の定石通りである。

総じて、新しく覚えることが多く分野間のつながりが薄いため、入試直前期にサラッと目を通したい分野である。

§8.1 電子に関する 2 つの実験

トムソンの実験では、電場・磁場中の荷電粒子の運動から比電荷 $\frac{e}{m}$ を測定する。トムソンの実験だけでは電子の質量、電荷それぞれは決まらない。電子の電荷 e （電荷の最小単位）はミリカンの実験によって推定され、トムソンの実験、ミリカンの実験それぞれの結果を合わせることで、到底直接測ることのできないような電子の質量を間接的に決定することができたわけである。

■簡単なまとめ

- トムソンの実験：比電荷 $\frac{e}{m}$ の決定
→ 内容としては、ただの電場・磁場中の荷電粒子の力学。なお、磁場を含めないと（本当の意味で）比電荷は決定されない。
- ミリカンの実験：電荷の最小単位 e （電気素量）の決定
→ 検出される電荷がある数（電気素量）の整数倍となっていることから、電気素量を見抜く。

1. トムソンの実験

図のような装置で、電子の質量と電荷の比である比電荷 $\frac{e}{m}$ を測定する。図の右側にはスクリーン S を配置し、スクリーンに沿って x 軸, y 軸を定める。スクリーン前方には y 軸負方向に電場 (大きさ E) と磁場 (磁束密度の大きさ B) をかけた長さ L_1 の領域 (領域 L と呼ぶ) があり、この領域に速さ v で電子 (質量 m , 電荷 $-e (< 0)$) を打ち込む。領域 L とスクリーンの間の距離を L_2 とする。領域 L に、電場、および磁場がないとき、電子はスクリーン S 上の原点 O に達するものとする。

I 領域 L に電場だけをかけた状態を考える。電子は領域 L を通過する間、電場によって y 軸方向に軌道を曲げられ、領域 L を通過した後、通過直後の進行方向に沿って直進する。

- (1) 領域 L を通過中の電子の y 方向の加速度成分を求めよ。
- (2) 領域 L を出る瞬間の電子の速度の y 成分を v_y とする。 $\frac{v_y}{v} = \tan \theta$ としたとき、 $\tan \theta$ を求めよ。
- (3) 領域 L を出た瞬間の電子の y 座標 y_1 を求めよ。
- (4) スクリーン上で検出された電子の y 座標 y_2 を求めよ。

II 領域 L に磁場だけをかけた状態を考える。電子は領域 L を通過する間、磁場によって x 軸方向に軌道を曲げられ、領域 L を通過した後、通過直後の進行方向に沿って直進する。

- (1) 領域 L を通過中の電子は円運動の一部の運動を行う。円運動の半径 r を求めよ。
- (2) 領域 L を出る瞬間の電子の速度の x 成分を求めよ。
- (3) 領域 L を出た瞬間の電子の x 座標 x_1 が以下の値となることを示せ。

$$x_1 = r - \sqrt{r^2 - L_1^2}$$

- (4) スクリーン上で検出された電子の x 座標 x_2 が以下の値を取ることを示せ。

$$x_2 = x_1 + \frac{L_1}{\sqrt{r^2 - L_1^2}} L_2$$

- (5) 磁場の値を調整することで、 $\frac{L_1}{r} \ll 1$ となる。 x_2 を近似することで、以下のようになることを示せ。

$$x_2 \doteq \frac{eBL_1^2}{2mv} \left(1 + \frac{2L_2}{L_1} \right)$$

以上の結果を合わせることで、事前に決めた L_1 , L_2 , E , B と測定された y_2 , x_2 より比電荷 $\frac{e}{m}$ を求めることができる。

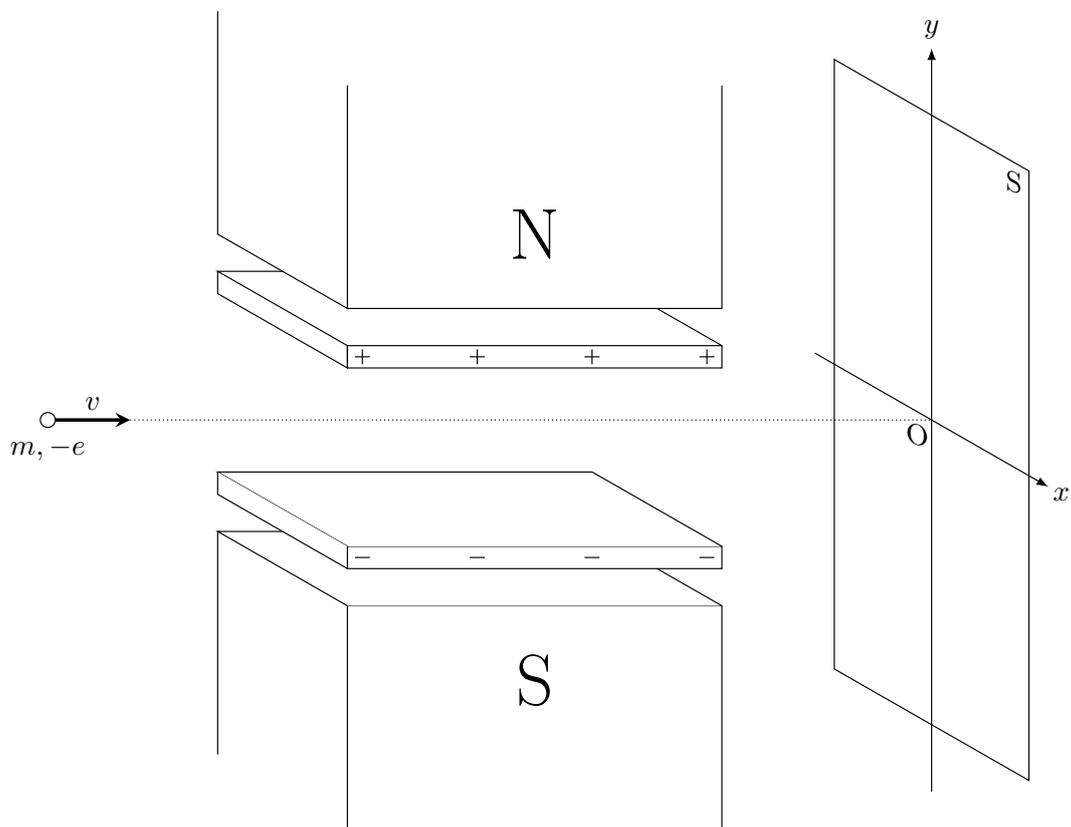


図1

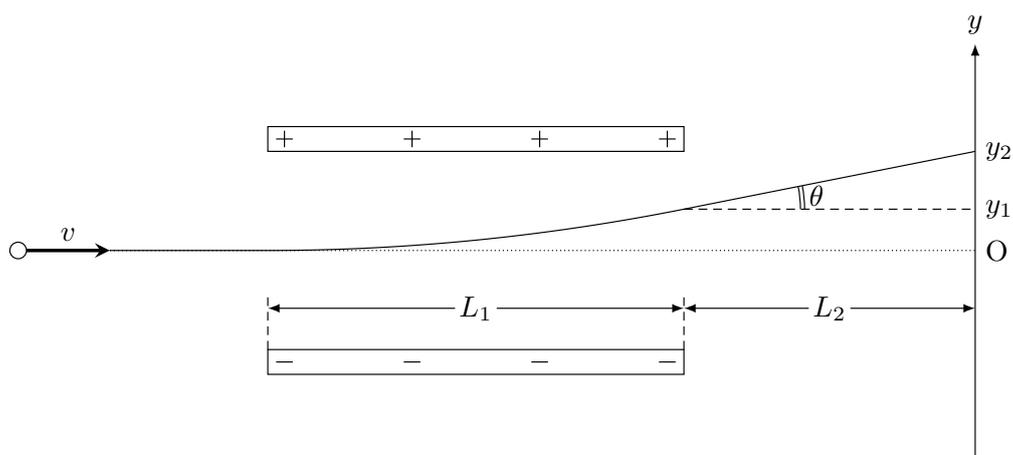


図2

【解答】

I (1) 運動方程式より,

$$ma_y = eE, \quad \therefore a_y = \frac{eE}{m}.$$

(2) 等加速度運動ゆえ, 荷電粒子の速度の y 成分は,

$$v_y = \frac{eE}{m}t.$$

極板に平行な速度成分は v で一定なゆえ, 領域 L を通過する時間は $\frac{L_1}{v}$ である. よって,

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v} = \frac{eEL_1}{mv^2}.$$

(3) 前問同様の計算をして,

$$y_1 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 = \frac{1}{2} \frac{eEL_1^2}{mv^2}.$$

(4) 領域 L とスクリーン S の間は等速直線運動ゆえ,

$$y_2 = y_1 + L_2 \tan \theta = \frac{1}{2} \frac{eEL_1^2}{mv^2} \left(1 + \frac{2L_2}{L_1} \right).$$

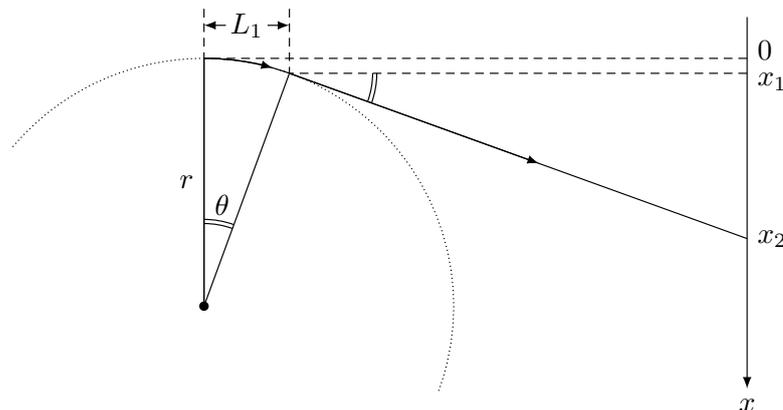
II (1) 運動方程式 (中心成分) より,

$$m \frac{v^2}{r} = evB, \quad \therefore r = \frac{mv}{eB}.$$

(2) 荷電粒子の軌跡は以下ようになっており, 図のように角度 θ を定めたとき, 領域 L を出る瞬間の荷電粒子の速度の x 成分は $v \sin \theta$, スクリーン S に向かう速度成分は $v \cos \theta$ である.

 x_1 は図より,

$$x_1 = r - r \cos \theta = r - \sqrt{r^2 - L_1^2}.$$



(3) I(4) 同様に,

$$x_2 = x_1 + L_2 \tan \theta = x_1 + \frac{L_1}{\sqrt{r^2 - L_1^2}} L_2.$$

(4) 前問の結果に近似を施して,

$$\begin{aligned} x_2 &= r \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L_1}{r}\right)^2} \right\} + \frac{L_1/r}{\sqrt{1 - (L_1/r)^2}} L_2 \\ &\doteq r \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L_1}{r}\right)^2 \right) \right\} + \frac{L_1}{r} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{L_1}{r}\right)^2 \right\} L_2 \\ &\doteq \frac{r}{2} \left(\frac{L_1}{r}\right)^2 + \frac{L_1}{r} L_2 \\ &= \frac{eBL_1^2}{2mv} \left(1 + \frac{2L_2}{L_1} \right). \end{aligned}$$

以上の結果から,

$$\frac{e}{m} = \frac{2Ex_2^2}{B^2 L_1 (L_1 + 2L_2) y_2}$$

と比電荷を測定できる。なお、電子の速度は測定困難のため、電場だけ・磁場だけでは比電荷を測定することはできない。

2. ミリカンの実験

ミリカンは弟子のフレッチャーと図に示すような装置を用いて、電荷の基本単位を測定する次のような実験を行った。油を噴霧器から霧のように吹き出し空気中に油滴を作ると、油滴は表面張力のために球状になる。このような球状の油滴が落下し、装置下部の2枚の水平な極板（間隔 d ）に挟まれた領域に入った後、X線を照射され、正または負に帯電する。2枚の極板には電位差 V が加えられ、極板間には電場が生じている。そして、帯電した油滴の運動から電気量を測定する仕組みとなっている。重力加速度の大きさを g とする。

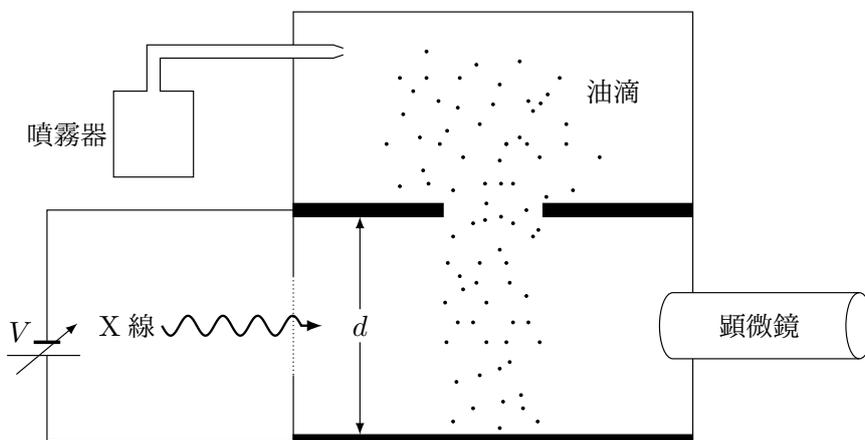
I まず、 $V = 0$ とし、落下する油滴を観測した。油滴の半径を a 、密度を ρ とする。油滴は、速度の大きさに比例した大きさ $6\pi\eta av$ の抵抗力が速度と逆向きに受け、この力によって油滴の速度はすくさま一定値を取る。ここで、 η は粘性係数と呼ばれる流体の流れにくさを表す定数である。油滴が等速で運動するようになった後の油滴の速さ v を求めよ。

II 続いて、電位差 V を与え、注目していた油滴が静止するよう電位差を調節する。注目する油滴の電荷を q とする。

- (1) 油滴が停止したときの電位差を V とする。電荷 q を、 a 、 d 、 g 、 ρ 、 V を用いて表せ。
- (2) 以上のようにして測定した電荷 q は、

$$-3.3 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad -8.1 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad -11.2 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad -6.4 \times 10^{-19} \text{ C}$$

であった。もし仮に電荷に基本単位 (e とする) が存在する場合、測定された電荷 $|q|$ は、基本単位 e の整数倍となる。以上の数値を用い、 e を有効数字2桁で推定せよ。



【解答】

I 油滴の質量は $m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$ ゆえ、運動方程式より、

$$m \cdot 0 = mg - 6\pi\eta av, \quad \therefore v = \frac{2}{9} \frac{\rho a^2}{\eta}.$$

II (1) 運動方程式より、

$$m \cdot 0 = mg - q \frac{V}{d}, \quad \therefore q = \frac{4\pi a^3 d \rho}{3V}.$$

(2) 測定値の差を取ると、 $-3.1 \times 10^{-19} \text{ C}$, $-1.7 \times 10^{-19} \text{ C}$, $-3.1 \times 10^{-19} \text{ C}$ となり、

$$e = \underline{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}}$$

と推定される。

§8.2 光の粒子性

第2章では、光の粒子性に関するテーマとして、主に光電効果とコンプトン散乱を扱う。コンプトン散乱は光子と電子の弾性衝突によって説明される。

■簡単なまとめ

光の振動数を ν 、真空中の光速を c 、プランク定数を h とする。このとき、光の波長 λ は $c = \nu\lambda$ の関係を満たす。

- 光子のエネルギー：

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

- 光子の運動量の大きさ：

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

1. 光の圧力

波長 λ の可視光の光を等方的に放射する点光源から距離 L 離れた位置に面積 $A (\ll L^2)$ の黒い板がある。点光源の消費電力を E とし、点光源の消費電力の全ては光に変換されるものとする。また、黒い板は光を完全に吸収するものとする。光速を c 、プランク定数を h とする。

- (1) 単位時間あたりに板が吸収する光子の数 N を求めよ。
- (2) 黒い板が単位時間あたりに板が吸収するエネルギー J を求めよ。
- (3) 単位時間に光子が板に及ぼす力積の大きさ I を求めよ。
- (4) 黒い板が光から受ける圧力 P を求めよ。

【解答】

- (1) 光源から単位時間あたりに放出されるエネルギーが E であるから、光源から距離 L 離れた球面上の単位面積部分を通過するエネルギー流量は $\frac{E}{4\pi L^2}$ である。よって、面積 A の黒い板が吸収するエネルギーは $\frac{EA}{4\pi L^2}$ であり、光子 1 個当たりのエネルギーが $\frac{hc}{\lambda}$ であるから、

$$N \frac{hc}{\lambda} = \frac{EA}{4\pi L^2} \quad \therefore N = \frac{AE\lambda}{4\pi L^2 hc}.$$

- (2) (1) より、

$$J = \frac{EA}{4\pi L^2}.$$

- (3) 運動量収支より、

$$I = Np = \frac{AE\lambda}{4\pi L^2 c}.$$

- (4) 単位時間当たりの力積から力の時間平均 \bar{f} は I と等しく、

$$P = \frac{\bar{f}}{A} = \frac{E}{4\pi L^2 c}.$$

2. 光電効果

図 1 はアインシュタインの光量子仮説を検証するための実験装置の模式図である。破線で囲まれた部分は真空に保たれていて、内部には同じ金属でできた平板上の電極 a と b が平行に置かれている。電極は十分に広く、その表面は清浄であるとする。電極には電源、すべり抵抗器、電圧計、電流計からなる回路が設置されている。高原は単色光を安定した強度で発生することができる。いま、電極 a の電位が 0 の状態で、その表面に単色光を照射したところ、電子が放出されて電流が流れた。

以下の問では電気素量を e 、プランク定数を h 、電極表面の仕事関数を W とする。電源と電流計の内部抵抗、銅線の抵抗、および電圧計を流れる電流は考慮する必要はない。電極に照射する光は十分に弱く、電子が電極間に滞留することはないとする。地磁気の影響は無視してよい。

- (1) 電極 a に照射した単色光の振動数を ν とする。表面から放出される電子の運動エネルギーの最大値 T_m を表す式を記せ。

次に、電極 a にわずかに正の電位を与えたところ、電流は減少した。そこで、電位を少しずつ増加させてその都度電流を測定した結果、ある電位に達したところで電流が全く流れなくなった。その時の電極 a - b 間の電位差を阻止電圧という。以上の実験を、さまざまな振動数 ν を持つ単色光について行った。その結果得られた振動数 ν と阻止電圧 V_s の関係を図 2 に示す。

- (1) 問 1 のエネルギー T_m と阻止電圧 V_s の関係を表す式を記せ。
- (2) 図 2 と問 3 の結果を用いてプランク定数 h の値を有効数字 2 桁で求めよ。単位は $\text{J}\cdot\text{s}$ とする。電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ を用いてよい。
- (3) 図 2 は、振動数が $4.7 \times 10^{14} \text{ Hz}$ 以下の光を電極 a に照射しても電子は放出されないことを示している。電子が放出されない理由を簡潔に述べよ。
- (4) 縦軸に測定される光電流 I 、横軸に a に対する b の電位 V を取ったグラフの概形を図示せよ。また、以下の条件の下でグラフの概形がどのように変化するか述べよ。
 - (i) 光の振動数を保ちながら強度だけを大きくする。
 - (ii) 光の強度を保ちながら振動数だけを大きくする。

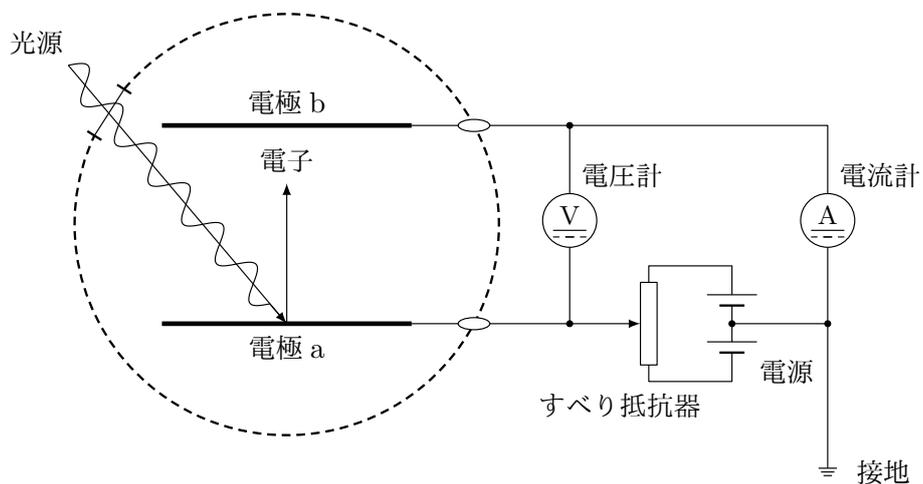


図1

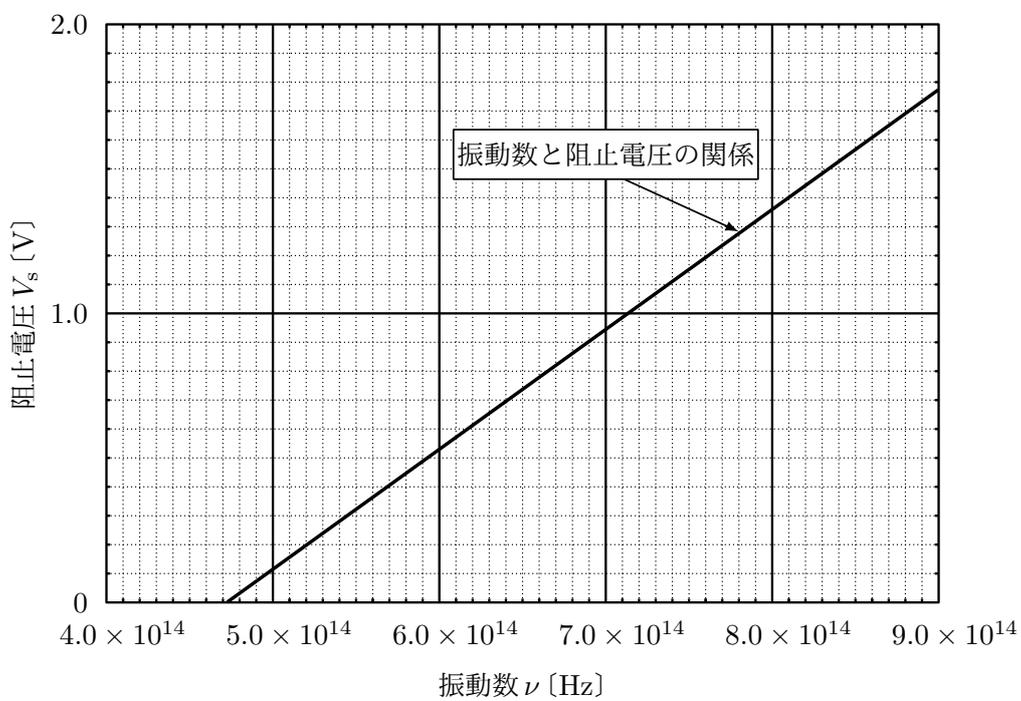


図2

【メモ】

2017年筑波大学より，一部設問を削除・追加を行った。

【解答】

- (1) エネルギー保存則より，

$$T_m = h\nu - W.$$

- (2) 力学的エネルギー保存則より，

$$0 + (-e) \cdot 0 = T_m + (-e)V_s, \quad \therefore T_m = eV_s.$$

- (3) 問1，問2より，

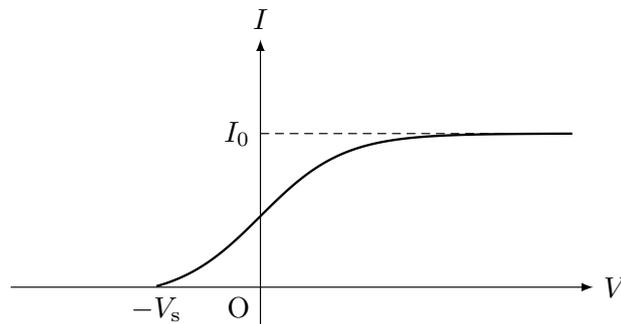
$$V_s = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}.$$

グラフより，傾きを読んで*1，

$$h = \frac{0.90 - 0.20 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}}{(6.9 - 5.2) \times 10^{14} \text{ s}^{-1}} \cdot 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} = 6.588... \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \doteq \underline{\underline{6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}}.$$

- (4) 光子の持つエネルギーが仕事関数より小さいため。

- (5) aに対するbの電位を小さくしていくと，ある電位差のとき光電子のうち最大の運動エネルギー T_m を持つ電子でも極板bへ到達しなくなる．このときの電位差を阻止電圧と呼んでいる．一方，aに対するbの電位を大きくしていくと，光電子のうち運動エネルギーが0のものでも極板bへ達するようになる．以上より，グラフは以下ようになる．



- (i) 光子のエネルギーは同じままフォトンが増えるので V_s は一定のまま， I_0 が大きくなる．
(ii) 強度が保たれていることから光電子の数は変化しないので I_0 は一定のまま，光子のエネルギーが大きくなるため V_s が左へずれる．

*1 グラフを延長し縦軸の切片を読むことで W が求まる．

3. コンプトン散乱

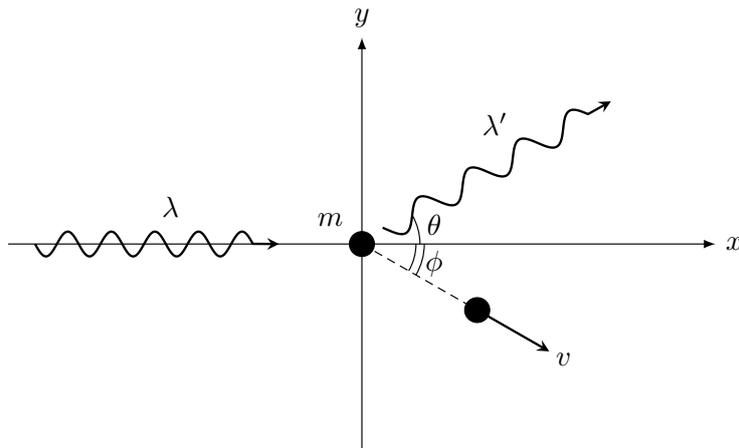
物質に X 線をあてると、散乱されて出てくる X 線の中には入射 X 線の波長と比べて長い波長の成分をもつものが観測される。この現象をコンプトン効果という。これは X 線（光）を波としてではなく、粒子（光子）と考え、この粒子と電子の弾性衝突によるものとして説明できる。

図のように $x - y$ 平面の原点に静止している質量 m の電子に波長 λ の X 線があたった。入射 X 線の方を x 軸、これに垂直な方向を y 軸とすると、入射 X 線は x 軸に対して角度 θ の方向へ散乱された。このとき、散乱 X 線の波長は λ' であった。同時に、電子は一定の速さ v で、 x 軸に対して角度 ϕ の方向にはね飛ばされた。

- (1) 電子と光子からなる系の x 方向、および y 方向の運動量保存則をそれぞれ立式せよ。
- (2) 電子と光子からなる系のエネルギー保存則を立式せよ。
- (3) 波長の変化量を $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ とする。 $\Delta\lambda \ll \lambda$ のとき、次の近似式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} \doteq 2$$

- (4) 運動量保存則、エネルギー保存則から角度 ϕ を消去し、上記の近似式を用いることで $\Delta\lambda$ を求めよ。



【メモ】

2001年山口大学より，問題のリード文を引用（一部変更）.

【解答】

(1) 運動量保存則は，

$$\begin{cases} x : \underbrace{mv \cos \phi + \frac{h}{\lambda'} \cos \theta = \frac{h}{\lambda}}, \\ y : \underbrace{m(-v \sin \phi) + \frac{h}{\lambda'} \sin \theta = 0}. \end{cases}$$

(2) エネルギー保存則は，

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{hc}{\lambda'}} = \frac{hc}{\lambda}.$$

(3) 示す式の左辺より，

$$\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} = \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) + \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^{-1} \doteq 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + 1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2.$$

(4) 運動量保存則より，

$$(mv)^2 = h^2 \left(\frac{1}{\lambda'^2} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'} \cos \theta \right).$$

ここでエネルギー保存則より $mv^2 = 2hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right)$ ゆえ，

$$hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{1}{\lambda'^2} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'} \cos \theta \right)$$

$$hc\Delta\lambda = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{2}{\cos \theta} \right)$$

$$\therefore \Delta\lambda \doteq \underbrace{\frac{h}{mc}} (1 - \cos \theta).$$

§8.3 物質の波動性

第3章では、物質の波動性に関するテーマとしてブラッグの干渉条件を扱う。問題にも入れたが、屈折は粒子・波どちらでも説明されるが、回折・干渉は粒子としては説明されない。

■簡単なまとめ

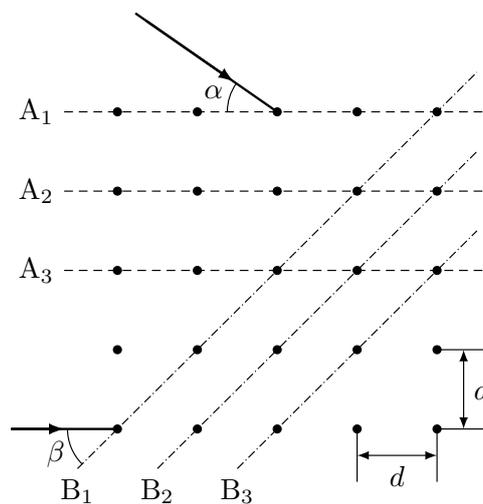
質量 m ，速さ v で運動する粒子のド・ブローイ波長

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

1. ブラッグ反射

結晶に X 線（電磁波）を入射すると、結晶中の原子によって散乱（解説）された X 線が干渉することによって干渉縞が生じる*2。強めあいの方向は、各格子面で反射される X 線が互いに同位相であるような方向となる。X 線の波長を λ 、結晶の格子間隔を d とし、自然数として n を用いよ。

- (1) 図の結晶面 A_1, A_2, \dots による回折現象を考える。X 線を格子面となす角 α で入射させたとき、強めあいが観測されるために α の満たす条件式を求めよ。
- (2) 図の結晶面 B_1, B_2, \dots による回折現象を考える。X 線を格子面となす角 β で入射させたとき、強めあいが観測されるために α の満たす条件式を求めよ。



【解答】

- (1) 隣り合う格子面で反射される X 線の経路差は $2d \sin \alpha$ であるから、強めあう条件は、

$$\underline{2d \sin \alpha = n\lambda.}$$

- (2) 格子間隔を $d \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}d$ として、

$$\underline{\sqrt{2} d \sin \beta = n\lambda.}$$

*2 X 線の代わりに電子波としても同様の現象が生じる。
2024.11.09 版

2. 電子波の屈折

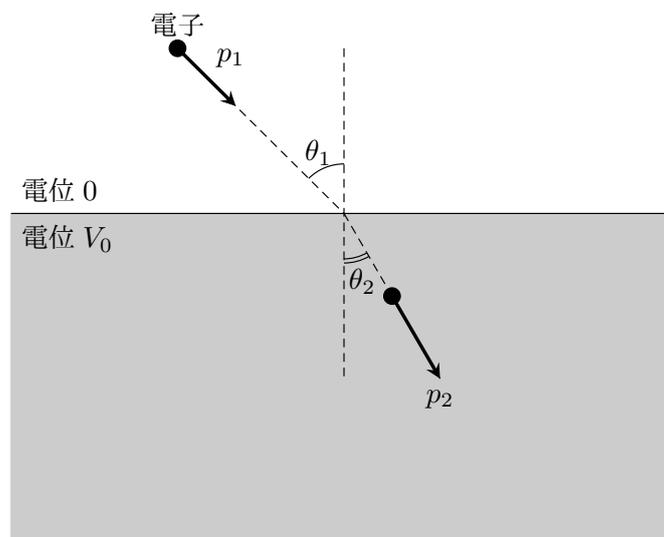
結晶に電子波を入射したときの屈折現象を，粒子と波それぞれで扱い，考察を行う．はじめ，静止した電子（質量 m ，電荷 $-e$ ）を電圧 V で加速させ，結晶面に入射角 θ_1 で入射させた．すると，入射後の電子は結晶面の法線とのなす角 θ_2 の方向へ屈折された．なお，この間電子の持つ運動エネルギーと位置エネルギーの和は保存するものとする．真空の電位を 0 ，結晶の電位を V_0 ，プランク定数を h とする．

I 始めに，電子を粒子として考える．

- (1) 入射電子の運動量の大きさ p_1 を， e ， m ， V を用いて表せ．
- (2) 屈折された電子の運動量の大きさ p_2 を， e ， m ， V ， V_0 を用いて表せ．
- (3) 結晶面と平行な方向には力積を受けないことから，結晶の屈折率 n を， V ， V_0 を用いて表せ．

II 続いて，電子を波として考える．

- (1) 真空中での電子波の波長 λ_1 を， e ， m ， h ， V を用いて表せ．
- (2) 屈折の法則から，結晶の屈折率 n を， V ， V_0 を用いて表せ．



【メモ】

以下のように、屈折は粒子・波いずれの場合も同じ結論を得るが、干渉に関しては波として扱わないと説明ができない。

【解答】

I (1) 力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{p_1^2}{2m} = eV, \quad \therefore p_1 = \sqrt{2meV}.$$

(2) 力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{p_2^2}{2m} + (-e)V_0 = \frac{p_1^2}{2m} = eV, \quad \therefore p_2 = \sqrt{2me(V + V_0)}.$$

(3) 結晶面と平行な方向の運動量の成分が一定なことより、

$$p_2 \sin \theta_2 = p_1 \sin \theta_1, \quad \therefore n = \frac{p_2}{p_1} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}}.$$

II (1) 物質波の波長は公式より、

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}.$$

(2) 屈折の法則より、

$$n \sin \theta_2 = 1 \cdot \sin \theta_1, \quad \therefore n = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{p_2}{p_1} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}}.$$

§8.4 原子の構造

第 4 章では、水素原子のボーアモデル（量子条件）、水素原子のスペクトル（振動数条件）、X 線の発生を扱う。X 線の発生は、固有 X 線と連続 X 線の発生の仕組みの違いを押さえる。

■簡単なまとめ

プランク定数を h 、 n 、 m を自然数とする。

- ボーアの仮説①：量子条件

以下の量子条件を満たすとき、原子は安定に存在する。

$$2\pi r = n \frac{h}{mv}$$

r は軌道半径、 m は電子の質量、 v は速さ、 n は自然数である。

- ボーアの仮説②：振動数条件

電子が異なる軌道間を遷移するとき、そのエネルギー準位の差に等しいエネルギーを持つ光子 1 個をやり取りする。

$$E_n - E_m = h\nu$$

E_n はエネルギー準位。

- X 線の発生：

→連続 X 線は、電子が陽極に衝突する際に、電子の運動エネルギーの一部が光子のエネルギーとなることで生じる。そのため、放出される光子のエネルギーは、入射電子の運動エネルギーを超えない。

→特性 X 線は、物質中に入射した高速の電子が、原子の内側の軌道の電子を弾き飛ばし、そのときに空いた軌道へ外側の軌道の電子が遷移する際にエネルギー準位の差に等しいエネルギーを持った光子が放出されることで生じる。

1. 水素原子のボーアモデル

水素原子を、静止した陽子（電荷 $+e$ ）を中心として電子（質量 m ，電荷 $-e$ ）が円運動しているというモデルで考える。クーロンの比例定数を k ，プランク定数を h とする。

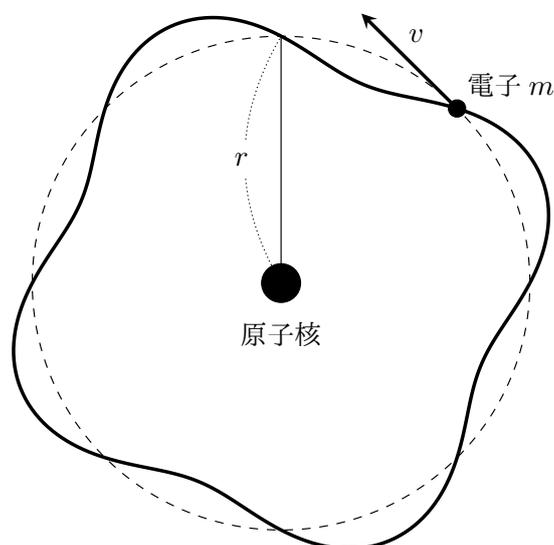
- (1) 電子の軌道半径を r ，速さを v とする。電子の運動方程式の中心方向成分を立式せよ。
- (2) 水素原子のエネルギー E は電子の運動エネルギーとクーロン力の位置エネルギーの和で与えられる。 E を、 k ， e ， r を用いて表せ。ただし、クーロン力の位置エネルギーの基準は無限遠にとる。

荷電粒子が加速運動をするとき、電磁波の形でエネルギーを放出することが知られている。このモデルでは、電子が中心方向に加速度を持っていることから、エネルギーを電磁波の形で失っていき、円運動の半径は小さくなっていくことになる。これでは、水素原子が安定に存在していることを説明できない。そこで、ボーアは電子が水素原子核を中心とする半径 r の円軌道を一定速さ v で運動しているとき、

$$mv \times 2\pi r = nh$$

が満たされると、原子は定常状態となり、電磁波を放出しないと仮定した。これを、ボーアの量子条件と呼び、自然数 n を量子数と呼ぶ。この式は、電子の持つ波動性を考えることで、図のように電子波が半径 r の円周上で n 個の波を持つ定常波を作る条件であると解釈できる（図は $n = 4$ の場合）。

- (1) n で指定される状態の軌道半径 r_n は、 $r_n = an^2$ と書ける。 a を e ， h ， k ， m を用いて表せ。
- (2) n で指定される状態の電子のエネルギー E_n は、 $E_n = -\frac{b}{n^2}$ と書ける。 b を a ， e ， k を用いて表せ。



【解答】

- (1) 運動方程式（中心成分）は、

$$m \frac{v^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}.$$

- (2) 運動方程式から
- v^2
- を代入して、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + k \frac{e \cdot (-e)}{r} = -\frac{ke^2}{2r}.$$

- (3) 量子条件より、

$$v = \frac{nh}{2\pi mr_n}.$$

これを運動方程式の中心方向成分に代入して、

$$r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 km} n^2, \quad \therefore a = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 km}.$$

- (4)
- r_n
- の結果を用いて*3、

$$E_n = -\frac{ke^2}{2r} = -\frac{ke^2}{2a} \frac{1}{n^2}, \quad \therefore b = -\frac{ke^2}{2a}.$$

*3 ここに定数の値を代入すると、

$$b \doteq 13.6 \text{ eV}$$

となる。これは水素原子のイオン化エネルギーに対応する。

2. 水素原子のスペクトル

水素原子のエネルギー準位 E_n は、量子数を n , $I = 13.6 \text{ eV}$ として次のように表せる.

$$E_n = -\frac{I}{n^2}.$$

ボーアは、電子が異なる軌道の間を遷移する際、エネルギー準位の差に等しいエネルギーを持つ1個の光子がやりとりされると仮定した. 真空中の光速を c とする.

- (1) 振動数条件から、水素原子の出す光の波長 λ は、 $n, n' (n' < n)$ を自然数として、

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

を満たす. リュドベリ定数 R を、 I, h, c を用いて表せ.

- (2) $n = 3$ の状態から $n = 2$ の状態へ遷移する際に放出される光の波長 λ を、 R を用いて表せ.
 (3) $n = 3$ の状態から $n = 1$ の状態へ遷移する際に放出される光の波長 Λ は、 λ の何倍か*4.

【解答】

- (1) 振動数条件より、

$$\begin{aligned} \frac{hc}{\lambda} &= E_n - E_{n'} \\ \frac{1}{\lambda} &= \frac{I}{hc} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad \therefore R = \frac{I}{hc}. \end{aligned}$$

- (2) 上記の結果を用いて、

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{36} R, \quad \therefore \lambda = \frac{36}{5R}.$$

- (3) 同様に計算して、

$$\frac{1}{\Lambda} = R \left(1 - \frac{1}{9} \right) = \frac{8}{9} R, \quad \therefore \frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{5}{32}.$$

*4 Λ は λ の大文字.

3. X 線の発生

図 1 に示すように、X 線発生管内で陰極から飛び出した熱電子（質量 m 、電荷 $-e$ 、初速無視）を、加速電圧 V で加速して陽極に衝突させると、図 2 のスペクトルを持つ X 線が発生した。この X 線は、 λ_{\min} を最短波長として長波長側に分布する連続 X 線と、 λ_1 および λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) の特性 X 線（固有 X 線）からなる。プランク定数を h 、真空中の光速を c とする。X 線発生管内は真空とする。

- (1) 陽極に衝突する直前の電子の速さ v を、 e 、 m 、 V を用いて表せ。
- (2) 最短波長 λ_{\min} を、 h 、 c 、 e 、 V を用いて表せ。
- (3) 加速電圧 V をさらに大きくするとき、最短波長はどうなるか。また、特性 X 線の波長はどうなるか。

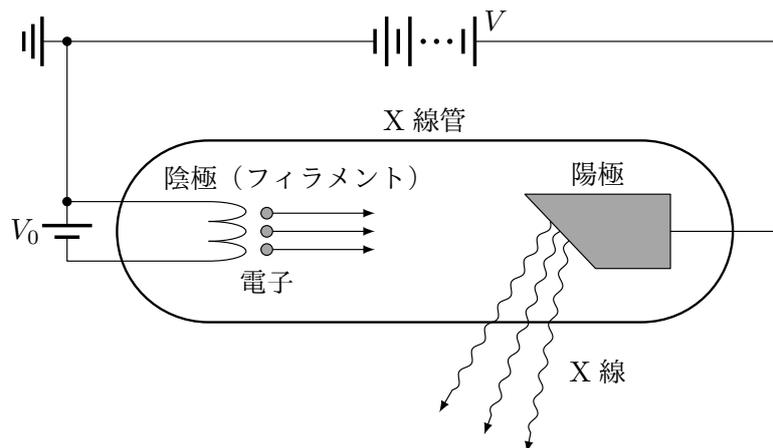


図 1

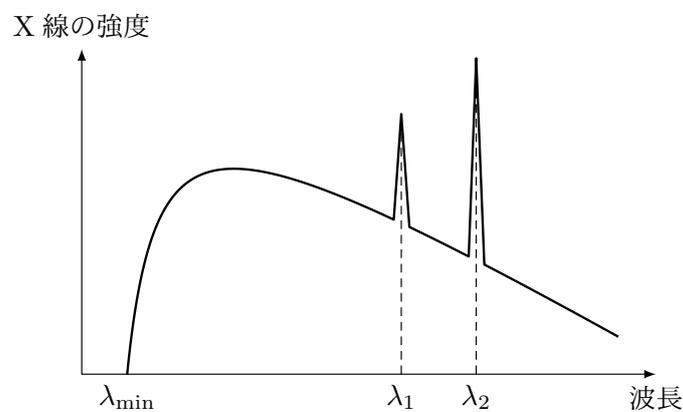


図 2

【メモ】

- ・連続 X 線は、電子が陽極に衝突する際に、電子の運動エネルギーの一部が光子のエネルギーとなることで生じる。そのため、放出される光子のエネルギーは、入射電子の運動エネルギーを超えない。
- ・特性 X 線は、物質中に入射した高速の電子が、原子の内側の軌道の電子を弾き飛ばし、そのときに空いた軌道へ外側の軌道の電子が遷移する際にエネルギー準位の差に等しいエネルギーを持った光子が放出されることで生じる。

【解答】

- (1) 力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-e)V = 0 + 0, \quad \therefore v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

- (2) 放出される光子のエネルギーは、入射電子の運動エネルギーを超えないので、

$$\frac{hc}{\lambda} < eV, \quad \therefore \lambda > \frac{hc}{eV}.$$

よって、

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV}.$$

- (3) V を大きくすると、 λ_{\min} は小さくなる。一方、特性 X 線の波長は物質固有の値であるため 変わらない。

§8.5 原子核

第5章では、質量欠損・結合エネルギー、原子核の核反応、核分裂、原子核崩壊、半減期の計算を扱う。核反応は複数物体系の力学だが、それ以外は新しく知識を覚える必要がある。

■簡単なまとめ

真空中の光速を c とする。

- 原子番号 Z 、質量数 A の原子 A_ZX の質量を M 、陽子の質量を m_p 、中性子の質量を m_n とする。 A_ZX の原子核をばらばらにする際に要するエネルギーを結合エネルギーと呼び、

$$B = \Delta Mc^2 = \{Zm_p + (A - Z)m_n - M\}c^2$$

と与えられる。このときの ΔM を質量欠損と呼ぶ。

- 粒子のエネルギー：

運動量 p 、質量 m の粒子のエネルギー E は、以下のように与えられる。

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2} = \begin{cases} cp & (m = 0), \\ mc^2 + \frac{p^2}{2m} & (m \neq 0, p \ll mc) \end{cases}$$

このとき、第1項を静止エネルギーと呼ぶ。

- 核反応の反応熱：

核反応で生じる反応熱 Q は、反応前後の質量の変化量 Δm を用いて、

$$Q = -\Delta mc^2 = \Delta K$$

となる。なお、これは観測される粒子の運動エネルギーの総和の変化量に等しい。

- 原子核崩壊：次の知識を暗記する。

$$\begin{cases} \alpha \text{崩壊} & \rightarrow \text{He 原子核を放出 (質量数が 4 減少, 原子番号が 2 減少)} \\ \beta \text{崩壊} & \rightarrow \text{高速の電子を放出 (質量数は不変, 原子番号が 2 増加)} \end{cases}$$

なお、 γ 崩壊は、高エネルギー状態にある原子が γ 線（高エネルギーの光）を放出する過程であり、質量数、原子番号は不変のままである。

- 半減期：定義を押さえる。

1. 質量欠損・結合エネルギー

次の原子核について、質量欠損 ΔM 、および結合エネルギー B をそれぞれ有効数字3桁で求めよ。なお、陽子の質量を $m_p = 1.0073 \text{ u}$ 、中性子の質量を $m_n = 1.0087 \text{ u}$ とし、 $1 \text{ u} \times c^2 = 931 \text{ MeV}$ としてよい。

- (1) ${}^4_2\text{He}$ 原子核, $M = 4.0026 \text{ u}$
- (2) ${}^9_4\text{Be}$ 原子核, $M = 9.0122 \text{ u}$

【解答】

- (1) 質量欠損は、

$$\Delta M = (2 \times 1.0073 + 2 \times 1.0087 - 4.0026) \text{ u} = \underline{\underline{0.0294 \text{ u}}}.$$

よって、結合エネルギーは、

$$B = \Delta M c^2 = 0.0294 \times 931 \text{ MeV} = \underline{\underline{27.4 \text{ MeV}}}.$$

- (2) 質量欠損は、

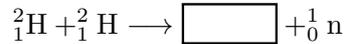
$$\Delta M = (4 \times 1.0073 + 5 \times 1.0087 - 9.0122) \text{ u} = \underline{\underline{0.0605 \text{ u}}}.$$

よって、結合エネルギーは、

$$B = \Delta M c^2 = 0.0605 \times 931 \text{ MeV} = \underline{\underline{56.3 \text{ MeV}}}.$$

2. 原子核反応①

2つの重水素 (${}^2_1\text{H}$) が融合し、ある原子の原子核と中性子を生じる以下の核反応について考える。



- (1) 生じる原子核を記せ。
- (2) 重水素の質量を m_D 、生じた原子核の質量を m 、中性子の質量を m_n 、この核反応で放出されるエネルギーを Q とする。反応前2つの重水素が、同じ速さ v で互いに逆向きに運動していた場合、反応後の中性子の運動エネルギー K_n 、生じた原子核の運動エネルギー K を求めよ。
- (3) 重水素の原子核の質量を $m_H = 2.0141 \text{ u}$ 、生じた原子核の質量を $m = 3.0160 \text{ u}$ 、中性子の質量を $m_n = 1.0087 \text{ u}$ とする。 Q を有効数字2桁で求めよ。ただし、 $1 \text{ u} \times c^2 = 931 \text{ MeV}$ とせよ。

【解答】

- (1) $\underline{\underline{{}^3_2\text{He}}}$.
- (2) 運動量保存則・エネルギー保存則より*5,

$$\begin{cases} \sqrt{2m_n K_n} - \sqrt{2mK} = m_D v + m_D(-v), \\ K + K_n - Q = \frac{1}{2} m_D v^2 \times 2, \end{cases}$$

$$\therefore K_n = \frac{m}{m_n + m} (m_D v^2 + Q), \quad K = \frac{m_n}{m_n + m} (m_D v^2 + Q).$$

- (3) 数値を代入して、

$$Q = \{2.0141 - (3.0160 + 1.0087)\} \times 931 \text{ MeV} \approx \underline{\underline{3.3 \text{ MeV}}}.$$

*5 静止エネルギーを考え、左辺にまとめれば、

$$K + K_n - \underbrace{(m_D \times 2 - m - m_n)c^2}_{\text{反応熱 } Q} = \frac{1}{2} m_D v^2 \times 2.$$

3. 原子核反応② (入試問題)

2つの重陽子 (${}^2_1\text{H}$) が衝突して融合し、ヘリウム原子核 (${}^4_2\text{He}$) と光子 (γ) が発生する核反応



について考える。2個の重陽子が、その間に働く静電気力に逆らって、核力が働く距離 R まで近づいたとき核反応が起こるとする。重陽子を点粒子と考える。重陽子間に働く静電気力による位置エネルギーは重陽子間の距離の逆数に比例する。この比例定数を K とする。重陽子の質量を m 、ヘリウム原子核の質量を M 、光の速さを c とする。文中の に適当な数式を入れよ。

- (1) 2つの重陽子が、互いに十分離れた位置で逆向きの等しい速さ v_0 を持ち、近づいて正面衝突する場合、この核反応が起こるために必要な最低の v_0 の大きさを、 m 、 K 、 R を用いて表すと、 $v_0 =$ ア となる。この核反応で、質量欠損によって放出される核エネルギー Q は、 $Q =$ イ と表せる。
- (2) 1つの重陽子が速さ v_1 を持ち、十分離れた位置に静止しているもう1つの重陽子に近づいて正面から衝突する場合を考える。静電気力による斥力のため、静止していた方は加速され、もう一方は減速される。やがて、両方が同じ速さ (これを u とする) になったときに最も接近する。このときの距離を r とする (これより外では、まだ核力は働いていないとする)。十分離れているときと最も接近するときとで、運動量が保存されることを示す式は、 ウ で与えられる。核反応が起こるために必要な最低の v_1 の大きさを、 m 、 K 、 R を用いて表すと、 $v_1 =$ エ となる。
- (3) 核反応で放出される核エネルギー Q がヘリウム原子核と光子にどのように分配されるかを考える。互いに十分離れた位置で逆向きの等しい速さ v_2 を持つ2つの重陽子が、近づいて正面衝突し核反応が起こったとき、重陽子の進行方向とは垂直な方向に光子が観測されたとする。この光子のエネルギーを E とし、ヘリウム原子核の速さを V とする。核反応の前後での運動量保存則から導かれる E の大きさを、 M 、 V 、 c を用いて表すと、 $E =$ オ となり、エネルギー保存則から導かれる E の大きさを、 M 、 V 、 m 、 v_2 、 Q を用いて表すと、 $E =$ カ となる。この2式から E を消去して V を求めると2つの候補解が得られるが、一方は不適当な解なので捨て、残る解 $V =$ キ を採用する。ここで、「重陽子の運動エネルギーや質量欠損による放出核エネルギーはヘリウム原子核の質量と同等なエネルギーよりもはるかに小さい」のを利用して V を近似すると、 $V \simeq$ ク が得られる。これを用いて E を計算すると、この核反応で放出される核エネルギーは、ほとんど光子が持ち去ることがわかる。

【メモ】

1997年九州大より.

【解答】

(1) エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \times 2 = \frac{K}{R}, \quad \therefore v_0 = \sqrt{\frac{K}{mR}}.$$

(2) $Q = (2m - M)c^2.$ (3) $mv_1 = 2mu.$ (4) $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mu^2 \times 2 + \frac{K}{r}.$ (5) $r = R$ として, 2 式を解けば,

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{K}{mR}}.$$

(6) 運動量保存則より,

$$\begin{cases} mv_2 + m(-v_2) = MV_x + 0, \\ 0 + 0 = MV_y + \frac{E}{c}. \end{cases} \quad \therefore V_x = 0, \quad V_y = -\frac{E}{Mc}.$$

よって,

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{E}{Mc}, \quad \therefore E = McV.$$

(7) エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 \times 2 = \frac{1}{2}MV^2 + E - Q, \quad \therefore E = Q + mv_2^2 - \frac{1}{2}MV^2.$$

(8) 以上 2 式より, $V > 0$ の解を選び,

$$V = c \left(\sqrt{1 + \frac{2(mv_2^2 + Q)}{Mc^2}} - 1 \right).$$

また, $\frac{1}{2}mv_2^2 \times 2 + Q \ll Mc^2$ より,

$$V \approx c \left(1 + \frac{2(mv_2^2 + Q)}{2Mc^2} - 1 \right) = \frac{mv_2^2 + Q}{Mc}.$$

4. 原子核崩壊

次の原子核崩壊について、 α 崩壊の回数 x と β 崩壊の回数 y を求めよ.

- (1) ${}^{238}_{92}\text{U}$ が崩壊し、 ${}^{206}_{82}\text{Pb}$ となる.
- (2) ${}^{232}_{90}\text{Th}$ が崩壊し、 ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ となる.

【解答】

- (1) 質量数は、 α 崩壊では 1 回あたり 4 減少し、 β 崩壊では減少しない。また、原子番号は、 α 崩壊では 1 回あたり 2 減少し、 β 崩壊では 1 増加する。よって、

$$\begin{cases} -4x = -32, \\ -2x + y = -10, \end{cases} \quad \therefore x = \underline{8}, \quad y = \underline{6}.$$

- (2) 同様に、

$$\begin{cases} -4x = -24, \\ -2x + y = -8, \end{cases} \quad \therefore x = \underline{6}, \quad y = \underline{4}.$$

5. 半減期

半減期 T の原子核崩壊において、はじめの原子核の個数を N_0 とする。

- (1) 時間 t 後に崩壊せずに残っている個数 N を t の関数として表せ。
- (2) 放射能の強さは、単位時間あたりに崩壊する原子核数で表す。時間 t 誤の放射能の強さ A を求めよ。

【解答】

$$(1) \quad N = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/T} .$$

- (2) 放射能の強さ A *6は、

$$A = -\frac{dN}{dt}$$

で与えられる。よって、

$$A = -\frac{\log 2}{T} N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/T} .$$

*6 単位には Bq (ベクレル) を用いる。

6. 年代測定

放射性炭素 ^{14}C は、半減期 5730 年で β 崩壊する。ある木片中の ^{14}C の割合は、生きている植物に比べて 12.5% であった。この木片は何年前のものか。有効数字 2 桁で求めよ。

【解答】

$0.125 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ より、死後、半減期の 3 倍の時間が経過している。よって、

$$5730 \times 3 = 17190 \approx \underline{\underline{1.7 \times 10^4}} \text{ 年.}$$

7. 半減期・年代測定（入試問題）

天然に存在するウランは、質量数が 235 の同位体 (^{235}U) と質量数が 238 の同位体 (^{238}U) の 2 種類だけであると考えてよく、いずれも半減期が長い。 ^{235}U の半減期は 7.0 億年、 ^{238}U の半減期は 45 億年である。原子力発電などに使われるウランは ^{235}U である。現在、天然に存在するウランの同位体の個数の割合は、 ^{235}U が 0.70%、 ^{238}U が 99.3% であるとする。以下の各問の計算問題に対して有効数字 2 桁で答えよ。

- (1) 現在から過去にさかのぼり、 t 億年前のウランの同位体の存在量を ^{235}U については $N_{235}(t)$ 個、 ^{238}U については、 $N_{238}(t)$ 個と書くことにする。 $N_{235}(t)$ を $N_{235}(0)$ で、また $N_{238}(t)$ を $N_{238}(0)$ で表せ。
- (2) 23 億年前 ($t = 23$) での ^{235}U の存在割合は何%であったか。また、太陽系が形成されたと考えられる 46 億年前 ($t = 46$) の ^{235}U の存在割合は何%であったか。必要なら、 $2^{38 \times 23 / 315} = 6.8$ として計算せよ。
- (3) 現在、原子力発電では、 ^{235}U の存在割合を 3.0% に濃縮して使用している。天然のウランでは ^{235}U の存在割合が 3.0% であったのは何億年前のことか。必要なら、 $\log_{10} 4.39 = 0.64$ 、 $\log_{10} 2 = 0.30$ として計算せよ。

【メモ】

1996 年大阪大前期より、一部設問を削除した。

【解答】

- (1) 半減期の定義より（微分方程式を解いて）、

$$N_{235}(t) = \underbrace{N_{235}(0)}_{\text{ }}, \quad N_{238}(t) = \underbrace{N_{238}(0)}_{\text{ }},$$

- (2) t 億年前の ^{235}U の存在割合は、

$$\frac{N_{235}(t)}{N_{235}(t) + N_{238}(t)}$$

で与えられる。ここに、 $t = 23$ 、 $t = 46$ を代入すれば、 $t = 23$ では 4.6%、 $t = 46$ では 25%。

- (3) 18 億年前。