

4

電磁気後半

第4部電磁気後半では、電磁気分野のうち磁気分野を主に扱う。第1章では、荷電粒子の運動（磁場の含んだ力学）、電流が磁場から受ける力、電流の作る磁場の決定を扱う。目新しい内容は電流の作る磁場の決定だけであり、はじめの2つは基本的には力学と電磁気の内容に磁場が加わっただけである。第2章では、電磁誘導を扱う。電磁誘導は、静磁場中を導体が動くことでその導体に誘導起電力が生じるタイプと、磁場が時間変化することで回路1周に誘導起電力が生じるタイプの2つがある。誘導起電力の決定としては、前者の場合は vBl の公式、ファラデー則ともに計算が可能だが、後者はファラデー則一択となる。また、電磁誘導は力学系と回路系の間のエネルギーの変換が本質であるということを、問題を通して学習する。第3章では、コイルを含んだ電気回路と、交流回路について扱う。時間平均や実効値の定義についてはここで学習する。なお、コイルを含んでも、電源が交流電源に代わっても、立てるべき物理法則は変わらないということを意識したい。

§4.1 静磁場

この章では、静磁場中の荷電粒子、電流が磁場から受ける力、および電流の作る磁場について扱う。荷電粒子の運動については磁場のあるだけの力学であり、等速円運動の定石が身についていれば新しい内容はほとんどない。電流が磁場から受ける力は、簡単な力学と電気回路の知識を要する。電流の作る磁場については、3つの公式を暗記する。

■簡単なまとめ

- ローレンツ力 : $f = qvB$

q は荷電粒子の電荷、 v は荷電粒子の速さ、 B は磁束密度の大きさである。 v と B が直交していないときは、直交成分のみを取り出して計算する。向きはフレミング左手則で決定する。

- アンペール力 : $F = IB\ell$

I は流れる電流の値、 ℓ は電流の流れる領域の長さ、 B は磁束密度の大きさである。 I と B が直交していないときは、直交成分のみを取り出して計算する。向きはフレミング左手則で決定する。なお、アンペール力は、電流を構成する荷電粒子に生じるローレンツ力の合力と等しい。

- 磁場 H と磁束密度 B の関係 (μ は透磁率) : $B = \mu H$

- 電流の作る磁束密度の公式 :

① 十分長い直線電流 : $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$ (r は電流からの半径)

② 十分長いソレノイドコイルの中 : $B = \mu n I$ (n は単位長さ当たりの巻き数)

③ 円電流の中心 : $B = \frac{\mu I}{2r}$ (r は円電流の半径)

1. 磁場から受ける力①

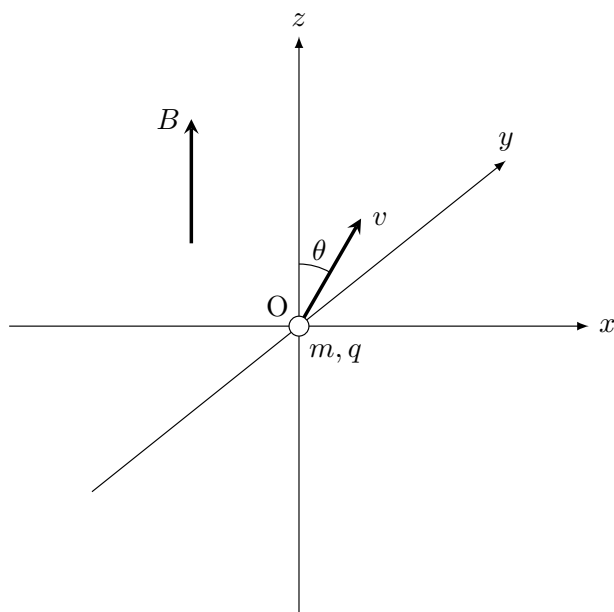
図のように x 軸, y 軸, z 軸をとる. 空間内に, 大きさ B の磁束密度を z 軸正の方向に一様にかけた. 原点に質量 m , 電荷 $q (> 0)$ の点電荷を置く. 原点にある点電荷に, zx 平面内において z 軸正の向きから角度 θ の向きに速さ v の初速を与えた.

I $\theta = \frac{\pi}{2}$ とき, すなわち x 軸に沿って x 正方向に打ち出した場合を考える.

- (1) 点電荷にはたらく力の大きさと向きをそれぞれ求めよ.
- (2) 点電荷は xy 平面上で等速円運動をする. 円運動の運動方程式から円軌道の半径を求め, その軌跡を図示せよ.
- (3) 円運動の周期を求めよ.
- (4) 粒子の運動に対し, 磁場が仕事をしないことを確認せよ.

II $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の場合を考える.

- (1) 点電荷にはたらく力の大きさと向きをそれぞれ求めよ.
- (2) 点電荷の運動は xy 平面内の等速円運動と, z 軸方向の等速度運動に分解できる. 円運動の運動方程式から円軌道の半径を求めよ.
- (3) 点電荷が1回目に z 軸に戻ってきたときの z 座標を求めよ.



【解答】

I (1) 公式より,

$$f = \underline{qvB}.$$

向きは*1, y 負方向.

(2) 運動方程式の中心方向成分より (図略),

$$m \frac{v^2}{r} = qvB, \quad \therefore r = \underline{\frac{mv}{qB}}.$$

(3) 運動の周期 T は,

$$vT = 2\pi r, \quad \therefore T = \underline{\frac{2\pi m}{qB}}.$$

(4) ローレンツ力は速度と直交することから, ローレンツ力の仕事率は 0. よって, 磁場は物体に仕事をしない.

II (1) 公式より,

$$f = \underline{qvB \sin \theta}.$$

向きは, y 負方向.

(2) 運動方程式の中心方向成分より (図略),

$$m \frac{v^2 \sin^2 \theta}{r} = qvB \sin \theta, \quad \therefore r = \underline{\frac{mv}{qB} \sin \theta}.$$

(3) 点電荷が再び z 軸を通過する時刻 t は,

$$v \sin \theta t = 2\pi r, \quad \therefore t = \underline{\frac{2\pi m}{qB}}.$$

よって,

$$z = v \cos \theta t = \underline{\frac{2\pi mv}{qB} \cos \theta}.$$

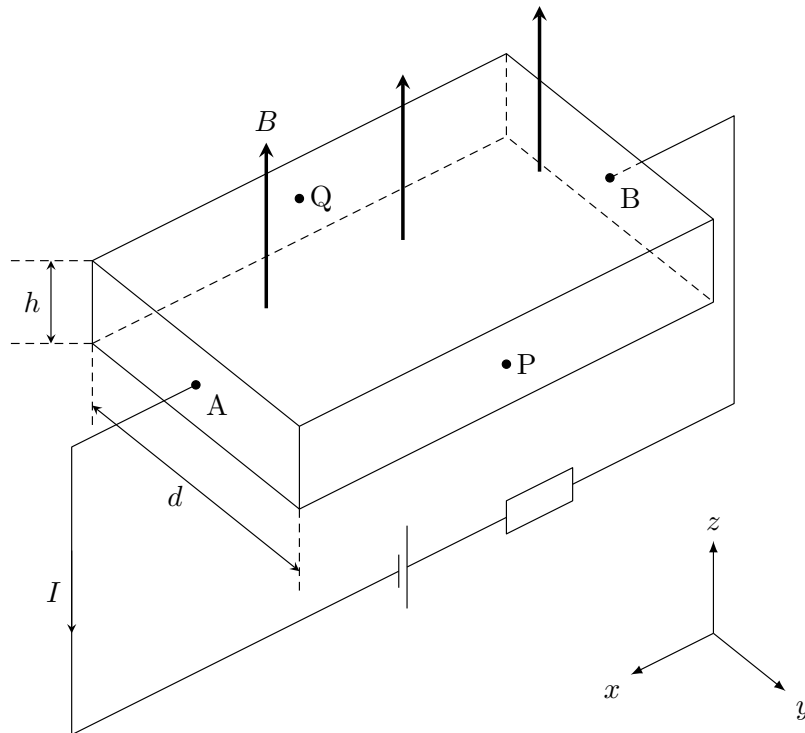
*1 フレミング左手則に従う.

2. 磁場から受ける力②（ホール効果）

図のように， xyz 空間を定め， z 軸正方向に磁束密度の大きさ B の磁場をかける． xy 平面と平行になるように導体（幅 d ，高さ h ）を置く．この導体に電位差を与えたとき，側面 PQ 間にも電位差が生じる現象をホール効果と呼ぶ．

導体内部のキャリア^{*2}が正孔（ホール）^{*3}の場合を考える．ホールの電荷を q ，数密度を n ，導体を流れる電流の大きさを I とする．導体には，B 側が高電位となるように電位差を与える．

- (1) ホールが受けるローレンツ力の大きさと向きを求めよ．
- (2) 定常状態において， y 方向に生じる電場の大きさと向きを求めよ．
- (3) 定常状態において，Q に対する P の電位を求めよ．



^{*2} 電流の担い手となる荷電粒子．

^{*3} ホール効果のホールとは無関係．ホール効果は Hall，正孔（ホール）は hole．

【解答】

(1) 電流の定義より

$$I = qnvhd, \quad \therefore v = \frac{I}{qnhd}.$$

公式より,

$$f = qvB = \frac{IB}{\underline{nhd}}, \quad \underline{y \text{ 負方向}}.$$

(2) つりあいより,

$$0 = qE - qvB, \quad \therefore E = \frac{IB}{\underline{qnhd}}, \quad \underline{y \text{ 正方向}}.$$

(3) 電場と電位の関係より,

$$V_{\text{QP}} = Ed = \frac{IB}{\underline{qn\hbar}}.$$

3. 磁場から受ける力③（難しいのでやらなくてもよい）

一様な電場・磁場の存在する xyz 空間内での電子（質量 m ，電荷 $-e$ ）の運動について考える．重力，および空気の影響は考えない．

- I z 軸正の向きに大きさ E の一様な電場のみが存在する場合を考える．時刻 $t = 0$ に原点 O で電子を静かに放した後の運動について，電子の座標を時刻 t の関数として表せ．
- II z 軸正の向きに磁束密度の大きさ B の一様な磁場のみが存在する場合を考える．時刻 $t = 0$ に原点 O で電子に x 軸正の向きに大きさ v_0 の初速度を与えた後の運動について，電子の座標を時刻 t の関数として表せ．
- III z 軸正の向きに大きさ E の一様な電場が存在し，かつ z 軸正の向きに磁束密度の大きさ B の一様な磁場が存在する場合を考える．時刻 $t = 0$ に原点 O で電子に x 軸正の向きに大きさ v_0 の初速度を与えた後の運動について，電子の座標を時刻 t の関数として表せ．
- IV y 軸正の向きに大きさ E の一様な電場が存在し，かつ z 軸正の向きに磁束密度の大きさ B の一様な磁場が存在する場合を考える．時刻 $t = 0$ に原点 O で電子を静かに放した後の運動について考える．
- (1) この運動を x 軸方向に一定の速さ u で動く観測者から見ると，等速円運動に見える． u を求めよ．また，その円軌道の半径 r ，および角速度 ω を求めよ．
- (2) 電子の座標を時刻 t の関数として表せ．

【解答】

I x 方向, および y 方向は力を受けないため加速度成分は 0. 運動方程式の z 成分より,

$$m\ddot{z} = -eE, \quad \therefore \ddot{z} = -\frac{eE}{m}.$$

加速度一定より, 初期条件を考慮して,

$$\underline{x=0}, \quad \underline{y=0}, \quad \underline{z = -\frac{eE}{2m}t^2}.$$

II xy 平面内で等速円運動を行う. その半径を r とすれば, 運動方程式の中心方向成分から,

$$m\frac{v_0^2}{r} = ev_0B, \quad r = \frac{mv_0}{eB}.$$

角速度 ω は,

$$\omega = \frac{v_0}{r} = \frac{eB}{m}.$$

よって,

$$\underline{x = \frac{mv_0}{eB} \sin\left(\frac{eB}{m}t\right)}, \quad \underline{y = \frac{mv_0}{eB} \left\{1 - \cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right\}}, \quad \underline{z=0}.$$

なお,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -e\dot{y}B, \\ m\ddot{y} = +e\dot{x}B, \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

を直接解いても求まる.

III 運動方程式より,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -e\dot{y}B, \\ m\ddot{y} = +e\dot{x}B, \\ m\ddot{z} = -eE. \end{cases}$$

したがって, I, II を組み合わせた運動になっており,

$$\underline{x = \frac{mv_0}{eB} \sin\left(\frac{eB}{m}t\right)}, \quad \underline{y = \frac{mv_0}{eB} \left\{1 - \cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right\}}, \quad \underline{z = -\frac{eE}{2m}t^2}.$$

IV 運動方程式より,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -e\dot{y}B, \\ m\ddot{y} = +e\dot{x}B - eE = eB\left(\dot{x} - \frac{E}{B}\right), \\ m\ddot{z} = 0. \end{cases}$$

したがって、 x 軸の正方向に速さ $u = \frac{E}{\underline{B}}$ で動く観測者から見れば、II と同じ角速度の円運動となる^{*4}。よって、

$$\omega = \frac{eB}{\underline{m}_{(1)}}, \quad r = \frac{u}{\omega} = \frac{mE}{\underline{eB^2}_{(1)}}.$$

また、電子の位置座標は、

$$\underline{x} = \frac{E}{B}t - \frac{mE}{eB^2} \sin\left(\frac{eB}{m}t\right), \quad \underline{y} = -\frac{mE}{eB^2} \left\{1 - \cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right\}, \quad \underline{z} = 0_{(2)}.$$

この軌跡はサイクロイドである。

^{*4} 運動方程式が同じなので角速度は等しい。しかし、初期条件が異なるので半径は異なる。初期条件は、 $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$ であり、等速度で動く観測者を A とすれば、 $\dot{x}_{A \rightarrow \text{電子}}(0) = \dot{x}(0) - \frac{E}{B}$, $\dot{y}_{A \rightarrow \text{電子}}(0) = \dot{y}(0) = 0$ である。

4. 電流が磁場から受ける力 (I(4), II は難しいのでやらなくてもよい)

図のように x 軸, y 軸, z 軸を定める. ABEF は xy 平面上にあり, AF に接続されている直流電源 (内部抵抗無視) の起電力を E とする. 空間内に, z 軸負の方向に磁束密度の大きさ B の磁場を一様にかける. 空間は真空とし, 真空の透磁率を μ_0 , 重力加速度の大きさを g とする.

I 図1の状況を考える. BC 間, DE 間には長さ ℓ の導線 (質量・抵抗無視) を, EB 間には電流が流れないよう長さ ℓ の絶縁体棒を固定し, CD 間には質量 m , 長さ ℓ , 抵抗値 R の導体棒を接続した. なお, EB 間の絶縁体棒のみ固定してある. このとき, 回路には電流が流れ始め, 十分時間がたった後, CD 間の導線は y 軸正の向きから見て z 軸に対し反時計回りに角度 θ_0 だけ傾き静止した.

- (1) キルヒホッフ則より, CD 間に流れる電流の大きさを求めよ.
- (2) CD 間に流れる電流が磁場から受ける力の大きさと向きをそれぞれ求めよ.
- (3) 全体が静止していることから, $\tan \theta_0$ を求めよ.
- (4) CD 間の導体棒を, 静止している状態から更に微小な角度 ϕ だけ動かし静かに手を放したところ, 近似的に単振動をした. この単振動の周期を求めよ. なお, 導体棒が運動することによって生じる誘導起電力は無視できるものとする.

II 図2の状況を考える. BC 間, CD 間, DE 間, BC と ED の中点を結ぶ位置のそれぞれに質量 m , 長さ ℓ , 抵抗値 R の導体棒を接続した. なお, EB 間には電流が流れないよう長さ ℓ の絶縁体棒を固定してある. このとき, 回路には電流が流れ始め, 十分時間がたった後, CD 間の導線は y 軸正の向きから見て z 軸に対し反時計回りに角度 θ_1 だけ傾き静止した. 導体棒は一様であり, その抵抗値は長さに比例するものとする.

- (1) CD 間に流れる電流の大きさを求めよ.
- (2) $\tan \theta_1$ は $\tan \theta_0$ の何倍か.

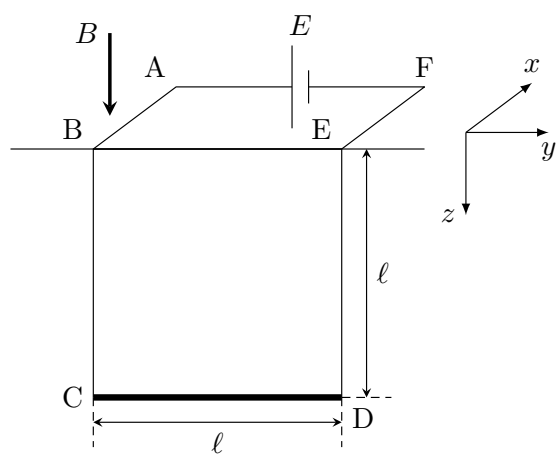


図 1

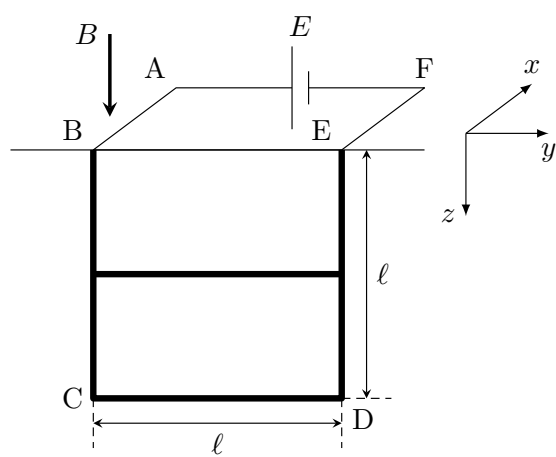


図 2

【解答】

I (1) キルヒホッフ則より,

$$E - RI = 0, \quad I = \frac{E}{\underline{R}}.$$

(2) 公式より^{*5},

$$F = IB\ell = \frac{EB\ell}{\underline{R}}.$$

(3) 張力の大きさを S とする. 導体棒のつりあいより,

$$\begin{cases} x: 0 = S \sin \theta_0 - IB\ell, \\ z: 0 = mg - S \cos \theta_0, \end{cases} \quad \therefore \tan \theta_0 = \frac{EB\ell}{\underline{mgR}}, \quad S = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{EB\ell}{R}\right)^2}.$$

(4) 角度 θ にあるときの導体棒の運動方程式は,

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta + \frac{EB\ell}{R} \cos \theta, \\ m \frac{v^2}{\ell} = S - mg \cos \theta. \end{cases}$$

運動方程式の接線成分より, θ が θ_0 近傍では,

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -mg \sin \theta + \frac{EB\ell}{R} \cos \theta \\ m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{EB\ell}{R}\right)^2} \sin(\theta - \theta_0) \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\omega^2 \sin(\theta - \theta_0) \\ \therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} &\doteq -\omega^2(\theta - \theta_0). \end{aligned}$$

となり, 導体棒は近似的に $\theta = \theta_0$ を振動中心とした単振動をすることが確認できる^{*6}. ここ

で, $\omega^2 = \sqrt{\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{EB}{mR}\right)^2}$ とした. よって, その周期は,

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{EB}{mR}\right)^2}^{-\frac{1}{4}}.$$

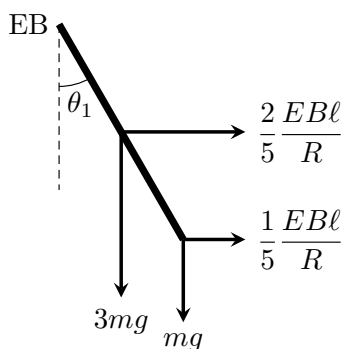
^{*5} 向きはフレミング左手則に従う.

^{*6} $\phi = \theta - \theta_0$ である.

- II (1) キルヒホッフ則より，中点を結ぶ導体棒を流れる電流を i_1 ，CD 間を流れる電流を i_2 と
して，

$$\begin{cases} E - \frac{R}{2}(i_1 + i_2) \times 2 - Ri_1 = 0, \\ E - \frac{R}{2}(i_1 + i_2) \times 2 - \frac{R}{2}i_2 \times 2 - Ri_2 = 0, \end{cases} \therefore i_1 = \frac{2E}{5R}, \quad i_2 = \frac{E}{5R}.$$

- (2) y 軸正の方向から見た力の概略は以下の図の通りである^{*7}。



EB 軸まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$0 = \frac{2}{5} \frac{EB\ell}{R} \cdot \frac{\ell}{2} \cos \theta_1 + \frac{1}{5} \frac{EB\ell}{R} \cdot \ell \cos \theta_1 - 3mg \cdot \frac{\ell}{2} \sin \theta_1 - mg \cdot \ell \sin \theta_1, \\ \therefore \tan \theta_1 = \frac{4}{25} \frac{EB\ell}{mgR}.$$

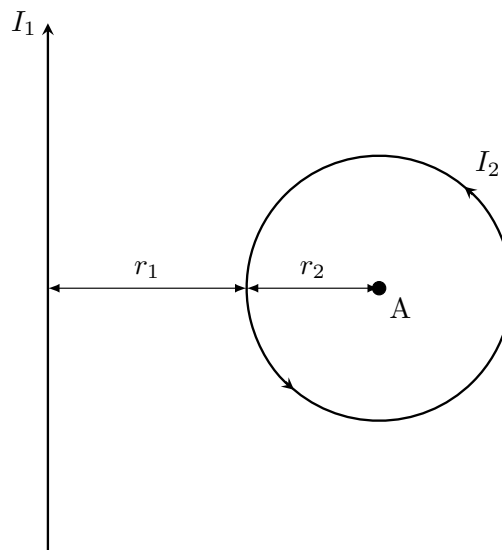
よって， $\frac{4}{25}$ 倍。

^{*7} 中心から伸びる $3mg$ の重力は，周の横側の辺と真ん中を通る辺の導線の重力の合力である。

5. 電流の作る磁場①（公式の確認）

図4のように，大きさ I_1 の直線電流，および大きさ I_2 の円電流を流した．円電流の中心を点 A とし，直線電流と点 A の間の距離を r ，円電流の半径を R とする．空間は真空とし，真空の透磁率を μ_0 とする．

- (1) 直線電流が点 A の位置に作る磁束密度の大きさと向きをそれぞれ求めよ．
- (2) 円形電流が点 A の位置に作る磁束密度の大きさと向きをそれぞれ求めよ．
- (3) A 点の位置で観測される磁束密度を，紙面裏側から表側の向きを正として求めよ．



【解答】

(1) 公式より,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(r_1 + r_2)}, \quad \text{紙面表側から裏側向き.}$$

(2) 公式より,

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2r_2}, \quad \text{紙面裏側から表側向き.}$$

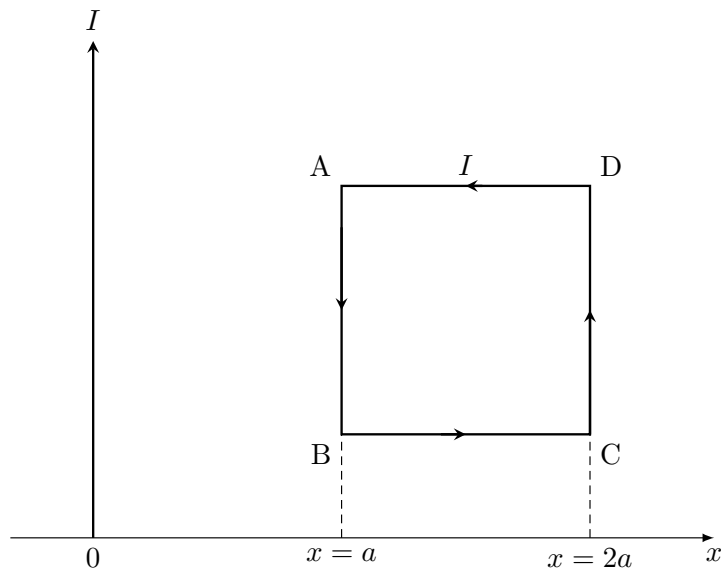
(3) A 点で観測される磁束密度は, I, II で求めた磁束密度の重ね合わせであるから, 正の向きに注意して,

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(r_1 + r_2)} + \frac{\mu_0 I_2}{2r_2} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left(-\frac{I_1}{r_1 + r_2} + \frac{\pi I_2}{r_2} \right). \end{aligned}$$

6. 電流が磁場から受ける力・電流の作る磁場②

図のように，十分長い導線に大きさ I の電流 1 を流し，そこから距離 a だけ離れた位置に辺の長さ a の正方形コイルを固定した．正方形コイルには大きさ I の電流 2 が流れている． x 軸を図の右向きに定める．空間は真空とし，真空の透磁率を μ_0 とする．なお，誘導起電力の影響は無視できるものとする．

- (1) 辺 AB を流れる電流 2 が，電流 1 の作る磁束密度から受ける力の大きさと向きをそれぞれ求めよ．
- (2) 辺 CD を流れる電流 2 が，電流 1 の作る磁束密度から受ける力の大きさと向きをそれぞれ求めよ．
- (3) コイルの辺 CD が位置 x にあるとき，コイルが受ける力の合力を求めよ．



【解答】

- (1) 電流 1 が AB の位置に作る磁束密度は紙面表側から裏向きで、その大きさは公式より、

$$B_{1 \rightarrow AB} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

よって、電流 2 が受けるアンペール力は、

$$F_{AB} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}, \quad \text{\textit{x} 軸正の向き}.$$

- (2) 同様にして、

$$F_{CD} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}, \quad \text{\textit{x} 軸負の向き}.$$

- (3) 位置 x のとき、コイルにはたらく力は、

$$F = F_{AB} + F_{CD} = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(x-a)} - \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x(x-a)}.$$

§4.2 電磁誘導

この章では、電磁誘導に関する問題を扱う。電磁誘導は、静磁場中を導体動くことで導体に誘導起電力が生じるタイプ (vBl 公式)、磁場が時間変化することで誘導起電力が生じるタイプ (ファラデーの法則) の2つに分類される。ファラデー則はどちらの場合の誘導起電力も計算はできるが、 vBl 公式が使える場合は vBl 公式を利用する方が楽なことが多いため、どちらでも誘導起電力を計算できるようにする。

また、後半では誘導起電力が素子の性質の原因となっているコイルの中身について、自己誘導・相互誘導を扱う。その後、コイルを回路素子として用いる次章につなげる (本章でも一部コイルを素子として用いる問題を含む)。

■簡単なまとめ

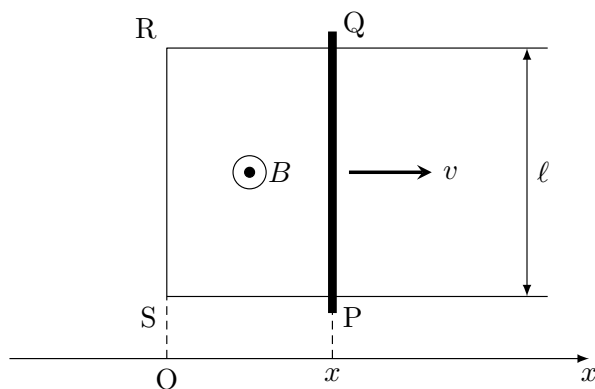
- 静磁場中を動く導体棒に生じる誘導起電力: $V = vBl$ v は導体棒の速さ, ℓ は導体棒の長さ, B は磁束密度の大きさである。 v , B , 導体棒が直交していないときは、直交成分のみを取り出して計算する。誘導起電力の向きは、フレミング左手則で正電荷が受ける力の向きに等しい。
- ファラデー則: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$
 Φ は磁束で、磁場 B を貫く領域の磁場と直交した部分の面積 S を用いて $\Phi = BS$ と定義される。誘導起電力の向きは、磁場の方向に合わせて右ねじの向きを正に生じる。
 なお、誘導起電力 $\mathcal{E}$ はループ1周の起電力である。
- 電磁誘導の枠組み

① 誘導起電力の決定	→	{	導体棒が静磁場中を運動	→	vBl 公式/ファラデー則
			磁場が時間変化	→	ファラデー則一択
- ② 回路の議論
- ③ 力学系の運動の議論
- ④ エネルギーの変換に関する議論

1. 誘導起電力の決定①

図のように、水平面上に2本の抵抗の無視できるレールを、間隔 ℓ で平行に固定し、その一端に導線を接続した。導線の位置を原点 O とし、レールと平行に x 軸をとる。この空間に、大きさ B 、鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた。導体棒は、2本のレールと常に接触し、 x 軸と垂直なまま、摩擦なく運動できるようにになっている。導体棒を $x = 0$ に置き、外力を加え一定の速さ v で運動させた。この瞬間を時刻 $t = 0$ 、時刻 t における導体棒の位置を x とする。磁束の正の向きを、磁束密度と同方向に定める。

- (1) $vB\ell$ の公式に従い、PQ 間に生じる誘導起電力 V を求めよ。
- (2) ファラデーの法則に従い、回路1周に生じる誘導起電力 $\mathcal{E}$ を求めよ。
- (3) (1), (2) の結果が同じ結果を与えていることを確かめよ。



【解答】

- (1) $vB\ell$ の公式より、

$$V = \underline{vB\ell}, \text{ (向きは } Q \rightarrow P \text{).}$$

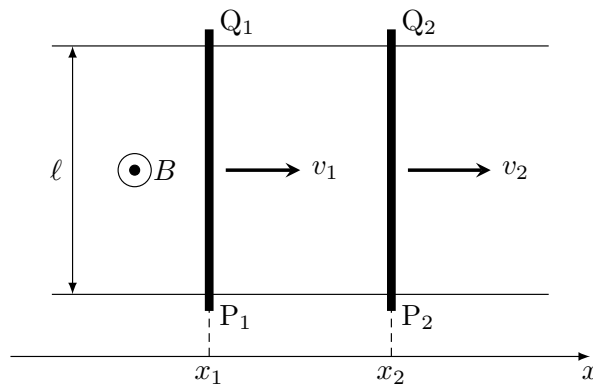
- (2) ファラデー則より、

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell \frac{dx}{dt} = \underline{-vB\ell}.$$

2. 誘導起電力の決定②

図のように、水平面上に2本の抵抗の無視できるレールを、間隔 ℓ で平行に固定した。レールと平行に x 軸をとる。この空間に、大きさ B 、鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた。体棒1とレールとの接点を P_1, Q_1 、導体棒2とレールとの接点を P_2, Q_2 とする。各導体棒は、2本のレールと常に接触し、 x 軸と垂直なまま、摩擦なく運動できるようになっている。時刻 t における導体棒1, 2の位置、速度をそれぞれ x_1, x_2, v_1, v_2 とする。磁束の正の向きを、磁束密度と同方向に定める。

- (1) $vB\ell$ 公式に従い、時刻 t において P_1Q_1 間、および P_2Q_2 間に生じる誘導起電力 V_1, V_2 をそれぞれ求めよ。
- (2) ファラデーの法則に従い、時刻 t において回路1周に生じる誘導起電力 $\mathcal{E}$ を求めよ。
- (3) (1), (2) の結果が同じ結果を与えていることを確かめよ。



【解答】

- (1) $vB\ell$ の公式より、

$$V_1 = \underbrace{v_1 B \ell}, \quad (\text{向きは } Q_1 \rightarrow P_1), \quad V_2 = \underbrace{v_2 B \ell}, \quad (\text{向きは } Q_2 \rightarrow P_2).$$

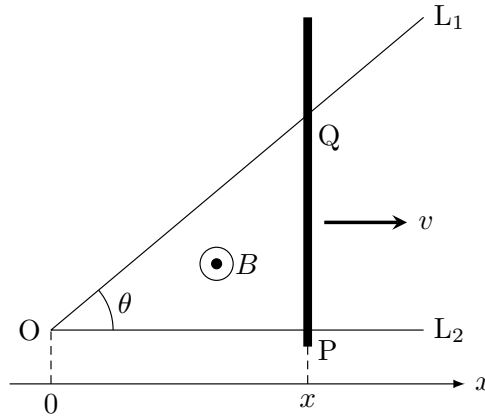
- (2) ファラデー則より、

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell \frac{dx}{dt} = \underbrace{-vB\ell}.$$

3. 誘導起電力の決定③

図のように、水平面上に2本の抵抗の無視できるレール L_1 , L_2 を角度 θ で接続し固定した。レールの接続点を原点 O とし、レール L_2 と平行に x 軸をとる。この空間に、大きさ B 、鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた。導体棒は、2本のレールと常に接触し、 x 軸と垂直なまま、摩擦なく運動できるようになっている。導体棒を $x = 0$ に置き、外力を加え一定の速さ v で運動させた。時刻 t における導体棒の位置を x とする。磁束の正の向きを、磁束密度と同方向に定める。

- (1) vBl 公式に従い、PQ 間に生じる誘導起電力 V を求めよ。
- (2) ファラデーの法則に従い、回路1周に生じる誘導起電力 $\mathcal{E}$ を求めよ。
- (3) (1), (2) の結果が同じ結果を与えていることを確かめよ。



【解答】

- (1) vBl の公式より、

$$V = \underline{vBx \tan \theta}, \quad (\text{向きは } Q \rightarrow P).$$

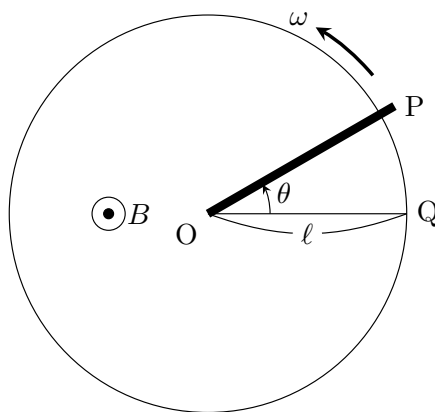
- (2) ファラデー則より、

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2}B \frac{d}{dt}(x^2) \tan \theta = -\frac{1}{2}B \cdot 2x \frac{dx}{dt} \tan \theta = \underline{-vBx \tan \theta}.$$

4. 誘導起電力の決定④

図のように、水平面上に半径 ℓ の円形レールを固定した。この空間に、大きさ B 、鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた。導体棒に外力を加え、角速度 ω で運動させる。導体棒の回転軸を O 、導体棒と円形レールの接触点を P 、導体棒の回転軸とレールを結ぶ導線とレールの接点を Q とする。導体棒とこの導線との接触は考えないものとする。磁束の正の向きを、磁束密度と同方向に定める。

- (1) $vB\ell$ 公式に従い、 OP 間に生じる誘導起電力 V を求めよ。
- (2) ファラデーの法則に従い、回路1周に生じる誘導起電力 $\mathcal{E}$ を求めよ。
- (3) (1), (2) の結果が同じ結果を与えていることを確かめよ。



【解答】

- (1) $vB\ell$ の公式より,

$$V = \int_0^\ell x\omega B dx = \frac{1}{2}\omega B\ell^2, \quad (\text{向きは } O \rightarrow P).$$

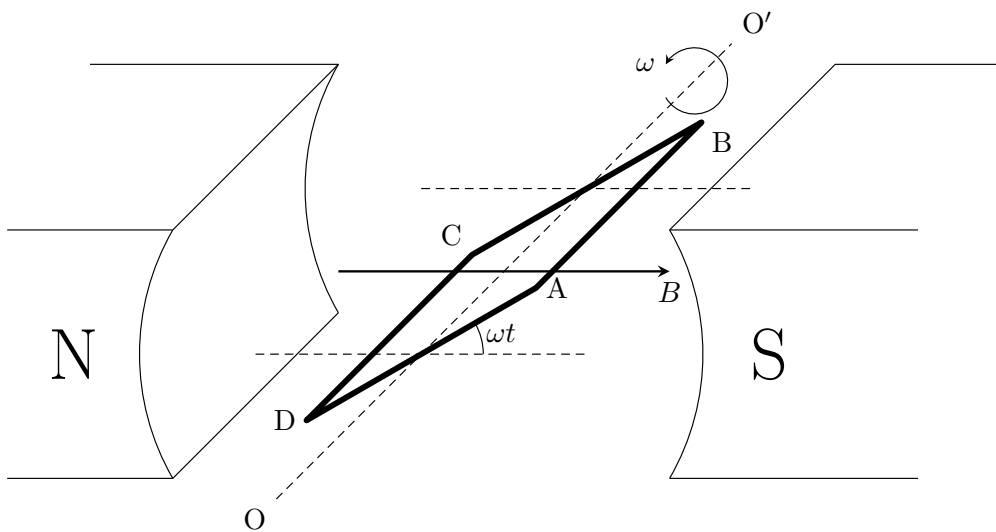
- (2) ファラデー則より,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2}B\ell^2\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}\omega B\ell^2.$$

5. 交流の発生

図のように、水平面上に磁石を置き、磁石が作る大きさ B の一様な磁束密度中に一片の長さ a の正方形コイル ABCD を置く。コイルを磁場に垂直な軸 OO' を回転軸として、 O から O' を見て反時計回りに一定な角速度 ω で回転させた。時刻 $t = 0$ において、コイルは水平になっているものとする。起電力の正の向きを、 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ の向きとする。以下の設問に答えよ。

- (1) vBl 公式に従い、時刻 t において回路1周に生じる誘導起電力 V を求めよ。
- (2) ファラデーの法則に従い、時刻 t において回路1周に生じる誘導起電力 $\mathcal{E}$ を求めよ。



【解答】

- (1) vBl の公式より、 A から B の向きに $V_{AB} = \frac{1}{2}a^2\omega B \cos(\omega t)$ の起電力が生じる。 C から D の起電力も考慮すれば、

$$V = \underline{Ba^2\omega \cos(\omega t)}, \quad (\text{向きは } A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A).$$

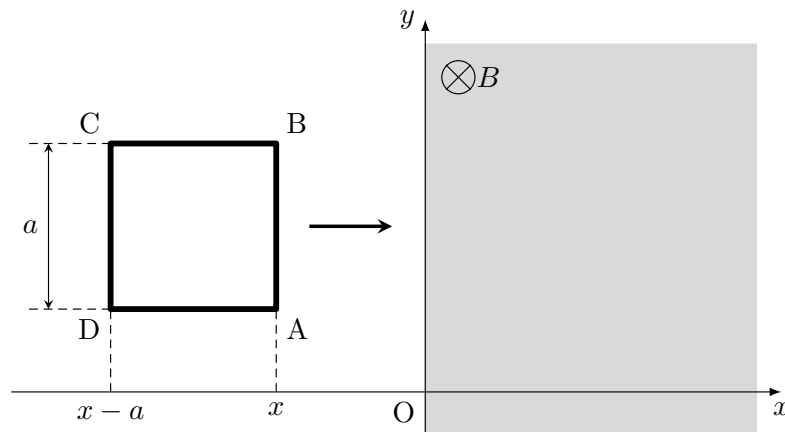
- (2) 磁束の正の向きを、 $t = 0$ で鉛直下向きになるよう面と垂直に定める。ファラデー則より、

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba^2 \frac{d}{dt} \{\sin(\omega t)\} = \underline{-Ba^2\omega \cos(\omega t)}.$$

6. 磁場中を動く回路

図のように，水平面上に一辺の長さ a の正方形コイル ABCD（1 周での電気抵抗 R ）を置いた．AD と平行に x 軸をとる．この空間に，磁束密度の大きさ B ，鉛直下向きの一様な磁場をかけた．コイルは，外力を加えて一定の速度 v で x 軸正の向きへ運動している．コイルの一部が $x = 0$ を通過し始めた瞬間を時刻 $t = 0$ とし，時刻 t における頂点 A の位置を x とする．電流の正の向きを反時計回りに定める．

- (1) vBl 公式に従い誘導起電力を決定し，時刻 $t > 0$ において回路に流れる電流のグラフを図示せよ．
- (2) ファラデーの法則に従い誘導起電力を決定し，時刻 $t > 0$ において回路に働く力のグラフを図示せよ．



【解答】

- (1) 生じる起電力は vBl の公式より,

$$V = \begin{cases} vBa & (0 \leq t \leq a/v), \\ 0 & (a/v \leq t). \end{cases}$$

キルヒホッフ則より,

$$I = \begin{cases} \frac{vBa}{R} & (0 \leq t \leq a/v), \\ 0 & (a/v \leq t). \end{cases}$$

あとはこれを図示すればよい (図略).

- (2) 公式より,

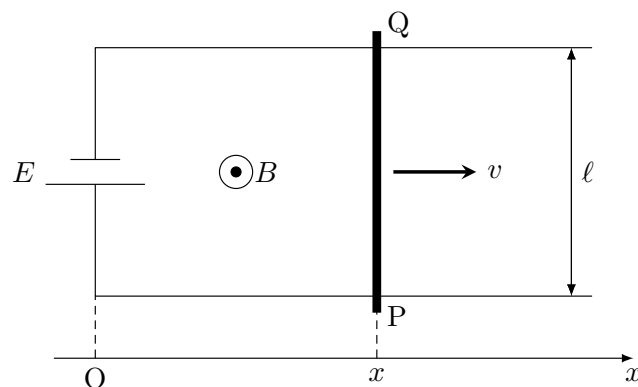
$$F = \begin{cases} \frac{vB^2a^2}{R} & (0 \leq t \leq a/v), \\ 0 & (a/v \leq t). \end{cases}$$

あとはこれを図示すればよい (図略).

7. 磁場中を動く導体棒①

図のように、水平面上に2本の抵抗の無視できるレールを間隔 ℓ で平行に固定し、その一端に起電力 E の電池を接続した。電池の位置を原点 O とし、レールと平行に x 軸をとる。この空間に、大きさ B 、鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた。導体棒（質量 m 、抵抗値 R ）は、2本のレールと常に接触し、 x 軸と垂直なまま、摩擦なく運動できるようになっている。導体棒を $x = 0$ に置き、この瞬間を時刻 $t = 0$ 、時刻 t における導体棒の位置を x 、速度を v とする。起電力および電流の正の向きを、図の $P \rightarrow Q$ （図の反時計回り）の向きとする。

- (1) $vB\ell$ 公式に従い、時刻 t において PQ 間に生じている誘導起電力 V を求めよ。
- (2) 時刻 t において回路に流れる電流 I を求めよ。
- (3) 導体棒の加速度を a とし、運動方程式を立式せよ。
- (4) 導体棒の運動について論ぜよ。
- (5) 系のエネルギー収支について論ぜよ。



【解答】

(1) 公式より,

$$V = \underbrace{vB\ell}.$$

(2) キルヒホッフ則より,

$$E - vB\ell - IR = 0, \quad \therefore I = \frac{E - vB\ell}{\underbrace{R}}.$$

(3) 運動方程式は,

$$\underbrace{ma = \frac{B\ell(E - vB\ell)}{R}}.$$

(4) 運動方程式より,

$$a = -\frac{B^2\ell^2}{mR} \left(v - \frac{E}{B\ell} \right).$$

よって, 空気抵抗を受ける物体と同じ運動を取り, その終端速度は $v_f = \frac{E}{\underbrace{B\ell}}$ ^{*8}.

(5) 運動方程式・キルヒホッフ則より,

$$\begin{cases} m\dot{v} = IB\ell, \\ 0 = EI - vB\ell - RI^2. \end{cases}$$

運動方程式の両辺に速度 v をかけ, キルヒホッフ則の両辺に電流 I をかけ 2 式和を取ると,

$$EI = RI^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)$$

となることがわかる^{*9}. よって, 電池のする仕事の一部がジュール熱として消費され, 残りの部分が磁場を介して導体棒の運動エネルギーへと変換されている.

^{*8} 時刻 t における物体の速度 v は,

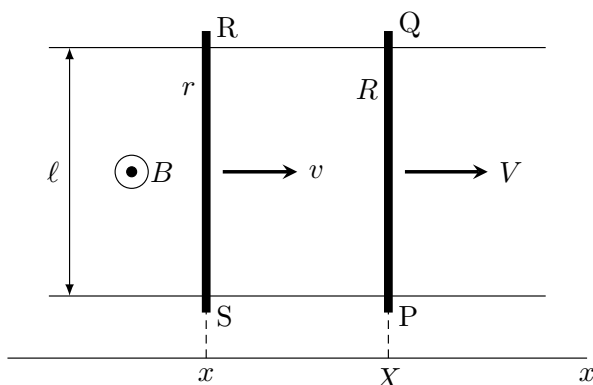
$$v = \frac{E}{B\ell} \left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t} \right).$$

^{*9} ここまでの計算などは自分でわからなくてもよいが (分かった方が楽しいです), 続く日本語による説明は自分で書けるようにすること.

8. 磁場中を動く導体棒②

図のように、水平面上に2本の抵抗の無視できるレールを間隔 ℓ で平行に固定した。レールと平行に x 軸をとる。この空間に、大きさ B 、鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた。導体棒1（質量 m 、抵抗値 r ）、導体棒2（質量 M 、抵抗値 R ）は、2本のレールと常に接触し、 x 軸と垂直なまま、摩擦なく運動できるようにになっている。導体棒1に対して右向きに初速度 v_0 を与えた。この瞬間を時刻 $t = 0$ とし、時刻 t における導体棒1, 2の位置を x, X 、速度を v, V 、加速度を a, A とする。なお、2つの導体棒の接触は起こらないものとする。起電力および電流の正の向きを、図の $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow P$ の向きとする。以下の設問に答えよ。

- (1) 時刻 t において回路に流れる電流 I を求めよ。
- (2) 各導体棒について、運動方程式を立式せよ。
- (3) 十分時間が経過した後、導体棒1、導体棒2はそれぞれ一定の速度 v_f, V_f となった。 v_f, V_f をそれぞれ求めよ。
- (4) 導体棒の速度が一定となるまでに、2つの導体棒で生じたジュール熱を求めよ。



【メモ】

導体棒が2本あることから、運動の議論の際は複数物体系の問題として捉える。

【解答】

- (1) キルヒホッフ則より、

$$vB\ell - VB\ell - (R+r)I = 0, \quad \therefore I = \frac{B\ell}{\underline{R+r}}(v-V).$$

- (2) 運動方程式は、

$$\begin{cases} \underline{ma = -\frac{(B\ell)^2}{R+r}(v-V)}, \\ \underline{MA = +\frac{(B\ell)^2}{R+r}(v-V)}. \end{cases}$$

- (3) 速さ一定より運動方程式から、

$$v_f = V_f.$$

運動量保存則より^{*10},

$$mv_f + MV_f = mv_0, \quad \therefore v_f = V_f = \frac{m}{\underline{M+m}}v_0.$$

- (4) 力学系と回路全体のエネルギー収支を考えて、

$$\underbrace{\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2}_{\Delta K_{\text{total}}} + J = 0, \quad \therefore J = \frac{1}{2}\frac{Mm}{\underline{M+m}}v_0^2.$$

^{*10} 運動方程式より内力のみの系であることは明らかで、導体棒の対からなる系の運動量が保存する。

9. 磁場中を動く導体棒③

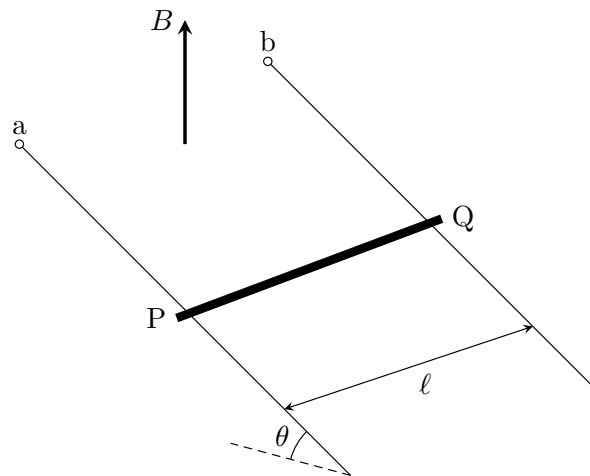
図のように，2本の抵抗の無視できるレールを，水平面に対して角 θ をなす斜面上に間隔 ℓ で平行に固定した．レールの一端には，端子 a, b が取り付けられており，レールと平行に斜面下向きに x 軸を定める．この空間に，大きさ B ，鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた．レール上には質量 m の抵抗の無視できる導体棒が渡されており，導体棒とレールとの接点を P, Q とする．時刻 $t = 0$ に導体棒を初速度 0 で放し，時刻 t における導体棒の位置を x ，速度を v ，加速度を a とする．導体棒は，2本のレールと常に接触し， x 軸と垂直なまま摩擦なく運動できるようになっている．重力加速度の大きさを g とし，起電力および電流の正の向きを，図の $P \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow Q \rightarrow P$ の向きとする．

I a - b 間に抵抗値 R の抵抗を接続した場合を考える．

- (1) 時刻 t において回路に流れる電流 I を， v を含む式で求めよ．
- (2) 導体棒のレールに平行な成分の運動方程式を立式せよ．
- (3) 十分時間が経過すると導体棒の速度は一定となる．このときの v_f を求めよ．
- (4) 十分時間が経過した後の系のエネルギー収支について論ぜよ．

II a - b 間に容量 C のコンデンサを接続した場合を考える． $t = 0$ において，コンデンサは帯電していなかったものとする．

- (1) 時刻 t において回路に流れる電流 I を， a を含む式で求めよ．
- (2) 導体棒の加速度 a を求めよ．
- (3) 十分時間が経過した後の系のエネルギー収支について論ぜよ．



【解答】

I (1) キルヒホッフ則より,

$$vBl \cos \theta - RI = 0, \quad \therefore I = \frac{Bl \cos \theta}{R} v.$$

(2) 運動方程式は,

$$ma = mg \sin \theta - \frac{(Bl \cos \theta)^2}{R} v.$$

(3) 速さ一定より運動方程式から,

$$v_f = \frac{Rmg \sin \theta}{(Bl \cos \theta)^2}.$$

(4) 重力が棒にする仕事が、磁場を介して、回路で生じるジュール熱へと変換されている。

II (1) キルヒホッフ則より,

$$vBl \cos \theta - \frac{Q}{C} = 0, \quad \therefore I = \frac{dQ}{dt} = CBa l \cos \theta.$$

(2) 運動方程式より,

$$ma = mg \sin \theta - aC(Bl \cos \theta)^2, \quad \therefore a = \frac{mg \sin \theta}{m + C(Bl \cos \theta)^2}.$$

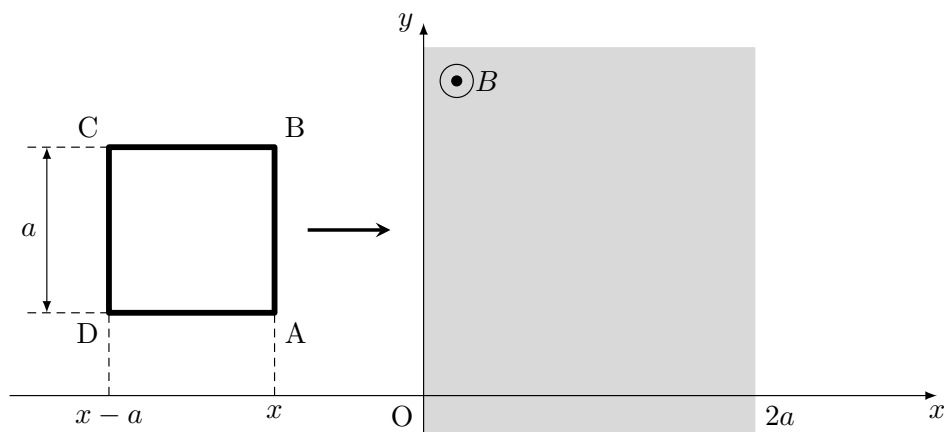
(3) 重力が棒にする仕事の一部が運動エネルギーの変化に、残りの部分が磁場を介してコンデンサに静電エネルギーとして蓄えられている。

【おまけ】 コイル（自己インダクタンス L ）をつないだ場合、導体棒の運動がどうなるか考えてみよ。

10. 磁場中を動く導体棒④

図のように、水平面を xy 平面をとし、原点を O とする直線直交座標をとる．この空間の $0 \leq x \leq 2a$ の領域に、大きさ B 、鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた．各辺の抵抗値が R の正方形コイルに外力を加え一定の速さ v で x 軸正の向きに運動させる．コイルの一部が $x = 0$ を通過し始めた瞬間を時刻 $t = 0$ とし、時刻 t における頂点 A の位置を x とする．電流の正の向きを、図の反時計回りとする．

- (1) 回路に流れる電流の時間変化をグラフにせよ．
- (2) コイルが磁場から受ける力の時間変化をグラフにせよ．
- (3) 誘導起電力の仕事率 P_E 、およびアンペール力の仕事率 P_I を、それぞれ時刻 t で場合分けをして求めよ．
- (4) 回路全体の消費電力 P_R と外力の仕事率 P_F の満たす関係式を立て、エネルギー収支について論ぜよ．
- (5) 回路が磁場のある領域を通過するまでに回路で生じたジュール熱 J を求めよ．



【解答】

(1) キルヒホッフ則より (図略),

$$I = \begin{cases} -\frac{vBa}{4R} & (0 \leq t \leq a/v), \\ 0 & (a/v \leq t \leq 2a/v), \\ \frac{vBa}{4R} & (2a/v \leq t \leq 3a/v), \\ 0 & (3a/v \leq t). \end{cases}$$

(2) 公式より (図略),

$$F = \begin{cases} -\frac{vB^2a^2}{4R} & (0 \leq t \leq a/v), \\ 0 & (a/v \leq t \leq 2a/v), \\ -\frac{vB^2a^2}{4R} & (2a/v \leq t \leq 3a/v), \\ 0 & (3a/v \leq t). \end{cases}$$

(3) それぞれ公式より,

$$P_F = |F|v \cos \pi = \begin{cases} \frac{(vBa)^2}{4R} & (0 \leq t \leq a/v), \\ 0 & (a/v \leq t \leq 2a/v), \\ \frac{(vBa)^2}{4R} & (2a/v \leq t \leq 3a/v), \\ 0 & (3a/v \leq t). \end{cases}$$

$$P_R = 4RI^2 = \begin{cases} \frac{(vBa)^2}{4R} & (0 \leq t \leq a/v), \\ 0 & (a/v \leq t \leq 2a/v), \\ \frac{(vBa)^2}{4R} & (2a/v \leq t \leq 3a/v), \\ 0 & (3a/v \leq t). \end{cases}$$

(4) 外力がコイルにする仕事が、磁場を介し、回路で生じるジュール熱に変換される^{*11}. よって,

$$P_F = P_R.$$

(5) 系全体のエネルギー収支を考えて,

$$J = \frac{vB^2a^3}{2R}.$$

*11 回路において誘導起電力のする仕事と、力学系においてアンペール力のする仕事が全体で見たときに相殺する.

11. 磁場中を動く導体棒⑤（少し凝った入試問題、やりたい人だけ）

図1に示すように、水平面を xy 平面、鉛直上方を z の正の向きとし、原点を O とする直交座標系をとる。この空間に鉛直上向きに磁束密度の大きさ B の一様な磁場がかかっている。 xy 平面上の $x \geq 0$ の領域に2本の導線 W_1, W_2 があり、導線 W_1 は x 軸上に固定され、原点 O で接地されており、導線 W_2 は、 y 軸上の点 P_1 を端点として曲線 $y = f(x)$ 上に固定されている（どの x に対しても $f(x) > 0$ とする）。金属棒 M を2本の導線 W_1, W_2 に常に接触させながら、 y 軸と平行を保ち、 x 軸正の向きへ一定の速さ v で移動させる。金属棒 M は導線 W_1, W_2 の上を摩擦なく移動でき、金属棒 M と2本の導線の電気抵抗は無視できるものとする。はじめコンデンサーは帯電していなく、金属棒 M は時刻 $t = 0$ で y 軸上にあったものとして、以下の問いに答えよ。

金属棒 M の内部で電子（電荷 $-e$ ）にはたらく力を考え、誘導起電力を求めよう。

- (1) 金属棒 M を動かすことにより、金属棒内部の電子にはローレンツ力がはたらく。時刻 t （ただし $t > 0$ ）におけるその向きを述べ、大きさを、 e, v, B, t 、および関数 f のうち必要なものを用いて表せ。
- (2) 金属棒 M を動かすと、金属棒内の電子はローレンツ力により移動を始めるが、金属棒内部で生じた電場からの力が現れ、移動を終える。電子の移動が終わったときに生じる電場の向きを述べ、大きさを、 e, v, B, t 、および関数 f のうち必要なものを用いて表せ。
- (3) 時刻 t （ただし $t > 0$ ）での図1の点 P_1 の電位を、 e, v, B, t 、および関数 f のうち必要なものを用いて表せ。

次に、図2に示すように、 P_1 と O の間に、電気抵抗の無視できる導線を用いて、電源（内部抵抗を無視できる直流電源）と電気容量 C を持つコンデンサーを接続し、導線 W_2 が $y = a \sin(kx) + b$ の曲線上に固定されている場合を考える。ただし、 a, b, k は正の定数で $b > a$ である。金属棒 M を y 軸と平行に保ちながら一定の速さ v で x 軸の正の向きに動かすと、コンデンサーにかかる電圧は時間とともに周期的に変動する。電源の電圧値を調節したところ、図2の点 P_2 の電位が V_0 の時にコンデンサーにかかる電圧は0を中心として周期的に変動するようになった。以下では、電源の電圧値をこのようにとり、金属棒 M を一定の速さ v で x 軸の正の向きに動かす場合を考える。回路を流れる電流の作る磁場の影響は無視でき、金属棒 M が $t = 0$ で y 軸上にあったとして、以下の問いに答えよ。

- (1) コンデンサーにかかる電圧の瞬間値（瞬時値）は各瞬間での誘導起電力と電源による電圧の和になるとして、電源の電圧値 V_0 、およびコンデンサーにかかる周期的に変動する電圧の周期 T を、 e, v, B, t, a, b, k, C のうち必要なものを用いて表せ。

- (2) 時刻 t (ただし $t > 0$) においてコンデンサーに流れる電流 $I(t)$ を求め, e, v, B, t, a, b, k, C のうち必要なものを用いて表せ. ただし, 電流の向きはコンデンサーを $P_1 \rightarrow P_2$ の向きに流れる向きを正の向きとせよ.
- (3) 金属棒 M を一定の速さ v で動かすため, 時刻 t (ただし $t > 0$) において金属棒に加える力を求め, e, v, B, t, a, b, k, C のうち必要なものを用いて表せ.
- (4) 電源の電圧値を 0 とした場合を考える. 導体棒に適当な外力を加え, 位置 $x = \frac{\pi}{2k}$ で速度 v_0 となったところで手を放し, 自由にさせた. 導体棒が $x = \frac{\pi}{k}$ の位置に達したときの速さ v_1 を求めよ.

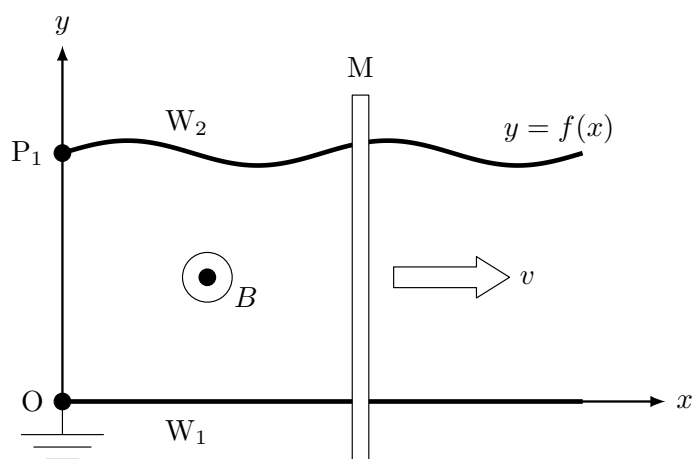


図 1

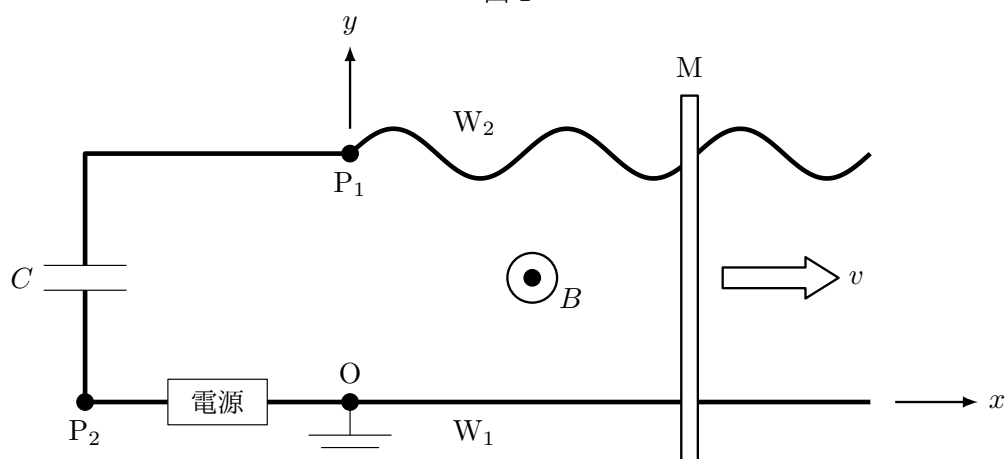


図 2

【メモ】

2014 年筑波大より，一部設問の削除・追加を行った．回路の一部が運動するタイプの電磁誘導．

【解答】

- (1) 公式より， y 軸正の向き に，

$$f = e\underline{vB}.$$

- (2) 電荷分布は， y 軸正の側が負，逆側が正となる．よって，電場の向きは y 軸正の方向 である． y 軸方向の力のつりあいより，

$$0 = e\underline{vB} - eE, \quad \therefore E = \underline{vB}.$$

- (3) 電場と電位の関係より，

$$V = -E\underline{f(x)} = -\underline{vBf(x)}.$$

- (4) キルヒホッフの法則より，

$$0 = V_0 - \frac{Q}{C} + vB(a \sin(kx) + b), \quad \therefore \frac{Q}{C} = V_0 + vBa \sin(kx) + vBb.$$

これが，振動中心 0 で振動すればよいので，

$$V_0 = \underline{-vBb}.$$

また，このとき振動周期は $x = vt$ より，

$$T = \frac{2\pi}{\underline{kv}}.$$

- (5) 前問の結果を利用して，

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}(CvBa \sin(kvt)) = \underline{-Cv^2Bak \cos(kvt)}.$$

- (6) 導体棒にはたらくアンペール力は，時刻 t の関数として，

$$F(t) = IM_y = -Cv^2B^2ak \cos(kvt) \{a \sin(kvt) + b\}$$

と書ける．これとつりあうように外力を加えればよいので，

$$0 = F_{\text{ex}}(t) + F(t), \quad \therefore F_{\text{ex}} = \underline{Cv^2B^2ak \cos(kvt) \{a \sin(kvt) + b\}}.$$

(7) 系のエネルギー保存則を考えて^{*12},

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}C(v_0Bb)^2 &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}C\{v_0B(a+b)\}^2 \\ \therefore v_1 &= \underbrace{v_0\sqrt{\frac{m+CB^2(a+b)^2}{m+CB^2b^2}}}\end{aligned}$$

^{*12} 時間追跡できないのでエネルギー保存（収支）一択.

12. 磁場中を動く導体棒⑥（少し凝った入試問題、やりたい人だけ）

図のように、下向きの磁束密度の大きさが B の一様磁場を考える．この磁場中に、半径 a の円形レール二つを十分離して、磁場に対し垂直に固定する．それぞれの円形レールの上に、図のように金属棒をのせる．金属棒は円形レールと A, A' で接しており、円形レールの中心 O, O' のまわりを、自由に回転できるものとする．ここで、円形レールと導体棒の摩擦は無視する．電線を使い、図のような電気回路を作る． S はスイッチ、 r と R は抵抗値が r と R の電気抵抗を意味する．また、電気抵抗 R の両端を C, D と呼ぶことにする．

右側の金属棒に外力を加え続け、図で示される方向に一定の角速度 ω で、常に回し続けるものとする．円形レール、金属棒、電線の電気抵抗は無視するものとして以下の問いに答えよ．

I はじめに、スイッチ S を開いておく．

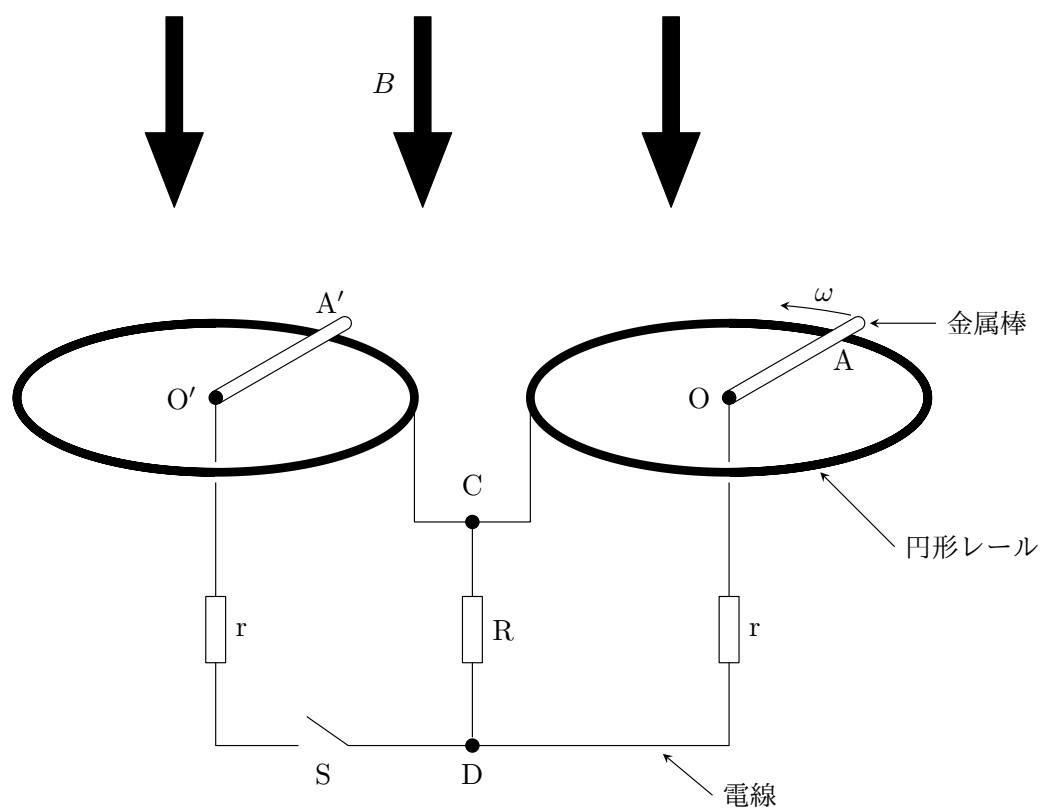
- (1) OA 間に発生する誘導起電力の大きさを求めよ．
- (2) 抵抗 R に流れる電流の大きさを求めよ．また、その方向は「 $C \rightarrow D$ 」, 「 $D \rightarrow C$ 」のいずれかであるか答えよ．

II 次に、左側の金属棒を動かないように固定し、スイッチ S を閉じる．

- (1) $O'A'$ 間を流れる電流の大きさを求めよ．また、その方向は「 $O' \rightarrow A'$ 」, 「 $A' \rightarrow O'$ 」のいずれかであるか答えよ．
- (2) $O'A'$ 間に発生する金属棒を回そうとする力の方向は、右側の金属棒の回転の方向と「同方向」, 「逆方向」のいずれであるか答えよ．

III 次に、左側の金属棒を自由にしたところ、一定の角速度 ω' で回転するようになった．

- (1) $O'A'$ 間を流れる電流の大きさを求めよ．
- (2) $O'A'$ 間に発生する誘導起電力の大きさを、 ω, a, B を用いて表せ．また、この起電力によってつくられた電位は、 O', A' のどちらが高いか答えよ．
- (3) ω' を ω, r, R を用いて表せ．
- (4) r を固定し、 R を変化させることを考える．このとき、 R の値が 0 の極限および無限大の極限で、 ω' の値がどうなるか理由とともに簡単に述べよ．
- (5) 左側の導体棒が運動をはじめてから一定角速度になる間の左側の導体棒の運動エネルギー変化量を ΔK 、この間の回路で生じたジュール熱を J 、外力がした仕事を W とする． $\Delta K, J, W$ の間に成り立つ関係式を求めよ．



【メモ】

2008年筑波大より，一部設問の削除・追加を行った．回路の一部が運動するタイプの電磁誘導．回路の一部が運動する問題は，コンデンサでの議論と同じアプローチ．導体棒が動くタイプの電磁誘導は $vB\ell$ の公式で対処する．

【解答】

I (1) OA 間に生じる起電力は，公式より，

$$V = \frac{1}{2}a^2\omega B.$$

(2) キルヒホッフの法則より，

$$\frac{1}{2}a^2\omega B - rI - RI = 0, \quad I = \frac{a^2\omega B}{2(R+r)} \quad (D \rightarrow C).$$

II (1) OA 間に生じる起電力は，I(1) と同じである．キルヒホッフの法則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a^2\omega B - rI - R(I - I_1) = 0, \\ rI_1 - R(I - I_1) = 0, \end{cases} \\ \therefore I_1 = \frac{a^2\omega BR}{2r(2R+r)} \quad (O' \rightarrow A'), \quad I = \frac{a^2\omega BR}{2(2R+r)} \left(1 + \frac{R}{r}\right).$$

(2) 同方向.

III (1) 角速度一定より，導体棒にはたらく力のモーメントの合計は 0 である．導体棒に寄与する力はアンペール力のみゆえ， $I_1 = 0$ ^{*13}．

(2) OA 間，O'A' 間に生じる起電力はそれぞれ，

$$V_{AO} = \frac{1}{2}a^2\omega B, \quad V_{A'O'} = \frac{1}{2}a^2\omega' B.$$

キルヒホッフの法則より，

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a^2\omega B - rI - R(I - 0) = 0, \\ \frac{1}{2}a^2\omega' B + r \cdot 0 - R(I - 0) = 0, \end{cases} \quad \therefore I = \frac{a^2\omega B}{2(R+r)}, \quad \omega' = \frac{R}{R+r}\omega.$$

よって，O'A' 間に発生する誘導起電力の大きさは，キルヒホッフの法則より，

$$V_{A'O'} = RI = \frac{a^2\omega BR}{2(R+r)} \quad (\text{電位は } O' \text{ が高い}).$$

^{*13} 補足 1 の (3) 式を参照するとよい．

(3) (2) より,

$$\omega' = \frac{R}{\underbrace{R+r}}\omega.$$

(4) (3) より, それぞれ極限を取れば,

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow 0} \omega' &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{R}{R+r}\omega = \underline{0}, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \omega' &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1+r/R}\omega = \underline{\omega}.\end{aligned}$$

(5) 系のエネルギー収支は,

$$\underline{\Delta K + J = W}.$$

13. 自己誘導・相互誘導

図のように、両端が端子 A, B のソレノイドコイル 1 (断面積 S , 長さ ℓ , 巻き数 N_1) の外側に接するように両端が端子 C, D のソレノイドコイル 2 (断面積 S , 巻き数 N_2) を巻く. コイル 1 に, 端子 A $\rightarrow$ コイル $\rightarrow$ 端子 B の向きに時間変化する電流 I を流す. コイル 1 の中は空であり, 真空中にあるものとする. 真空の透磁率を μ_0 とする.

I コイル 1 の自己インダクタンス L を求めよ.

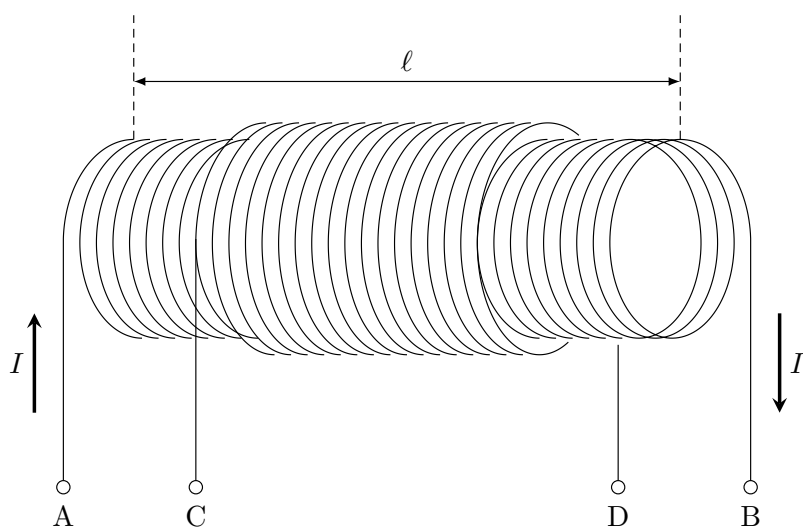
II コイル 1 とコイル 2 の相互インダクタンス M を求めよ.

III $I = kt$ (k は定数) の場合を考える.

- (1) コイル 1 の端子 B に対する端子 A の電位 V_{BA} を求めよ.
- (2) コイル 2 の端子 D に対する端子 C の電位 V_{DC} を求めよ.

IV $I = I_0 \cos(\omega t)$ (ω は正の定数) の場合を考える.

- (1) コイル 1 の端子 A に対する端子 B の電位 V_{AB} を求めよ.
- (2) コイル 2 の端子 C に対する端子 D の電位 V_{CD} を求めよ.



【メモ】

授業では、数値問題を扱った。

【解答】

I コイル1内部の磁束密度は公式より、

$$B = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} I.$$

コイル1に生じる誘導起電力はファラデー則より、A→コイル→Bを正として、

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d}{dt}(BS) = -\mu_0 \frac{SN_1^2}{\ell} \frac{dI}{dt}.$$

よって、自己インダクタンスは、

$$L = \underbrace{\mu_0 \frac{SN_1^2}{\ell}}.$$

II コイル2に生じる誘導起電力はファラデー則より、C→コイル→Dを正として、

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d}{dt}(BS) = -\mu_0 \frac{SN_1 N_2}{\ell} \frac{dI}{dt}.$$

よって、相互インダクタンスは、

$$M = \underbrace{\mu_0 \frac{SN_1 N_2}{\ell}}.$$

III (1) コイル1に生じる誘導起電力はファラデー則より、A→コイル→Bを正として、

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d}{dt}(BS) = -\mu_0 \frac{SN_1^2}{\ell} \frac{dI}{dt} = -\mu_0 \frac{kSN_1^2}{\ell}.$$

よって、

$$V_{BA} = -\mathcal{E}_1 = \underbrace{\mu_0 \frac{kSN_1^2}{\ell}}.$$

(2) コイル2に生じる誘導起電力はファラデー則より、C→コイル→Dを正として、

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d}{dt}(BS) = -\mu_0 \frac{SN_1 N_2}{\ell} \frac{dI}{dt} = -\mu_0 \frac{kSN_1 N_2}{\ell}.$$

よって、

$$V_{DC} = -\mathcal{E}_2 = \underbrace{\mu_0 \frac{kSN_1 N_2}{\ell}}.$$

IV (1) コイル1に生じる誘導起電力はファラデー則より, $A \rightarrow \text{コイル} \rightarrow B$ を正として,

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d}{dt}(BS) = -\mu_0 \frac{SN_1^2}{\ell} \frac{dI}{dt} = \mu_0 \frac{SN_1^2}{\ell} I_0 \omega \sin(\omega t).$$

よって,

$$V_{AB} = +\mathcal{E}_1 = \underbrace{\mu_0 \frac{SN_1^2}{\ell} I_0 \omega \sin(\omega t)}.$$

(2) コイル2に生じる誘導起電力はファラデー則より, $C \rightarrow \text{コイル} \rightarrow D$ を正として,

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d}{dt}(BS) = -\mu_0 \frac{SN_1 N_2}{\ell} \frac{dI}{dt} = \mu_0 \frac{SN_1 N_2}{\ell} I_0 \omega \sin(\omega t).$$

よって,

$$V_{CD} = +\mathcal{E}_2 = \underbrace{\mu_0 \frac{SN_1 N_2}{\ell} I_0 \omega \sin(\omega t)}.$$

14. 時間変化する磁場

図1のような、コの字型導線の両端の端子 a, b には適当な素子を接続できるようになっている。素子を接続した後の閉回路の面積を S とする。空間内に、コの字型導線のある平面と垂直な方向に、時間変化する磁束密度 $B(t)$ をかけた。電流の正の向きを、 $b \rightarrow a$ とする。以下の設問に答えよ。

I 磁束密度 $B(t)$ の時間変化が、図2のグラフで与えられる場合を考える。

- (1) a - b 間に抵抗値 R の抵抗を接続したとき、回路に流れる電流の時間変化をグラフにせよ。
- (2) a - b 間に容量 C の帯電していないコンデンサを接続したとき、コンデンサに蓄えられる電荷の時間変化をグラフにせよ。
- (3) a - b 間に自己インダクタンス L のコイルを接続したとき、回路に流れる電流の時間変化をグラフにせよ。

II 磁束密度 $B(t)$ の時間変化が、図3のグラフで与えられる場合を考える。

- (1) a - b 間に抵抗値 R の抵抗を接続したとき、回路に流れる電流の時間変化をグラフにせよ。
- (2) a - b 間に容量 C の帯電していないコンデンサを接続したとき、コンデンサに蓄えられる電荷の時間変化、および回路に流れる電流の時間変化をグラフにせよ。
- (3) a - b 間に自己インダクタンス L のコイルを接続したとき、回路に流れる電流の時間変化をグラフにせよ。

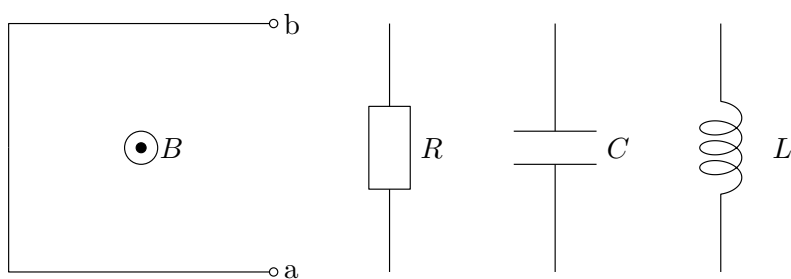


図 1

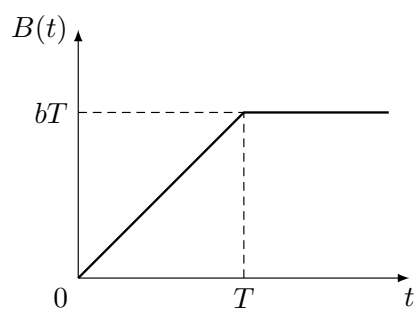


図 2

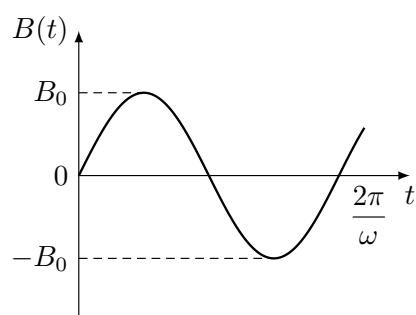


図 3

【メモ】

時間変化する磁場はファラデー則一択.

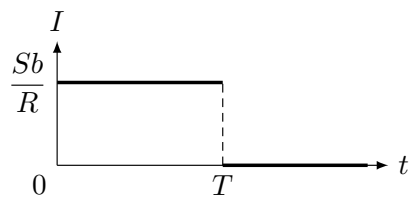
【解答】

I 磁束の正の向きを磁束密度の向きに定める．生じる誘導起電力はファラデー則より，

$$\mathcal{E} = \begin{cases} -Sb & (0 \leq t \leq T), \\ 0 & (T \leq t). \end{cases}$$

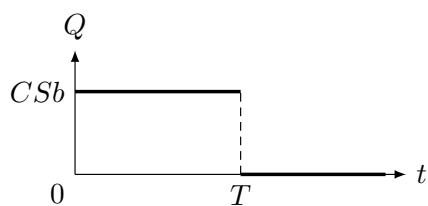
(1) キルヒホッフ則より，

$$-\mathcal{E} - RI = 0, \quad \therefore I = \begin{cases} \frac{Sb}{R} & (0 \leq t \leq T), \\ 0 & (T \leq t). \end{cases}$$



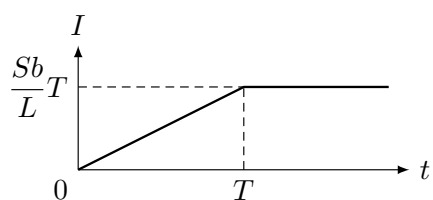
(2) キルヒホッフ則より，

$$-\mathcal{E} - \frac{Q}{C} = 0, \quad \therefore Q = \begin{cases} CSb & (0 \leq t \leq T), \\ 0 & (T \leq t). \end{cases}$$



(3) キルヒホッフ則より，

$$-\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = 0, \quad \therefore I = \begin{cases} \frac{Sb}{L}t & (0 \leq t \leq T), \\ \frac{Sb}{L}T & (T \leq t). \end{cases}$$

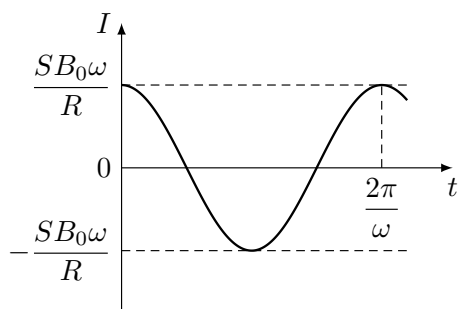


II 生じる誘導起電力はファラデー則より,

$$\mathcal{E} = -SB_0\omega \cos(\omega t).$$

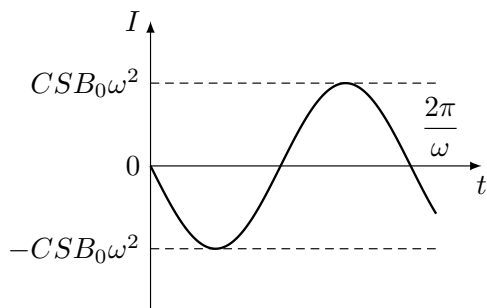
(1) キルヒホッフ則より,

$$-\mathcal{E} - RI = 0, \quad \therefore I = \frac{SB_0\omega}{R} \cos(\omega t).$$



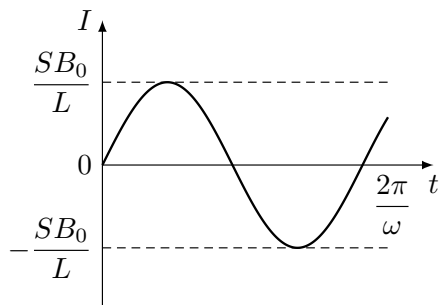
(2) キルヒホッフ則より,

$$-\mathcal{E} - \frac{Q}{C} = 0, \quad \therefore I = \frac{dQ}{dt} = -CSB_0\omega^2 \sin(\omega t).$$



(3) キルヒホッフ則より,

$$-\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = 0, \quad \therefore I = \frac{SB_0}{L} \sin(\omega t).$$



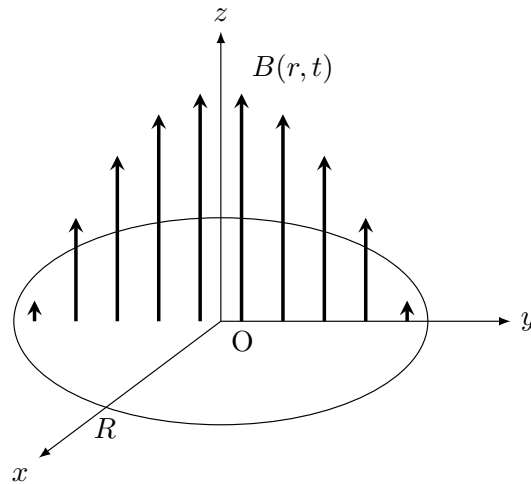
15. ベータトロン（時間変化する磁場）

図のように， x ， y ， z を軸とする直線直交座標をとる．この空間に， z 軸正の向きに，磁束密度の大きさ B_0 の磁場をかけた． $t = 0$ において，電子（質量 m ，電荷 $-e < 0$ ）は xy 平面内で原点 O を中心とした半径 R の円周上を運動している．時刻 $t > 0$ において，磁束密度を適当に時間変化させることで，軌道半径を一定に保ったまま電子を加速させることができる．磁束の正の向き^{*14}を z 軸正の向きに定める．

- (1) 時刻 $t = 0$ において，電子の運動量の大きさ p を求めよ．

以下， $t > 0$ を考える．時間 Δt 間に，半径 R の軌道内部を貫く磁束を $\Delta\Phi$ だけ変化させた．このとき，軌道上の磁束密度は ΔB だけ増加した．

- (1) 円軌道上に生じる誘導起電力 $\mathcal{E}$ を求めよ．
 (2) Δt 間に半径 R の円周上に生じる誘導電場 E の大きさと向きをそれぞれ求めよ．
 (3) 運動方程式の接線成分を考えることで，電子の運動量変化 Δp を， $\Delta\Phi$ に比例する形で求めよ．
 (4) 運動方程式の中心成分を考えることで，電子の運動量変化 Δp を， ΔB に比例する形で求めよ．
 (5) ΔB を， R ， $\Delta\Phi$ を用いて表せ．



^{*14} 磁束を定義するときの法線ベクトルの正の向き．

【メモ】

ファラデー則から計算した誘導起電力から誘導電場を逆算する。ベータトロンは入試の前には一度は触っておきたいテーマ。分類としては、電磁誘導が関係する非等速円運動である^{*15}。

【解答】

- (1) 運動方程式（中心成分）より、

$$m \frac{v^2}{R} = evB, \quad \therefore v = \frac{eBR}{m}.$$

回転方向は z 軸正の向きから見て反時計回り。

- (2) ファラデー則より、

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

- (3) 電場と電位の関係より、

$$E \cdot 2\pi R = |\mathcal{E}|, \quad \therefore E = \frac{1}{2\pi R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

向きは z 軸正の向きから見て時計回り。

- (4) 運動方程式（接線成分）より、

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = eE = \frac{e}{2\pi R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad \therefore \Delta p = \frac{e}{2\pi R} \Delta\Phi.$$

- (5) 運動方程式（中心成分）より、

$$\frac{1}{m} \frac{(p + \Delta p)^2}{R} = \frac{1}{m} e(p + \Delta p)(B + \Delta B), \quad \therefore \Delta p = \frac{eR\Delta B}{2}.$$

- (6) 運動方程式より、

$$\Delta B = \frac{1}{2\pi R^2} \Delta\Phi.$$

^{*15} 非等速円運動ゆえ、運動方程式の中心成分、接線成分（力学的エネルギー保存則と同値）を立てる。

§4.3 電気回路②

この章では、コイルを含む電気回路・交流回路を扱う。異種素子が2つ以上直列となっている交流回路のみ解法が例外的になることだけ注意。

■簡単なまとめ

- 電気回路状態決定,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{回路素子の性質} \end{array} \right.$$

ただし、交流回路でかつ異種素子が2つ以上直列となっているときは例外的に、キルヒホッフ則を素直に解くことで電流 I を求めるのではなく、解を $I = I_0 \sin(\omega t + \theta)$ のように仮定し、キルヒホッフ則へ代入することで I_0 , θ を求めるようにして I を求める。

- コイルの性質:

$$\text{電位降下} \rightarrow V = L \frac{dI}{dt}$$

$$\text{エネルギー} \rightarrow \text{エネルギー } U = \frac{1}{2} LI^2 \text{ を蓄える.}$$

$$\text{素子の性質} \rightarrow \text{スイッチの切り替え前後で電流の値が同じ値を取る (電流の連続性). 「十分時間経過」で } I = (\text{一定}), \text{ コイルの電位差 } L \frac{dI}{dt} = 0.$$

1. コイルを含む回路①

図のように、電源（起電力 E ，内部抵抗無視），抵抗 1（抵抗値 R ），抵抗 2（抵抗値 $2R$ ），コイル（自己インダクタンス L ），スイッチ S_1 ，スイッチ S_2 を組み合わせた回路を考える．はじめスイッチはすべて開いている．

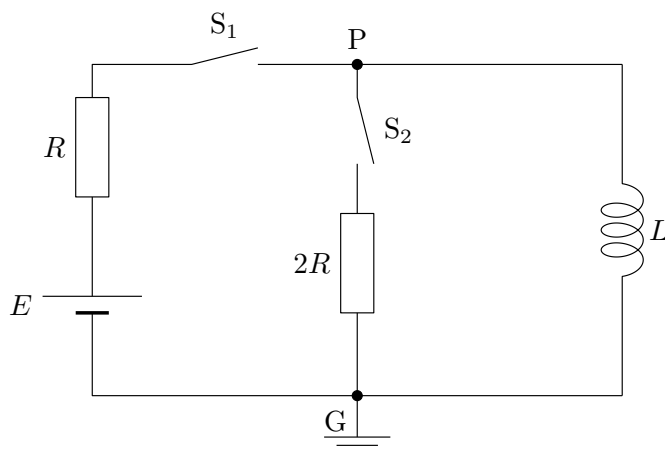
I S_1 のみを閉じた．

- (1) 閉じた直後，回路に流れる電流の大きさ I_1 を求めよ．
- (2) 閉じてから十分時間が経過した後，回路に流れる電流の大きさ I_2 を求めよ．
- (3) 閉じた時刻を $t = 0$ とする．時刻 t において回路を流れる電流の大きさ I を時刻 t の関数として求めよ．

II S_1 を閉じてから十分時間が経過した後， S_2 を閉じた．

- (1) 閉じた直後の P の電位を求めよ．
- (2) 閉じてから十分時間が経過した後の P の電位を求めよ．

III II に続いて S_1 を開いた．閉じてから十分時間が経過した後，抵抗 2 で生じたジュール熱 J を求めよ．



【メモ】

コイルの性質は，電位降下が $L \frac{dI}{dt}$ ，エネルギーは $\frac{1}{2}LI^2$ 蓄え，電流の連続性，十分時間経過で電位降下 0 の 4 つを暗記する．

【解答】

I キルヒホッフ則より，

$$E - RI - L \frac{dI}{dt} = 0.$$

(1) コイルの性質（電流の連続性）より，

$$I_1 = 0.$$

(2) コイルの性質より，十分時間経過後は $L \frac{dI}{dt} = 0$ である．キルヒホッフ則より，

$$I_2 = \frac{E}{R}.$$

(3) キルヒホッフ則より，

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} \left(I - \frac{E}{R} \right).$$

この微分方程式の解は指数関数であり，初期条件 $I = 0$ を考慮すれば，

$$I = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

II キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} E - R(I + i) - L \frac{dI}{dt} = 0, \\ E - R(I + i) - 2Ri = 0. \end{cases}$$

(1) コイルの性質（電流の連続性）より $I = \frac{E}{R}$ である．キルヒホッフ則より，

$$i = 0, \quad L \frac{dI}{dt} = 0.$$

よって，P の電位は，

$$\phi_P = +L \frac{dI}{dt} = 0.$$

(2) コイルの性質より，十分時間経過後は $L \frac{dI}{dt} = 0$ である．よって，P の電位は，

$$\phi_P = +L \frac{dI}{dt} = 0.$$

III II の十分時間経過時，コイルの性質から $L \frac{dI}{dt} = 0$ ゆえキルヒホッフ則より，

$$I = \frac{E}{R}, \quad i = 0.$$

系のエネルギー収支を考えて，

$$\Delta U_L + J = 0, \quad \therefore J = -\Delta U_L = \underbrace{\frac{1}{2}L \left(\frac{E}{R} \right)^2}.$$

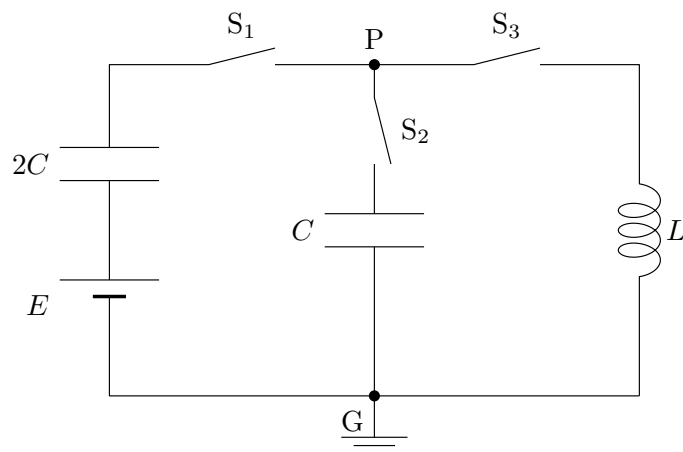
2. コイルを含む回路②

図のように，電源（起電力 E ，内部抵抗無視），コンデンサ 1（容量 $2C$ ），コンデンサ 2（容量 C ），コイル（自己インダクタンス L ），スイッチ S_1 ， S_2 ， S_3 を組み合わせた回路を考える．はじめスイッチはすべて開いており，すべてのコンデンサは帯電していない．

I S_1 ， S_2 を閉じた．閉じてから十分時間が経過した後，コンデンサ 1 に蓄えられている電気量 Q_1 を求めよ．

II S_1 ， S_2 を閉じてから十分時間が経過した後， S_1 を開き S_3 を閉じた．このとき，回路には振動する電流が流れた．

- (1) 振動の周期 T を求めよ．
- (2) コンデンサに蓄えられる電荷 Q を，時刻 t の関数として表せ．
- (3) $Q = \frac{1}{4}Q_1$ のとき，コイルに流れる電流の大きさ I を求めよ．



【解答】

I キルヒホッフ則・電荷保存則より,

$$\begin{cases} E - \frac{Q_1}{C} - \frac{Q_2}{2C} = 0, \\ -Q_1 + Q_2 = 0, \end{cases} \quad Q_1 = Q_2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}CE}}.$$

II (1) キルヒホッフ則より,

$$\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0.$$

ここで, $I = \frac{dQ}{dt}$ より,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q.$$

よって, 振動の周期 T は,

$$T = \underline{\underline{2\pi\sqrt{LC}}}.$$

(2) 初期条件 $Q(0) = \frac{2}{3}CE$, $I(0) = 0$ より,

$$Q = \underline{\underline{\frac{2}{3}CE \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)}}.$$

(3) エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2C} \left(\frac{1}{6}CE \right)^2 + \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2C} \left(\frac{2}{3}CE \right)^2 + 0, \quad \therefore I = \underline{\underline{\sqrt{\frac{5}{12} \frac{C}{L}} E}}.$$

3. 交流回路

交流電源（電源電圧 $V_0 \sin(\omega t)$ ）に素子を繋いだとき，電源を流れる電流 I について以下の各場合で求めよ．なお，必要な文字は各自適当に導入せよ．

I 素子を1つだけ繋ぐ．

- (1) 抵抗（抵抗値 R ）
- (2) コンデンサ（容量 C ）
- (3) コイル（自己インダクタンス L ）

II 素子を2つ並列につなぐ．

- (1) 抵抗（抵抗値 R ）とコンデンサ（容量 C ）
- (2) 抵抗（抵抗値 R ）とコイル（自己インダクタンス L ）
- (3) コンデンサ（容量 C ）とコイル（自己インダクタンス L ）

III 素子を2つ直列につなぐ．

- (1) 抵抗（抵抗値 R ）とコンデンサ（容量 C ）
- (2) 抵抗（抵抗値 R ）とコイル（自己インダクタンス L ）
- (3) コンデンサ（容量 C ）とコイル（自己インダクタンス L ）

【メモ】

3つの並列，直列は授業内で扱っています．

【解答】

I (1) キルヒホッフ則より，

$$V_0 \sin(\omega t) - RI = 0, \quad \therefore I = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t).$$

(2) キルヒホッフ則より，

$$V_0 \sin(\omega t) - \frac{Q}{C} = 0, \quad \therefore I = \frac{dQ}{dt} = C\omega V_0 \cos(\omega t).$$

(3) キルヒホッフ則より^{*16}，

$$V_0 \sin(\omega t) - L \frac{dI}{dt} = 0, \quad \therefore I = \int \frac{V_0}{L} \sin(\omega t) dt = -\frac{V_0}{L\omega} \cos(\omega t).$$

II (1) キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_0 \sin(\omega t) - RI_R = 0, \\ V_0 \sin(\omega t) - \frac{Q}{C} = 0, \end{cases} \quad \therefore I = I_R + \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t) + C\omega V_0 \cos(\omega t).$$

(2) キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_0 \sin(\omega t) - RI_R = 0, \\ V_0 \sin(\omega t) - L \frac{dI_L}{dt} = 0, \end{cases} \quad \therefore I = I_R + I_L = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t) - \frac{V_0}{L\omega} \cos(\omega t).$$

(3) キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_0 \sin(\omega t) - \frac{Q}{C} = 0, \\ V_0 \sin(\omega t) - L \frac{dI_L}{dt} = 0, \end{cases} \quad \therefore I = \frac{dQ}{dt} + I_L = \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) V_0 \cos(\omega t).$$

III 回路に流れる電流を $I = I_0 \sin(\omega t - \theta)$ と仮定する．

(1) キルヒホッフ則より，

$$\begin{aligned} V_0 \sin(\omega t) &= RI_0 \sin(\omega t - \theta) + \frac{1}{C} \left(-\frac{I_0}{\omega} \cos(\omega t - \theta) \right) \\ &= I_0 \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} \right)^2} \sin(\omega t - \theta - \alpha). \end{aligned}$$

^{*16} 積分定数は0である（詳細は授業内で）．

ここで, $\tan \alpha = \frac{1}{\omega RC}$ である. 任意の時刻 t で上記等式が成立すればよく,

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}, \quad \theta = -\alpha.$$

よって,

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin(\omega t + \alpha), \quad \tan \alpha = \frac{1}{\omega RC}.$$

(2) キルヒホッフ則より,

$$\begin{aligned} V_0 \sin(\omega t) &= RI_0 \sin(\omega t - \theta) + L\omega I_0 \cos(\omega t - \theta) \\ &= I_0 \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \sin(\omega t - \theta + \beta). \end{aligned}$$

ここで, $\tan \beta = \frac{L\omega}{R}$ である. 任意の時刻 t で上記等式が成立すればよく,

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}, \quad \theta = \beta.$$

よって,

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \beta), \quad \tan \beta = \frac{L\omega}{R}.$$

(3) キルヒホッフ則より,

$$\begin{aligned} V_0 \sin(\omega t) &= \frac{1}{C} \left(-\frac{I_0}{\omega} \cos(\omega t - \theta) \right) + L\omega I_0 \cos(\omega t - \theta) \\ &= I_0 \left(-\frac{1}{C\omega} + L\omega \right) \sin\left(\omega t - \theta + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

任意の時刻 t で上記等式が成立すればよく,

$$I_0 = \frac{V_0}{-\frac{1}{C\omega} + L\omega}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

よって,

$$I = -\frac{V_0}{-\frac{1}{C\omega} + L\omega} \cos(\omega t).$$

4. 電気回路の総点検

図のように、電源 E_i ($i = 1, 2, 3$)、抵抗 R (電気抵抗 R)、コンデンサ C (電気容量 C)、コイル L (自己インダクタンス L)、スイッチ S_1 、スイッチ S_2 、スイッチ S_3 を導線でつないだ回路について考える。はじめ、スイッチはすべて開いており、 C に電荷は蓄えられていなかった。スイッチおよび導線の抵抗は無視できるものとする。

[A] 電源に、直流電源 E_1 を接続した場合を考える。点 G に対する点 A の電位は E である。

I S_1 を閉じたあと、 S_3 を閉じた。この時刻を $t = 0$ とする。

- (1) S_3 を閉じた直後に、 R を流れる電流の大きさ I_0 を求めよ。
- (2) R を流れる電流の大きさが $\frac{E}{2R}$ のとき、点 G に対する点 P の電位 V_{GP} を求めよ。
- (3) R を流れる電流の大きさ I を、時刻 t の関数として表せ。また、 S_3 を閉じて十分時間が経過したとき、 R を流れる電流の大きさ I_1 を求めよ。

II I に続き、 S_3 を開き、 S_2 を閉じた。この時刻を改めて $t = 0$ とする。

- (1) S_2 を閉じた直後に、 R を流れる電流の大きさ I_2 を求めよ。
- (2) C の帯電量が $\frac{1}{3}CE$ のとき、 R を流れる電流の大きさ I_3 を求めよ。
- (3) C に蓄えられている電荷 Q を、時刻 t の関数として表せ。また、 S_2 を閉じて十分時間が経過したとき、 R を流れる電流の大きさ I_4 、および C に蓄えられている電荷 Q_0 をそれぞれ求めよ。
- (4) S_2 を閉じて十分時間が経過するまでの間に、 R で生じたジュール熱 J_0 を求めよ。

III II に続き、 S_3 を閉じた。この時刻を改めて $t = 0$ とする。

- (1) S_3 を閉じた直後に、 R を流れる電流の大きさ I_5 を求めよ。
- (2) 点 G に対する点 P の電位が $\frac{1}{2}E$ のとき、 R を流れる電流の大きさ I_6 、および C に蓄えられている電荷 Q_1 を求めよ。
- (3) S_2 を閉じて十分時間が経過したとき、 C に蓄えられているエネルギー U_C 、および L に蓄えられているエネルギー U_L をそれぞれ求めよ。

IV 再び II の十分時間が経過した後と同じ状況にした後、 S_1 を開き、 S_3 を閉じた。この時刻を改めて $t = 0$ とする。

- (1) C に蓄えられている電荷 Q を、時刻 t の関数として表せ。
- (2) L を流れる電流が $\frac{E}{2R}$ のとき、 C に蓄えられている電荷 Q_3 の大きさ $|Q_3|$ を求めよ。

[B] 電源に、可変電源 E_2 を接続した場合を考える.

I S_1 を閉じたあと、 S_3 を閉じた. この時刻を $t = 0$ とする. 時刻 $t = 0$ から $t = T$ までの間、点 G に対する点 P の電位が kE ($0 < k < 1$) となるように E_2 の起電力を調整した.

- (1) 時刻 $t = 0$ から $t = T$ における E_2 の起電力 $E(t)$ を、時刻 t の関数として表せ.
- (2) 時刻 $t = 0$ から $t = T$ までの間に、R で発生したジュール熱 J を求めよ.

II [B] I に続き、 S_3 を開き、 S_2 を閉じた. この時刻を改めて $t = 0$ とする. 時刻 $t = 0$ から $t = T$ までの間、R に一定の電流が流れるように E_2 の起電力を調整したところ、C の電圧は E となった.

- (1) 時刻 $t = 0$ から $t = T$ における E_2 の起電力 $E(t)$ を、時刻 t の関数として表せ.
- (2) 時刻 $t = 0$ から $t = T$ までの間に、 E_2 がした仕事 W を求めよ.

[C] 電源に、交流電源 E_3 (電源振幅 V_0 , 角周波数 ω) を接続した場合を考える. 時刻 t において、点 G に対する点 A の電位は $V(t) = V_0 \sin \omega t$ である.

I S_1 を閉じたあと、 S_2 を閉じた場合を考える. このとき、R に流れる電流は定数 I_{RC} , θ_{RC} を用いて、 $I(t) = I_{RC} \sin(\omega t - \theta_{RC})$ となった.

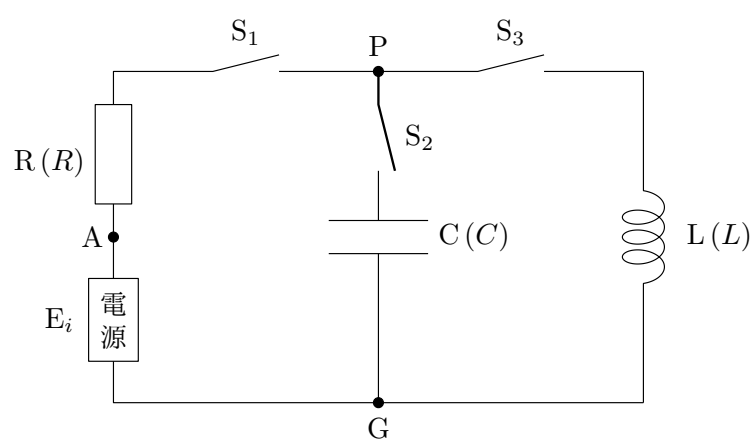
- (1) I_{RC} , $\tan \theta_{RC}$ をそれぞれ求めよ. また、回路のインピーダンス Z_{RC} を求めよ.
- (2) R における平均消費電力 P_R を求めよ.

II S_1 を閉じたあと、 S_3 を閉じた場合を考える. このとき、R に流れる電流は定数 I_{RL} , θ_{RL} を用いて、 $I(t) = I_{RL} \sin(\omega t - \theta_{RL})$ となった.

- (1) I_{RL} , $\tan \theta_{RL}$ をそれぞれ求めよ. また、回路のインピーダンス Z_{RL} を求めよ.

III S_2 , S_3 を閉じたあと、 S_1 を閉じた場合を考える. このとき、L に流れる電流は定数 I_L , θ_L を用いて、 $I_L(t) = I_L \sin(\omega t - \theta_L)$ となった.

- (1) C に流れる電流 $I_C(t)$ を、 I_L , θ_L を含む形で求めよ.
- (2) I_L , θ_L をそれぞれ求めよ.
- (3) 角周波数 ω を調節することで、R に流れる電流が任意の時刻 t で 0 となった. このときの ω を求めよ.



【メモ】

電気回路における基本的な素子（電池，抵抗，コンデンサ，コイル）の扱いについて，様々な起電力の形式で確認．

【解答】

〔A〕 キルヒホッフ則より，

$$E - RI - L \frac{dI}{dt} = 0.$$

今の場合，電荷保存則は不要なため，この式と回路素子の性質をもとに議論していけばよい．

I (1) コイルの性質である電流の連続性から， $I_0 = 0$ ．

(2) キルヒホッフ則に $I = \frac{E}{2R}$ を代入して，

$$E - \frac{1}{2}E - L \frac{dI}{dt} = 0, \quad \therefore V_{GP} = L \frac{dI}{dt} = \frac{1}{2}E.$$

(3) まず，十分時間が経過した後のことを考える．素子の性質から，コイルの電位降下は $L \frac{dI}{dt} = 0$ となる．したがって，キルヒホッフ則より，

$$E - RI - 0 = 0, \quad \therefore I_1 = \frac{E}{R}.$$

続いて，時刻 t における電流 I は，キルヒホッフ則より，

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} \left(I - \frac{E}{R} \right).$$

これは速度に比例した空気抵抗を受ける物体の運動を表す方程式と同じ形の微分方程式となっている．この微分方程式を解いて，

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{R}{L} \left(I - \frac{E}{R} \right) \\ \int \frac{dI}{I - E/R} &= - \int \frac{R}{L} dt \\ I - \frac{E}{R} &= \alpha e^{-\frac{R}{L}t}. \end{aligned}$$

ここで，初期条件 $I(0) = 0$ より， $\alpha = -\frac{E}{R}$ となり，

$$I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

十分時間が経過した時を考えれば,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E}{R}$$

となり, 暗記した素子の性質による結果と一致していることが確認できる.

II キルヒホッフ則より,

$$E - RI - \frac{Q}{C} = 0.$$

(1) S_2 を閉じた直後, コンデンサの帯電量が $Q = 0$ のため, キルヒホッフ則より,

$$E - RI - 0 = 0, \quad \therefore I_2 = \frac{E}{\underline{R}}.$$

(2) キルヒホッフ則に $Q = \frac{1}{3}CE$ を代入して,

$$E - RI - \frac{1}{3}E = 0, \quad \therefore I_3 = \frac{2E}{\underline{3R}}.$$

(3) まず, 十分時間が経過した後のことを考える. 素子の性質から, コンデンサに流れる電流の大きさは $I_4 = 0$ となる. したがって, キルヒホッフ則より,

$$E - 0 - \frac{Q}{C} = 0, \quad \therefore Q_0 = \underline{CE}.$$

続いて, 時刻 t における電荷 Q は, $I = \frac{dQ}{dt}$ を考慮してキルヒホッフ則より,

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -\frac{1}{RC} (Q - CE) \\ \int \frac{dQ}{Q - CE} &= -\int \frac{1}{RC} dt \\ Q - CE &= \alpha e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned}$$

ここで, 初期条件 $Q(0) = 0$ より, $\alpha = -CE$ となり,

$$Q(t) = \underline{CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}.$$

十分時間が経過した時を考えれば,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = CE, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = 0 \end{aligned}$$

となり, 暗記した素子の性質による結果と一致していることが確認できる.

- (4) コンデンサの蓄えるエネルギーを U_C , 抵抗で生じるジュール熱を J , 起電力のした仕事を W とすると, 回路のエネルギー収支は次のようになる.

$$W = \Delta U_C + J.$$

ここで, 電池のした仕事, およびコンデンサの静電エネルギーはそれぞれ公式より,

$$W = \Delta QV = CE^2,$$

$$\Delta U_C = \frac{1}{2} \frac{(CE)^2}{C} - 0 = \frac{1}{2} CE^2,$$

と計算できるので, したがって,

$$J = \frac{1}{2} CE^2.$$

III キルヒホッフ則・電荷保存則より,

$$\begin{cases} E - RI - L \frac{dI_L}{dt} = 0, \\ E - RI - \frac{Q}{C} = 0, \\ I = I_C + I_L. \end{cases}$$

ここで, I_C , I_L はそれぞれ, コンデンサとコイルを流れる電流である.

- (1) コイルの性質である電流の連続性から, $I_5 = 0$.
- (2) キルヒホッフ則に $V_{GP} = L \frac{dI_L}{dt} = \frac{Q}{C} = \frac{1}{2} E$ を代入して,

$$I_6 = \frac{E}{2R}, \quad Q_1 = \frac{1}{2} CE.$$

このときのコンデンサ, およびコイルに流れる電流は, 微分方程式を解かない限り求まらない.

- (3) まず, 十分時間が経過した後のことを考える. 素子の性質から, コンデンサに流れる電流の大きさは $I_C = 0$ となる. また, コイルの電位降下は $L \frac{dI_L}{dt} = 0$ となる. したがって, キルヒホッフ則より,

$$\begin{cases} E - RI - 0 = 0, \\ E - RI - \frac{Q}{C} = 0, \\ I = 0 + I_L, \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} I = I_L = \frac{E}{R}, \\ Q = 0. \end{cases}$$

したがって, コンデンサ, およびコイルの蓄えるエネルギーはそれぞれ,

$$U_C = 0, \quad U_L = \frac{LE^2}{2R^2}.$$

IV キルヒホッフ則より,

$$\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0$$

ここでは, コンデンサに蓄えられる電荷については上側を正, 回路を流れる電流については反時計回りを正として考える.

- (1) 電荷の正の側と電流の正の向きに注意して, $I = \frac{dQ}{dt}$ となっていることからキルヒホッフ則より,

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q.$$

したがって, 電荷 Q は, 振動中心 $Q = 0$, 角振動数 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ の単振動をすることがわかる. 単振動の微分方程式の解より, 初期条件から決定する未知定数を A, B として,

$$Q(t) = 0 + A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

と書け, $Q(0) = CE, I(0) = 0$ より,

$$Q(t) = \underbrace{CE \cos \left(\frac{t}{\sqrt{LC}} \right)}.$$

- (2) 回路のエネルギー保存則より^{*17},

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{2R} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(CE)^2}{C} + 0, \quad \therefore |Q_3| = \underbrace{CE \sqrt{1 - \frac{L}{4CR^2}}}.$$

[B] I キルヒホッフ則より,

$$E(t) - RI - L \frac{dI}{dt} = 0.$$

- (1) $V_{GP} = L \frac{dI}{dt} = kE$ より, 初期条件を考慮して,

$$I(t) = \frac{kE}{L} t.$$

よって, キルヒホッフ則より,

$$E(t) = \underbrace{\frac{kER}{L} \left(t + \frac{L}{R} \right)}.$$

- (2) 起電力のした仕事が積分を用いた計算しかないため, ジュール熱の逆算をする意味はない. よって, 定義から,

$$J = \int_0^T I^2 R dt = \int_0^T \left(\frac{kE}{L} \right)^2 R t^2 dt = \underbrace{\frac{R}{3} \left(\frac{kE}{L} \right)^2}.$$

^{*17} 今の場合, 時間追跡できない (有名角でない角度でやろうと思えばできなくもないが...).

II キルヒホッフ則より,

$$E(t) - RI - \frac{Q}{C} = 0.$$

(1) $\frac{dQ}{dt} = \text{const}$ より, $t = T$ における $\frac{Q(T)}{C} = E$ を考慮して,

$$\frac{Q(t)}{C} = \frac{E}{T}t.$$

よって, キルヒホッフ則より,

$$E(t) = \frac{RE}{T} \left(t + \frac{1}{RC} \right).$$

(2) ジュール熱は定義から,

$$J = I^2 R \times T = \frac{R(CE)^2}{T}.$$

C の蓄えるエネルギーは,

$$U_C = \frac{(CE)^2}{2C} = \frac{1}{2}CE^2.$$

よって, 回路のエネルギー収支より,

$$W = \Delta U_C + J = \left(\frac{1}{2} + \frac{RC}{T} \right) CE^2.$$

[C] I キルヒホッフ則より,

$$V_0 \sin \omega t - RI - \frac{Q}{C} = 0.$$

(1) キルヒホッフ則に $I(t) = I_{RC} \sin(\omega t - \theta_{RC})$ を代入して,

$$\begin{aligned} V_0 \sin \omega t &= RI_{RC} \sin(\omega t - \theta_{RC}) - \frac{I_{RC}}{C\omega} \cos(\omega t - \theta_{RC}) \\ &= I_{RC} \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} \right)^2} \sin(\omega t - \theta_{RC} + \alpha). \end{aligned}$$

この両辺が一致すればよく,

$$I_{RC} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} \right)^2}}, \quad \tan \theta_{RC} = \tan \alpha = -\frac{1}{RC\omega}.$$

また, 振幅の関係から, インピーダンス Z_{RC} は,

$$Z_{RC} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} \right)^2}.$$

(2) 平均消費電力は、その定義から、

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t)^2 R dt \\ &= \frac{I_{RC}^2 R}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \alpha) dt \\ &= \frac{V_0^2 R}{2} \underbrace{\left[R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} \right)^2 \right]^{-1}}. \end{aligned}$$

II キルヒホッフ則より、

$$V_0 \sin \omega t - RI - L \frac{dI}{dt} = 0.$$

(1) キルヒホッフ則に $I(t) = I_{RL} \sin(\omega t - \theta_{RL})$ を代入して、

$$\begin{aligned} V_0 \sin \omega t &= RI_{RL} \sin(\omega t - \theta_{RL}) + L\omega I_{RL} \cos(\omega t - \theta_{RL}) \\ &= I_{RL} \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \sin(\omega t - \theta_{RL} + \beta). \end{aligned}$$

この両辺が一致すればよく、

$$I_{RL} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}, \quad \tan \theta_{RL} = \tan \beta = \frac{L\omega}{\underbrace{R}}, \quad Z_{RL} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

III キルヒホッフ則・電荷保存則より、

$$\begin{cases} V_0 \sin \omega t - RI - L \frac{dI_L}{dt} = 0, \\ V_0 \sin \omega t - RI - \frac{Q}{C} = 0, \\ I = I_C + I_L. \end{cases}$$

(1) キルヒホッフ則に $I_L(t) = I_L \sin(\omega t - \theta_L)$ を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{Q(t)}{C} &= -L \frac{dI}{dt} = -L\omega I_L \cos(\omega t - \theta_L), \\ \therefore I_C(t) &= \underbrace{-LC\omega^2 I_L \sin(\omega t - \theta_L)}. \end{aligned}$$

(2) キルヒホッフ則と電荷保存則より、

$$\begin{aligned} V_0 \sin \omega t &= R(I_L + I_C) + L \frac{dI_L}{dt} \\ &= I_L \{ R(1 - LC\omega^2) \sin(\omega t - \theta_L) + L\omega \cos(\omega t - \theta_L) \} \\ &= I_L \sqrt{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2} \sin(\omega t - \theta_L + \gamma). \end{aligned}$$

この両辺が一致すればよく、

$$I_L = \frac{V_0}{\sqrt{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}}, \quad \tan \theta_L = \tan \gamma = \frac{L\omega}{\underbrace{R(1 - LC\omega^2)}}.$$

(3) 電荷保存則より,

$$I(t) = I_L R (1 - LC\omega^2) \sin(\omega t - \theta_L)$$

の振幅が常に 0 となればよい. よって,

$$\omega = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{LC}}}$$

