

1

 力学～総復習

【解答】

I 小物体の位置 (x, y) , および速度 (v_x, v_y) はそれぞれ,

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \theta t, \\ y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2, \\ v_x = v_0 \cos \theta, \\ v_y = v_0 \sin \theta - gt. \end{cases}$$

(1) 折り返しゆえ, 小物体 v_y が 0 となる時刻 t を計算して,

$$v_0 \sin \theta - gt = 0 \quad \therefore t = \underbrace{\frac{v_0 \sin \theta}{g}}.$$

このときの y 座標は,

$$y = v_0 \sin \theta \frac{v_0 \sin \theta}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2 = \underbrace{\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}}.$$

(2) 落下時刻 t は $y = 0$ を解いて,

$$\begin{aligned} v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 &= 0 \\ t \left(\frac{1}{2}gt - v_0 \sin \theta \right) &= 0 \quad \therefore t = \underbrace{\frac{2v_0 \sin \theta}{g}}. \end{aligned}$$

このときの x 座標は,

$$x = v_0 \cos \theta \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = \underbrace{\frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}}.$$

(3) 前問の x は三角関数の加法定理より,

$$x = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

と表せる. よって, $\sin 2\theta = 1$ となるとき x は最大値を取り,

$$\sin 2\theta = 1 \quad \therefore \theta = \underbrace{\frac{\pi}{4}}.$$

II 物体 A が物体 B から受ける垂直抗力の大きさは, 鉛直方向のつりあいの式から $N = mg$ と求まることは以下の解答では割愛する.

(1) 運動方程式より,

$$\begin{cases} ma = \mu' mg, \\ Mb = F - \mu' mg \end{cases} \quad \therefore a = \mu' g, \quad b = \frac{F}{M} - \frac{m}{M} \mu' g.$$

(2) 運動方程式より,

$$\begin{cases} mA = R, \\ MA = F - R \end{cases} \quad \therefore A = \frac{F}{M+m}, \quad R = \frac{m}{M+m} F.$$

(3) $R = \mu N = \mu mg$ となるような F で滑りが生じる. よって,

$$R = \frac{m}{M+m} F = \mu mg \quad \therefore F = \mu(M+m)g.$$

III (1) 運動方程式は,

$$\begin{cases} m\alpha = S - mg, \\ 2m\beta = S - 2mg, \\ 3m\gamma = 17mg - 2S - 3mg. \end{cases}$$

(2) 運動方程式より加速度は,

$$\alpha = \frac{S}{m} - g, \quad \beta = \frac{S}{2m} - g, \quad \gamma = \frac{14}{3}g - \frac{2S}{3m}$$

となり, これを拘束条件へ代入して,

$$\frac{S}{m} - g + \frac{S}{2m} - g = \frac{28}{3}g - \frac{4S}{3m} \quad \therefore S = 4mg.$$

(3) A, B, C それぞれの位置を x_A, x_B, x_C とする. このとき, 滑車からはみ出ている部分の糸の長さを ℓ とすれば,

$$(x_C - x_A) + (x_C - x_B) = \ell$$

の関係が恒等的に成り立つ. この式の両辺を t で微分すれば, $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ ($i = A, B, C$) であること, および定数 ℓ の微分が 0 であることを考慮して,

$$2v_C - v_A - v_B = 0.$$

同様に, 速度の時間微分が加速度であることから, この式の両辺を t で微分すれば,

$$2\gamma - \alpha - \beta = 0.$$

IV (1) $\underline{ma = -kx - mg}.$

(2) 運動方程式より,

$$a = -\frac{k}{m} \left(x + \frac{mg}{k} \right)$$

と纏められるので, 振動中心 x_c , および周期 T はそれぞれ,

$$x_c = -\frac{mg}{k}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

(3) 単振動ゆえ, 物体の位置 x , および速度 v は未知量 C, D を用いてそれぞれ^{*1}

$$\begin{cases} x = -\frac{mg}{k} + C \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + D \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = C \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - D \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

と表せる. $t = 0$ で $x = 0, v = 0$ より,

$$\begin{cases} 0 = -\frac{mg}{k} + D, \\ 0 = C \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad \therefore C = 0, \quad D = \frac{mg}{k}.$$

よって,

$$x = -\frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$

V (1) 仕事の定義より,

$$W_1 = mg \frac{mg}{3k} \cos 0 = \frac{(mg)^2}{3k}.$$

(2) 仕事の定義より,

$$W_2 = \int_0^{-\frac{mg}{3k}} (-kx) dx = -\frac{(mg)^2}{18k}.$$

(3) 物体のエネルギー収支の式より,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = \frac{5}{18} \frac{(mg)^2}{k} \quad \therefore v = \frac{g}{3} \sqrt{\frac{5m}{k}}.$$

VI (1) 折り返す瞬間の運動量保存則は^{*2},

$$Mu + mu = mv_0.$$

^{*1} ここでやる計算をやらずとも, 運動を図示すれば $+\cos$ 型の運動であることは明らかである (慣れてきたら図を使って瞬時にできるようにしたいです).

^{*2} 折り返す瞬間, 相対的な (今の場合水平方向の) 位置が極値を取ることから相対速度が 0, すなわち 2 物体の速度 (の水平成分) が等しくなる.

(2) 運動量保存則より,

$$Mu + mu = mv_0 \quad \therefore u = \frac{m}{\underline{M+m}}v_0.$$

また, 2 物体と重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mu^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \therefore y = \frac{Mv_0^2}{\underline{2(M+m)g}}.$$

(3) 運動量保存則, および力学的エネルギー保存則より*3,

$$\begin{cases} MV + mv = mv_0, \\ \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \end{cases} \quad \therefore v = \frac{m-M}{\underline{M+m}}v_0, \quad V = \frac{2m}{\underline{M+m}}v_0.$$

VII (1) はね返り係数の式より,

$$v - u = -e(v_0 - u) \quad \therefore v = \underline{(1+e)u - ev_0}.$$

(2) $v > 0$ より,

$$v = (1+e)u - ev_0 > 0 \quad \therefore u > \underline{\frac{e}{1+e}v_0}.$$

(3) 作用・反作用の法則より, 壁が物体から受ける力積 I' と物体が壁から受ける力積 I の間には $I' = -I$ の関係がある. よって, 運動量収支の式より,

$$I' = -I = -\Delta p = -(mv - mv_0) = \underline{m(1+e)(v_0 - u)}.$$

VIII (1) 面積速度保存則より,

$$\frac{1}{2}Rv = \frac{1}{2} \cdot 3RV \quad \therefore v = \underline{3V}.$$

(2) 力学的エネルギー保存則は,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = \frac{1}{2}mV^2 + \left(-G\frac{Mm}{3R}\right).$$

ここに $v = 3V$ を代入して,

$$V = \sqrt{\frac{1}{6}\frac{GM}{R}}, \quad v = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{GM}{R}}.$$

*3 基本的には運動量保存則の式を力学的エネルギー保存則の式へ代入し, 2 次方程式を解けばよい. しかし, 力学的エネルギー保存則を $MV^2 = m(v_0 - v)(v_0 + v)$ と変形して, 運動量保存則の式を代入することで $V = v_0 + v$ を得るので

$$\begin{cases} MV + mv = mv_0, \\ V = v_0 + v \end{cases}$$

の 2 式を解いてもよい. この第 2 式は, はね返り係数が 1 である式に相当する (この一連の過程は弾性衝突と見做せるため).

(3) ケプラー第3法則より,

$$\frac{T^{*2}}{(2R)^3} = \frac{T^2}{R^3} \quad \therefore T^* = \underline{\underline{2\sqrt{2}T}}.$$

IX (1) 円運動の速さ v は公式より,

$$v = \underline{\underline{\ell\omega \sin \theta}}.$$

また, 周期 T は速さ v で円周 $2\pi\ell \sin \theta$ 運動する時間を求めればよく,

$$T = \frac{2\pi\ell \sin \theta}{v} = \frac{2\pi}{\underline{\underline{\omega}}}.$$

(2) 運動方程式 (中心成分), および鉛直方向のつりあいより,

$$\begin{cases} m \frac{(\ell\omega \sin \theta)^2}{\ell \sin \theta} = S \sin \theta, \\ 0 = S \cos \theta + N - mg \end{cases} \quad \therefore S = \underline{\underline{m\ell\omega^2}}, \quad N = \underline{\underline{mg - m\ell\omega^2 \cos \theta}}.$$

(3) 面から離れていないときゆえ, $N > 0$ を考えて,

$$N = mg - m\ell\omega^2 \cos \theta > 0 \quad \therefore \omega < \underline{\underline{\sqrt{\frac{g}{\ell \cos \theta}}}.$$

X (1) 力学的エネルギー保存則より*4,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(-\ell \sin \theta) = 0 \quad \therefore v = \underline{\underline{\sqrt{2g\ell \sin \theta}}}.$$

(2) 運動方程式 (中心成分) より,

$$m \frac{v^2}{\ell} = T - mg \sin \theta \quad \therefore T = \underline{\underline{3mg \sin \theta}}.$$

(3) 力学的エネルギー保存則, および運動方程式 (中心成分) より,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \sin \theta = \frac{1}{2}mv_0^2, \\ m \frac{v^2}{\ell} = T - mg \sin \theta \end{cases} \quad \therefore T = m \frac{v_0^2}{\ell} + 3mg \sin \theta.$$

この結果から, $\theta = \frac{3}{2}\pi$ で張力の大きさ T は最小値を取り, このとき $T > 0$ となれば糸が弛むことはなく円軌道を保つことがわかる. よって,

$$T = m \frac{v_0^2}{\ell} - 3mg \sin \theta > 0 \quad \therefore \underline{\underline{v_0 > \sqrt{3g\ell}}}.$$

*4 非等速円運動の力学的エネルギー保存則は, 円の中心を位置エネルギーの基準点と定めると計算が楽になる.

XI (1) 動く座標系内部での運動方程式（つりあいの式）は*⁵,

$$\begin{cases} \underline{0 = T \sin \theta - ma}, \\ \underline{0 = T \cos \theta - mg}. \end{cases}$$

(2) 前問の 2 式より,

$$T = \underline{m\sqrt{g^2 + a^2}}, \quad \tan \theta = \underline{\frac{a}{g}}.$$

(3) $ma = T \sin \theta$.

XII (1) 点 A まわりの力のモーメントのつりあいより,

$$0 = \frac{\ell}{2}mg - \ell R > 0 \quad \therefore R = \underline{\frac{1}{2}mg}.$$

(2) 力のつりあいより,

$$\begin{cases} 0 = R + T \sin \theta - mg, \\ 0 = N - T \cos \theta \end{cases} \quad \therefore T = \underline{\frac{mg}{2 \sin \theta}}, \quad N = \underline{\frac{mg}{2 \tan \theta}}.$$

(3) $R < \mu N$ ならば滑りは生じず,

$$\frac{1}{2}mg < \mu \frac{mg}{2 \tan \theta} \quad \therefore \underline{\mu > \tan \theta}.$$

*⁵ 動く座標系内部では、吊り革は静止している。

2 電気～主要範囲の復習

I (1) 公式より,

$$\phi = k \frac{Q}{L} + k \frac{-Q}{3L} = \frac{2}{3} \frac{kQ}{L}.$$

(2) 公式より,

$$E = k \frac{Q}{L^2} - k \frac{Q}{(3L)^2} = \frac{8}{9} \frac{kQ}{L^2}.$$

(3) 公式より,

$$F = -3QE_x = -\frac{8}{3} \frac{kQ^2}{L^2},$$

$$U = -3Q\phi = -\frac{2kQ^2}{L}.$$

II (1) 定義より,

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}.$$

(2) ガウス則より,

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} = \frac{r^3}{a^3} Q \quad \therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r.$$

(3) ガウス則より,

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3}{\varepsilon_0} = Q \quad \therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}.$$

III キルヒホッフ則は,

$$E - \frac{x}{3C} - \frac{y}{C} - RI = 0.$$

(1) 電荷保存則は,

$$-x + y = -CE.$$

(2) $t = 0$ において $x = CE$, $y = 0$ より, キルヒホッフ則に代入して,

$$E - \frac{CE}{3C} - 0 - RI = 0 \quad \therefore I = \frac{2}{3} \frac{E}{R}.$$

- (3) 十分時間経過後，コンデンサに流れ込む電流は 0 である．電荷保存則，およびキルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} -x + y = -CE, \\ E - \frac{x}{3C} - \frac{y}{C} - RI = 0 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{3}{2}CE, \quad y = \frac{1}{2}CE.$$

- IV (1) 公式より，

$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{(CE)^2}{C} - \frac{1}{2} \frac{(CE/3)^2}{C} = \frac{4}{9}CE^2.$$

- (2) 公式より，

$$W = \Delta QE = \left(CE - \frac{1}{3}CE \right) E = \frac{2}{3}CE^2.$$

- (3) 回路のエネルギー収支の式より，

$$\Delta U + J = W \quad \therefore J = \frac{2}{9}CE^2.$$

【作題意図】

抜けている知識もあるが，定石の復習として使えるように作題しました（試験後の復習効果が高いと思っています）。何ができていて何ができていないのか，明確になった点を復習しましょう。復習する際も，何を（どの教材を）いつまでに何周するか，そのために 1 日あたりどれくらい手を付けるべきかを考えましょう。2 次試験で物理を使う人は，もう物理を始めないと間に合わなくなります。危機感を持ってください。