

東北大学 過去問解説 (2015～2025 年)

<https://koremura.net/>

目次

2025 年度 解答	5
2024 年度 解答	18
2023 年度 解答	30
2022 年度 解答	40
2021 年度 解答	54
2020 年度 解答	64
2019 年度 解答	76
2018 年度 解答	92
2017 年度 解答	100
2016 年度 解答	108
2015 年度 解答	120

はじめに

この解説は、個人で作成したものになります。途中の空白のページについては冊子となるように印刷したときの調整用のページです。問題は「東進：<https://www.toshin-kakomon.com/>」などを利用して、各自で用意する必要があります。解法選択による誤謬はないかと思いますが、些細なミス、誤字等はあるかと思えます。最新版は web ページ「<https://koremura.net/>」上にあがっておりますので、各自で探してそちらの参照してください。些細なミスや誤字等が直っていない場合は、知り合いの方は何らかの手段で、知り合いでない方は「<https://x.com/hghg864>」まで伝えてください。

2025 年度 解答

1 単振動，等加速度運動，非等速円運動，衝突

【メモ】

・問(1)は単振動，等加速度運動，非等速円運動に関する問題。

単振動，等加速度運動は，時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動であり，(b)，(c)はエネルギーでの計算が楽（時間追跡も可），(e)は時間追跡での計算が必要．エネルギーでの計算はいずれも小球のみの系で計算をしたので，時間追跡，力学的エネルギー保存則を用いた計算は【補足】に示した．

非等速円運動については，以下の立式が定石．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{array} \right.$$

・問(2)は衝突，等加速度運動，非等速円運動に関する問題．等加速度運動に関してはエネルギーで方針を立てるのが楽（解答は小物体のみの系で計算をしたので，時間追跡，力学的エネルギー保存則を用いた計算は【補足】に示した）．衝突は以下の立式が定石*1．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{衝突の直前・直後での運動量保存則} \\ \text{問題文の条件} \end{array} \right.$$

【解答】

問(1) 左側の斜面に沿って上向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長の位置に定める．

(a) つりあいより，

$$m \cdot 0 = kd - mg \sin \theta \quad \therefore d = \underbrace{\frac{mg}{k}} \sin \theta .$$

(b) 位置 $x (< 0)$ にあるとき，物体にはたらく力は $-kx - mg \sin \theta$ である*2．よって，小球のエネルギー収支より*3，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = \int_{-3d}^0 (-kx - mg \sin \theta) dx = \frac{3}{2}kd^2 \quad \therefore v_0 = d \underbrace{\sqrt{\frac{3k}{m}}} .$$

(c) 小球のエネルギー収支より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= mg \frac{R}{\tan \theta} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -mgR \cos \theta \\ \therefore v_1 &= \underbrace{\sqrt{v_0^2 - 2gR \cos \theta}} . \end{aligned}$$

*1 固定面など外力制御のある面との衝突の場合，運動量は保存しない．

*2 $x < 0$ のときばねは縮んであり，その縮みは $|x| = -x$ である．よって，弾性力は $+k|x| = -kx$ となる．

*3 $d = \frac{mg}{k} \sin \theta$ を用いて θ を消去した．

(d) 点 C での垂直抗力の大きさを N_C とする. 運動方程式 (中心成分) より,

$$m \frac{v_1^2}{R} = -N_C + mg \cos \theta \quad \therefore N_C = mg \cos \theta - m \frac{v_1^2}{R}.$$

面から離れるとき $N_C < 0$ を考えて,

$$N_C = mg \cos \theta - m \frac{v_1^2}{R} < 0 \quad \therefore v_1 > \sqrt{gR \cos \theta} (= v_c).$$

(e) 点 C を原点とし, 水平方向に X 軸, 鉛直方向に Y 軸を定める. 飛び出した時刻を $t = 0$ とし, 飛び出して台と接触するまでの物体の位置 (X, Y) は,

$$\begin{cases} X = v_1 \cos \theta t, \\ Y = v_1 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

である. 点 E で台に接触することから $X = 2R \sin \theta$ かつ $Y = 0$ を満たす場合を考えればよいので,

$$\begin{cases} 2R \sin \theta = v_1 \cos \theta t, \\ 0 = v_1 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \therefore v_0 = \sqrt{\left(2 \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta}\right) gR}.$$

問(2) (a) 衝突後の小球の速度を u , 台の小物体の速度を U とする. 衝突ゆえ, 運動量保存則, および衝突の条件 (はね返り係数の式) より,

$$\begin{cases} mu + MU = mv_0, \\ u - U = -1 \cdot (v_0 - 0) \end{cases} \quad \therefore u = -\frac{M-m}{M+m}v_0, \quad U = \frac{2m}{M+m}v_0.$$

よって, 衝突後の速さはそれぞれ

$$v_2 = |u| = \frac{M-m}{M+m}v_0, \quad V_2 = |U| = \frac{2m}{M+m}v_0.$$

(b) 小物体のエネルギー収支より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M \cdot 0^2 - \frac{1}{2}MV_2^2 &= MgL \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \mu' MgL \cos \theta \cos \pi \\ \therefore L &= \frac{V_2^2}{2g(\mu' \cos \theta - \sin \theta)}. \end{aligned}$$

(c) 小球の台の面上での位置を点 P とし, 点 D から反時計回りに ϕ $\left(-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\right)$ を定める. 円弧面上にあるとき小球は非等速円運動を行うので, 運動方程式 (中心成分), および力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{R} = -N + mg \cos \phi, \\ \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \phi = \frac{1}{2}mv_2^2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} v = \sqrt{v_2^2 - 2gR \cos \phi}, \\ N = 3mg \cos \phi - m \frac{v_2^2}{R}. \end{cases}$$

この表式より N は $\phi = \pm \frac{\pi}{4}$ で最小値を取る.

さて, 台から離れず点 D を通過するためには, $-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ の ϕ で $N > 0$ (面から離れない条件) かつ点 D での運動エネルギーが正 (点 D に到達する条件) であればよい. よって*4,

$$\begin{cases} N = 3mg \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - m \frac{v_2^2}{R} > 0, \\ v_2^2 - 2gR > 0 \end{cases} \quad \therefore \underbrace{\sqrt{2gR}}_{=v_a} < v_2 \leq \underbrace{\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}gR}}_{=v_b} .$$

(d) 起こり得る運動は① DF 間で折り返す, ②台から離れず点 D を通過, ③点 E で台の面上から離れるの 3 つに分類される. また, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき v_2 は,

$$v_2 = \frac{M-m}{M+m} \sqrt{\left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1/\sqrt{2}}\right) gR} = \frac{M-m}{M+m} \sqrt{2\sqrt{2}gR}$$

である.

① DF 間で折り返すとき

このとき, v_2 は $\sqrt{2gR} < v_2 \leq \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}gR}$ の範囲を取る. すなわち, 取り得る M の範囲は

$$\sqrt{2gR} < \frac{M-m}{M+m} \sqrt{2\sqrt{2}gR} \leq \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}gR} \quad \therefore \frac{2^{\frac{1}{4}}+1}{2^{\frac{1}{4}}-1}m < M \leq \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}m$$

となる*5. $\angle\text{POF} = \alpha$ とすると, 小球のエネルギー収支より折り返す位置 (最高点) の高さ h は,

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = Mg \frac{h}{\sin \alpha} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = Mgh \quad \therefore h = \sqrt{2}R \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 .$$

②台から離れず点 D を通過

このときもまた, v_2 は $\sqrt{2gR} < v_2 \leq \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}gR}$ の範囲を取る. 点 D が高さの最大値のため $h = R$ である.

③点 E で台の面上から離れるとき

このとき, v_2 は $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}gR} < v_2$ の範囲を取る. すなわち, 取り得る M の範囲は

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}m < M$$

となる. 点 E で台の面上から離れることから台と接触したまま到達する最高点は点 E であり, $h = \frac{1}{\sqrt{2}}R$ である.

以上①, ②, ③を踏まえれば (お) のグラフが適当である.

*4 N の条件は N の最小値, すなわち点 F での $\phi = -\frac{\pi}{4}$ を考えれば十分.

*5 それぞれの近似値は $\frac{2^{\frac{1}{4}}+1}{2^{\frac{1}{4}}-1} \doteq 11.6$, $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \doteq 13.9$ である.

【補足1】問(1)(b)を運動方程式（時間追跡）、力学的エネルギー保存則で解く

小球の運動方程式より*6,

$$m\ddot{x} = +k|x| - mg \sin \theta = -kx - mg \sin \theta \quad \therefore \ddot{x} = -\frac{k}{m} \left(x + \frac{mg}{k} \sin \theta \right) = -\frac{k}{m} (x + d)$$

小球は振動中心 $x_0 = -d$, 角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ の単振動を行うことわかる. $x = -3d$ で静かに手を放した時刻を $t = 0$ とすると小球の位置 x , および速度 v はそれぞれ,

$$\begin{cases} x = -d - 2d \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = 2d \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

と表される. 板と小球の間の垂直抗力の大きさ N は $N = -kx$ と表されるため*7, 小球が板から離れる位置は $x = 0$ とわかる. よって, $x = 0$ を解いて,

$$-d - 2d \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) = 0 \quad \therefore \sqrt{\frac{k}{m}} t = \frac{2}{3}\pi.$$

この t を v へ代入すれば,

$$v_0 = 2d \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\frac{2}{3}\pi \right) = d \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

続いて, 小球, 重力場, ばねからなる系の力学的エネルギー保存則でも同様に*8,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}k(3d)^2 + mg(-3d \sin \theta) \quad \therefore v_0 = d \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

【補足2】問(1)(c)を運動方程式（時間追跡）、力学的エネルギー保存則で解く

小球の運動方程式より x 軸方向の加速度 a は,

$$ma = -mg \sin \theta \quad \therefore a = -g \sin \theta$$

*6 厳密には小球に弾性力がはたらくわけではない. 板から受ける垂直抗力の大きさを N とすると, 板 (質量無視), および小球の運動方程式は,

$$\begin{cases} 0 \cdot \ddot{x} = -N + k|x|, \\ m\ddot{x} = N - mg \sin \theta \end{cases}$$

であり, $N = k|x| = -kx$ からこの運動方程式を得る.

*7 少し前の脚注参照.

*8 $d = \frac{mg}{k} \sin \theta$ を利用.

と求まり、離れた瞬間を再度 $t = 0$ とすると、物体の位置 x 、および速度 v はそれぞれ、

$$\begin{cases} x = v_0 t - \frac{1}{2} g \sin \theta t^2, \\ v = v_0 - g \sin \theta t \end{cases}$$

と表される。 $\overline{BC} = \frac{R}{\tan \theta}$ ゆえ、 $x = \frac{R}{\tan \theta}$ となる時刻 t を求めて*9、

$$v_0 t - \frac{1}{2} g \sin \theta t^2 = \frac{R}{\tan \theta} \quad \therefore t = \frac{v_0}{g \sin \theta} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gR \cos \theta}{v_0^2}} \right).$$

よって、この t を速度 v へ代入すれば、

$$v_1 = v_0 - g \sin \theta \cdot \frac{v_0}{g \sin \theta} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gR \cos \theta}{v_0^2}} \right) = \sqrt{v_0^2 - 2gR \cos \theta}.$$

続いて、小球、重力場からなる系の力学的エネルギー保存則でも同様に、

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + m g R \cos \theta = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \therefore v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gR \cos \theta}.$$

【補足3】問(2)(b)を運動方程式（時間追跡）、力学的エネルギー保存則で解く

台の右側斜面の斜面に沿って下向きに x' 軸を定め、その原点を小物体の始状態の位置に定める。小物体の運動方程式より x' 軸方向の加速度 a は*10、

$$M a = M g \sin \theta - \mu' N = M g \sin \theta - \mu' M g \cos \theta \quad \therefore a = g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)$$

と求まる。小物体が運動を始めた時刻を $t = 0$ とすると、時刻 t における小物体の位置 x' 、および速度 v' はそれぞれ、

$$\begin{cases} x' = V_2 t - \frac{1}{2} g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) t^2, \\ v' = V_2 - g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) t \end{cases}$$

と表される。 $V = 0$ となる時刻 t は $t = \frac{V_2}{g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)}$ であるから、このときの $x' = L$ は、

$$L = \frac{V_2^2}{g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)} - \frac{1}{2} g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) \left\{ \frac{V_2}{g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)} \right\}^2 = \frac{V_2^2}{2g(\mu' \cos \theta - \sin \theta)}.$$

*9 t の符号は次のように決定する。 $x = \frac{R}{\tan \theta}$ を通過し得るのは（この斜面が無限に続くと仮定したとき）行きと帰りの2通り存在する。 t の負符号の解は行きで通過する時刻を表し、正符号の解は帰りで通過する時刻を表すため、負符号を選択する。

*10 斜面垂直方向の運動方程式より小物体と台の間にはたらく垂直抗力の大きさは $Mg \cos \theta$ である。

続いて、小球、重力場からなる系の力学的エネルギー収支でも同様に、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} M \cdot 0^2 - \frac{1}{2} M V_2^2 \right) + \{ M g (-L \sin \theta) - M g \cdot 0 \} &= \mu' M g \cos \theta L \cos \pi \\ &= -\mu' M g L \cos \theta \\ \therefore L &= \frac{V_2^2}{2g(\mu' \cos \theta - \sin \theta)}. \end{aligned}$$

2 vBl 公式の電磁誘導

【メモ】

- ・回路の一部が動く電磁誘導は，誘導起電力の決定では vBl の公式が基本となる．
- ・電磁誘導の問題は，①誘導起電力の決定，②回路の議論，③運動の議論，④エネルギーの議論，という作りが基本．
- ・ジュール熱 J の計算は以下のように行う．

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I \text{ 一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I \text{ 一定でないとき}). \end{cases}$$

今回，ジュール熱の計算はしないが，問(1)(c)ではエネルギー収支の式を利用する（ある意味で，この考え方を利用しているとも言える）．

【解答】

問(1) (a) 回路の（力学的な）エネルギー収支より，

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mgh \cos 0 = mgh \quad \therefore v_1 = \sqrt{2gh}.$$

また，この直後回路の下側の辺には右向きに v_1Bw の誘導起電力が生じる．回路に流れる電流はキルヒホッフ則より，

$$v_1Bw - RI_1 = 0 \quad \therefore I_1 = \frac{Bw\sqrt{2gh}}{R}.$$

(b) 回路の速度が v のときの回路の加速度を a ，回路に流れる電流を I （反時計回りを正）とする．回路の運動方程式，およびキルヒホッフ則より加速度 a は，

$$\begin{cases} ma = mg - IBw, \\ vBw - RI = 0 \end{cases} \quad \therefore a = g - \frac{B^2w^2}{mR}v$$

と求まる．減速のためには $v = v_1 = \sqrt{2gh}$ で $a < 0$ であればよいので，

$$a = g - \frac{(Bw)^2}{mR}\sqrt{2gh} < 0 \quad \therefore h > \frac{g}{2} \left(\frac{mR}{B^2w^2} \right)^2.$$

(c) 回路と力学系全体のエネルギー収支より，

$$\Delta \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) + \Delta(-mgy) + Q = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}m \left(\sqrt{2gh} \right)^2 - mg\ell + Q = 0 \quad \therefore v_2 = \sqrt{2g(h + \ell) - \frac{2Q}{m}}.$$

(d) $t > t_2$ では、運動方程式より加速度 a は $a = g$ となる。よって、時刻 t における速度 v は、

$$v = v_2 + g(t - t_2)$$

と表され、題意より、

$$\sqrt{2gh} = v_2 + g\Delta t \quad \therefore \Delta t = \frac{\sqrt{2gh} - v_2}{g}$$

(e) ① $0 \leq t < t_1$, ② $t_1 \leq t < t_2$, ③ $t_2 \leq t$ の3つに場合分けして考える。

① $0 \leq t < t_1$ のとき

回路に生じる誘導起電力は0ゆえ、キルヒホッフ則は $RI = 0$ となり $I = 0$ が求まる。

② $t_1 \leq t < t_2$ のとき

回路に生じる誘導起電力は vBw ゆえ、回路に流れる電流 I はキルヒホッフ則より、

$$vBw - RI = 0 \quad \therefore I = \frac{Bw}{R}v$$

となり、 v に比例する。(b)より v は減少するため^{*11}、 I も減少することがわかる。

③ $t_2 \leq t$ のとき

回路の上辺、下辺それぞれに vBw の誘導起電力が生じるので、回路に流れる電流 I はキルヒホッフ則より、

$$vBw - RI - vBw = 0 \quad \therefore I = 0$$

となる。

以上①, ②, ③を踏まえれば(あ)のグラフが適当である。

問(2) コンデンサの左側の極板の帯電量を q 、回路に流れる電流を反時計回りに I とする。運動方程式、およびキルヒホッフ則は、

$$\begin{cases} Ma = Mg - IBw, \\ vBw - \frac{q}{C} = 0. \end{cases}$$

(a) キルヒホッフ則より、

$$q = CBwv.$$

(b) 今の場合、電流 I は電荷 q と $I = +\frac{dq}{dt}$ の関係があり、加速度 a が $a = \frac{dv}{dt}$ であることから、

$$I = \frac{dq}{dt} = CBw \frac{dv}{dt} = CBwa$$

*11 v の表式は【補足】に示した

と表される。よって、運動方程式より、

$$Ma = Mg - IBw = Mg - C(Bw)^2 a \quad \therefore a = \frac{M}{M + C(Bw)^2} g.$$

(c) 加速度 a は定数のため、時刻 t における位置 y 、および速度 v はそれぞれ

$$\begin{cases} y = h + \frac{1}{2}at^2, \\ v = at \end{cases}$$

と表される。 $y = h + \frac{\ell}{2}$ を満たす時刻は $t = \sqrt{\frac{\ell}{a}}$ であり、このときの速度は $v = \sqrt{a\ell}$ である。キルヒホッフ則よりコンデンサの帯電量は $q = CBw\sqrt{a\ell}$ であるから、コンデンサの蓄える静電エネルギー U は、公式より、

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C(Bw)^2 a \ell = \frac{MC(Bw)^2 g \ell}{2\{M + C(Bw)^2\}}.$$

【補足 1】問(1)のエネルギー収支の式の導出

回路の運動方程式、およびキルヒホッフ則は、

$$\begin{cases} ma = mg - IBw, \\ RI = vBw. \end{cases}$$

運動方程式に速度 v 、キルヒホッフ則に電流 I をかけ 2 式足し合わせると、

$$mv \frac{dv}{dt} + RI^2 = mgv \quad \therefore \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)}_{\text{運動エネルギーの時間変化率}} + \underbrace{\frac{d}{dt} (-mgy)}_{\text{位置エネルギーの時間変化率}} + \underbrace{RI^2}_{\text{消費電力}} = 0$$

となりエネルギー収支の式を得る。

【補足 2】問(1)(e)における速度 v 、および電流 I の表式

運動方程式、およびキルヒホッフ則より、

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{(Bw)^2}{R} v + mg \quad \therefore \frac{dv}{dt} = -\frac{(Bw)^2}{mR} \left\{ v - \frac{mgR}{(Bw)^2} \right\}.$$

すなわち、 v は終端速度 $v_f = \frac{mgR}{(Bw)^2}$ の指数関数型の解を取ることが分かる*12.

*12 なお、指数関数型の解の導出は以下のような計算によってもわかる ($\heartsuit = e^\heartsuit$ は積分定数).

$$\int \frac{1}{v - \frac{mgR}{(Bw)^2}} \frac{dv}{dt} dt = - \int \frac{(Bw)^2}{mR} dt$$

$$\log \left| v - \frac{mgR}{(Bw)^2} \right| = -\frac{(Bw)^2}{mR} t + \heartsuit \quad \therefore v = \frac{mgR}{(Bw)^2} + \heartsuit e^{-\frac{(Bw)^2}{mR} t}.$$

$t = t_1$ で $v = v_1$ であることから,

$$v = \frac{mgR}{(Bw)^2} + \left\{ v_1 - \frac{mgR}{(Bw)^2} \right\} e^{-\frac{(Bw)^2}{R}(t-t_1)}$$

を得る. また, $I = \frac{Bw}{R}v$ より $t_1 \leq t \leq t_2$ では,

$$I = \frac{mg}{Bw} + \left(\frac{v_1 Bw}{R} - \frac{mg}{Bw} \right) e^{-\frac{(Bw)^2}{R}(t-t_1)}$$

となる.

【補足3】問(2)のエネルギー収支の式の導出

回路の運動方程式, およびキルヒホッフ則は,

$$\begin{cases} Ma = Mg - IBw, \\ \frac{q}{C} = vBw. \end{cases}$$

運動方程式に速度 v , キルヒホッフ則に電流 $I = \frac{dq}{dt}$ をかけ2式足し合わせると,

$$Mv \frac{dv}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = Mgv \quad \therefore \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Mv^2 \right)}_{\text{運動エネルギーの時間変化率}} + \underbrace{\frac{d}{dt} (-mgy)}_{\text{位置エネルギーの時間変化率}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right)}_{\text{静電エネルギーの時間変化率}} = 0$$

となりエネルギー収支の式を得る. ここで, キルヒホッフ則より $q = CBwv$ であるから v を消去し, 両辺 t で積分すれば,

$$\Delta \left\{ \frac{1}{2} M \left(\frac{q}{CBw} \right)^2 \right\} + \Delta \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) + \Delta (-Mgy) = 0$$

を得る.

3 熱力学（複数系，熱あり過程，断熱過程）

【メモ】

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題。定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定。内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算。

・問(2)の(c)以降は，B 室に限り準静的な断熱過程に関する問題。準静的な断熱過程では，ポアソンの公式から圧力か体積の決定，状態方程式から温度の決定。熱力学第 1 法則は仕事の決定方程式となる。

【解答】

問(1) ピストンのつりあい，および各室の状態方程式は，

$$\begin{cases} 0 = p_A S - kx - p_B S, \\ \begin{cases} A : p_A S(L+x) = RT_A, \\ B : p_B S(L-x) = RT_B. \end{cases} \end{cases}$$

(a) A 室の状態方程式より，

$$p_A = \frac{RT_A}{S(L+x)}.$$

(b) つりあいの式は $0 = p_A S - kx - p_B S$.

(c) B 室の状態方程式より， $x = \frac{L}{2}$ とし，

$$T_{B1} = \frac{1}{3}T_A - \frac{kL^2}{4R}.$$

問(2) 状態 2 におけるピストンのつりあい，および各室の状態方程式と，状態 3 におけるピストンのつりあい，各室の状態方程式，および状態 2 → 3 でのポアソンの公式はそれぞれ，

$$\text{状態 2 : } \begin{cases} 0 = p_{A2}S - k\left(\frac{1}{2}L - D\right) - p_{B2}S, \\ \begin{cases} A : p_A \cdot \frac{3}{2}SL = RT_A, \\ B : p_B \cdot \frac{1}{2}SL = RT_{B2}. \end{cases} \end{cases} \quad \text{状態 3 : } \begin{cases} 0 = p_{A3}S - p_{B3}S, \\ \begin{cases} A : p_{A3}SL = RT_A, \\ B : p_{B3}SL = RT_{B3}, \\ p_{B3}(SL)^\gamma = p_{B2}\left(\frac{1}{2}SL\right)^\gamma. \end{cases} \end{cases}$$

(a) 状態 1 から状態 2 では体積一定ゆえ，両室の内部気体のする仕事はともに 0 である。B 室の熱力学第 1 法則より，

$$Q = \frac{3}{2}R(T_{B2} - T_{B1}) \quad \therefore T_{B2} = \frac{1}{3}T_A - \frac{kL^2}{4R} + \frac{2Q}{3R}.$$

(b) B 室の状態方程式より,

$$\begin{cases} p_{B1} \cdot \frac{1}{2}SL = RT_{B1}, \\ p_{B2} \cdot \frac{1}{2}SL = RT_{B2} \end{cases} \quad \therefore \Delta p = p_{B2} - p_{B1} = \frac{4Q}{3SL}.$$

(c) A 室内は温度 T_A で一定ゆえ, 内部エネルギー変化は

$$\Delta U_A = \frac{3}{2}R(T_A - T_A) = 0.$$

(d) ポアソンの公式より,

$$p_{B3} = \frac{1}{2^\gamma} p_{B2}.$$

(e) ポアソンの公式の結果に状態 2 における B 室の状態方程式を代入して,

$$p_{B3} = \frac{1}{2^\gamma} p_{B2} = \frac{1}{2^{\gamma-1}} \frac{R}{SL} \left(\frac{1}{2}T_A - \frac{kL^2}{4R} + \frac{2Q}{3R} \right).$$

ここで, つりあいの式 $p_{A3} = p_{B3}$, および A 室の状態方程式より^{*13},

$$\underbrace{\frac{RT_A}{SL}}_{=p_{A3}} = \underbrace{\frac{1}{2^{\gamma-1}} \frac{R}{SL} \left(\frac{1}{2}T_A - \frac{kL^2}{4R} + \frac{2Q}{3R} \right)}_{=p_{B3}} \quad \therefore Q = \frac{1}{2} \underbrace{(3 \cdot 2^{\gamma-1} - 1) RT_A + \frac{3}{8}kL^2}.$$

(f) 支柱の始状態 X_0 からの移動量が d のとき, ばねの伸びは $x - d$ と表される. このとき, 状態 2 からこの途中の状態におけるピストンのつりあい, 各室の状態方程式, およびポアソンの公式より^{*14},

$$\begin{cases} 0 = p_A S - p_B S - k(x - d), \\ \begin{cases} A : p_A S(L + x) = RT_A, \\ B : p_B S(L - x) = RT_B, \end{cases} \\ p_B \{S(L - x)\}^\gamma = p_{B2} \left(\frac{1}{2}SL \right)^\gamma \end{cases} \quad \therefore d = x + \frac{RT_A}{kL} \left\{ \left(\frac{L}{L - x} \right)^\gamma - \frac{L}{L + x} \right\}.$$

^{*13} 状態 2 の各種方程式とこの Q の表式から D を求めることができる: $D = \left(2^\gamma - \frac{2}{3} \right) \frac{RT_A}{kL} + \frac{1}{2}L.$

^{*14} 途中計算で $p_{B2} = \frac{2R}{SL} \left(\frac{1}{3}T_A - \frac{kL^2}{4R} + \frac{2Q}{3R} \right)$, $Q = \frac{3}{2} (2^{\gamma-1} - 1) RT_A + \frac{3}{8}kL^2$ を用いた. 方針はまず p_{B2} に Q を代入する. その p_{B2} をポアソンの公式へ代入し p_B を求める. この p_B と, A 室の状態方程式から求めた p_A をつりあいの式へ代入する.

2024 年度 解答

1 時間追跡（等加速度運動，単振動），衝突

【メモ】

・等加速度運動，単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動である．問(1)では単振動のエネルギー^{*15}，問(2)では単振動の時間追跡，問(3)は等加速度運動の時間追跡である．
 ・衝突は以下の2式を連立．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{外力のない方向成分の運動量保存則} \\ \text{問題文で指示された条件} \end{array} \right.$$

本問のような固定面との衝突の場合，物体と固定面からなる系において衝突の際面を固定させるために衝突方向に外力から力積を受けるため，物体と固定面からなる系の運動量の衝突方向成分は保存しない．

【解答】

問(1) (a) 公式より，

$$E = \frac{1}{2}kd^2.$$

(b) 物体とばねからなる系の力学的エネルギー保存則より^{*16}

$$\frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2 = \frac{1}{2}M \cdot 0^2 + \frac{1}{2}kd^2 \quad \therefore V_0 = d\sqrt{\frac{k}{M}}.$$

また，衝突後の速さは，衝突の条件（はね返り係数の式）より^{*17}，

$$V - 0 = -e(V_0 - 0) \quad \therefore V_1 = |V| = ed\sqrt{\frac{k}{M}}.$$

(c) 単振動の周期は $2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ であるから，

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

問(2) (a) 静止摩擦力の大きさを R とする．運動方程式より，

$$\left\{ \begin{array}{l} ma = -R, \\ Ma = -kx + R \end{array} \right. \quad \therefore a = -\frac{k}{M+m}x, \quad R = \frac{m}{M+m}kx.$$

^{*15} 時間追跡でもよいが手間である．

^{*16} 物体のエネルギー収支： $\frac{1}{2}MV_0^2 - \frac{1}{2}M \cdot 0^2 = \int_d^0 (-kx) dx$ ．

^{*17} 物体と壁からなる系には壁を固定するための外力がはたらくため運動量は保存しない．

よって, x が最大値を取るとき R も最大値を取り, R が最大値を取るときに最大摩擦を超えていなければ滑りは生じないため*18,

$$\frac{m}{M+m}kd < \mu N = \mu mg \quad \therefore \mu > \frac{kd}{(M+m)g} (= \mu_c).$$

(b) 台車上の物体が台車から受ける垂直抗力の大きさは mg ゆえ, 各物体の運動方程式は*19,

$$\begin{cases} ma = \mu' mg, \\ Ma' = -kx - \mu' mg. \end{cases}$$

(c) 運動方程式より,

$$a' = -\frac{k}{M} \left(x + \frac{\mu' mg}{k} \right)$$

であり, 振動中心 $x_0 = -\frac{\mu' mg}{k}$, 角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ の単振動を行う。

問(3) (a) 運動方程式より,

$$\begin{cases} ma = \mu' mg, \\ MA = -\mu' mg \end{cases} \quad \therefore a = \mu' g, \quad A = -\mu' \frac{m}{M} g.$$

$t = 0$ (1 回目の衝突時) で $X(0) = 0$, $V(0) = ev_0$, $v(0) = -v_0$ ゆえ,

$$\begin{cases} V = ev_0 - \mu' \frac{m}{M} gt, \\ v = -v_0 + \mu' gt. \end{cases}$$

(b) 時刻 t における台車の位置 X は,

$$X = ev_0 t - \frac{1}{2} \frac{\mu' mg}{M} t^2.$$

$X = 0$ を解いて,

$$ev_0 t - \frac{1}{2} \frac{\mu' mg}{M} t^2 = 0 \quad \therefore t = \frac{2Mev_0}{\mu' mg} (= T').$$

(c) $0 < t < T'$ で常に $v < V$ であればよく*20,

$$-v_0 + \mu' gt < ev_0 - \mu' \frac{m}{M} gt \quad \therefore (0 <) t < (1+e) \frac{M}{M+m} \frac{v_0}{\mu' g} (= T^*).$$

*18 台車上の物体の鉛直方向の運動方程式より垂直抗力の大きさは mg である.

*19 接触面に対し, 台車は右へ, 物体は左へ滑る.

*20 v, V はともに速度であることに注意.

$0 < t < T^*$ の中に $0 < t < T'$ がすっぽり収まるように取れば $0 < t < T'$ で常に $v < V$ が成り立つ。よって、 $T' < T^*$ を解いて、

$$\frac{2Mev_0}{\mu'mg} < (1+e) \frac{M}{M+m} \frac{v_0}{\mu'g} \quad \therefore e < \underbrace{\frac{m}{2M+m}}$$

(d) 2~3 回目 : 2 回目衝突直前の速度は

$$V = ev_0 - \mu' \frac{m}{M} g \cdot \frac{2Me}{\mu'mg} v_0 = -ev_0$$

より、衝突直後の速度は $e^2 v_0$ である*21。よって、衝突 2~3 回目の時間 t_2 は、

$$t_2 = eT' (= et_1).$$

以上より、 n 回目から $n+1$ 回目の衝突時間間隔 t_n は、

$$t_n = et_{n-1} = e^{n-1}T'$$

であり、

$$T'' = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n-1}T' = \underbrace{\frac{1}{1-e}} T'.$$

*21 $X=0$ を解けばよい (が、初速が e 倍であることから時間間隔も e 倍となる)。

2 電気回路（抵抗，コンデンサ），コンデンサの中身

【メモ】

- ・電気回路の状態は，キルヒホッフ則，電荷保存則，素子の性質によって一意に決まる．
- ・問(1)，問(2)はコンデンサと抵抗のみの電気回路の問題．
- ・問(3)は誘電体の挿入を考えるコンデンサと抵抗のみの電気回路の問題．
- ・ジュール熱 J の計算は以下のように行う．

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I \text{ 一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I \text{ 一定でないとき}). \end{cases}$$

【解答】

問(1) (a) 十分時間経過ゆえコンデンサに流れ込む電流は 0 である．キルヒホッフ則より，

$$V - ri - \frac{q_1}{C_A} = 0 \quad \therefore q_1 = C_A V_0 = \frac{\varepsilon_0 \ell^2 V_0}{d}.$$

また，電池のした仕事は公式より，

$$W_1 = q_1 V_0 = \frac{\varepsilon_0 \ell^2 V_0^2}{d}.$$

(b) キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} \frac{q_A}{C_A} - ri_1 - \frac{q_B}{C_B} = 0, \\ q_A + q_B = C_A V_0. \end{cases}$$

直後 $q_A = C_A V_0$ ， $q_B = 0$ より，

$$i_1 = \frac{V_0}{r}.$$

なお，十分時間経過後の帯電量は $i_1 = 0$ より，

$$q_A = \frac{C_A^2}{C_A + C_B}, \quad q_B = \frac{C_A C_B}{C_A + C_B}.$$

(c) 回路のエネルギー収支より，

$$\begin{aligned} h_1 = -\Delta U &= - \left\{ \frac{1}{2C_A} \left(\frac{C_A^2}{C_A + C_B} \right)^2 - \frac{(C_A V_0)^2}{2C_A} \right\} - \left\{ \frac{1}{2C_A} \left(\frac{C_A C_B}{C_A + C_B} \right)^2 - 0 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{C_A C_B}{C_A + C_B} V_0^2 \\ &= \frac{\varepsilon_0 \ell^2 V_0^2}{4d}. \end{aligned}$$

問(2) $t = 0$ で $q_A = \frac{\varepsilon_0 \ell^2 V_0}{d}$, $q_B = \frac{\varepsilon \ell^2 V_0}{d}$ であり, キルヒホッフ則は,

$$\begin{cases} V(t) - ri_1 - \frac{q_A}{C_A} = 0, \\ V(t) - ri_1 - ri_2 - \frac{q_B}{C_B} = 0. \end{cases}$$

(a) キルヒホッフ則より, $V_1(t) = \frac{q_A}{C_A}$, $V_2(t) = \frac{q_B}{C_B}$ ゆえ,

$$V_1(t) = \underbrace{V(t) - ri_1(t)}, \quad V_2(t) = \underbrace{V(t) - r(i_1(t) + i_2(t))}.$$

(b) $\frac{dq_A}{dt} = i_1 - i_2$, $\frac{dq_B}{dt} = i_2$ より,

$$\begin{cases} V(t) - ri_1 - \frac{q_A}{C_A} = 0, \\ V(t) - ri_1 - ri_2 - \frac{q_B}{C_B} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{\Delta V(t)}{\Delta t}}_{=0} - 0 - \frac{1}{C_A} \frac{\Delta q_A}{\Delta t} = 0, \\ \underbrace{\frac{\Delta V(t)}{\Delta t}}_{=0} - 0 - 0 - \frac{1}{C_B} \frac{\Delta q_B}{\Delta t} = 0 \end{cases} \quad \therefore \Delta q_A = \frac{\alpha \varepsilon_0 \ell^2}{d} \Delta t, \quad \Delta q_B = \frac{\alpha \varepsilon \ell^2}{d} \Delta t.$$

(c) 電流の定義から $\frac{dq_A}{dt} = i_1 - i_2$, $\frac{dq_B}{dt} = i_2$ より,

$$\begin{cases} \frac{dq_A}{dt} = I_1 - I_2 = \frac{\alpha \varepsilon_0 \ell^2}{d}, \\ \frac{dq_B}{dt} = I_2 = \frac{\alpha \varepsilon \ell^2}{d} \end{cases} \quad \therefore I_1 = \frac{\alpha(\varepsilon_0 + \varepsilon)\ell^2}{d}, \quad I_2 = \frac{\alpha \varepsilon \ell^2}{d}.$$

問(3) (a) 挿入長を x とすると,

$$C_B = \varepsilon_0 \frac{(\ell - x)\ell}{d} + \varepsilon \frac{\ell x}{d}$$

$$\therefore \frac{\Delta C_B}{\Delta t} = \underbrace{(\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\ell}{d}}_{=b} v.$$

(b) 題意より各抵抗に流れる電流は一定値を取る。キルヒホッフ則, および電流の定義より,

$$\begin{cases} V_0 - rI_3 - \frac{q_A}{C_A} = 0, \\ V_0 - rI_3 - rI_4 - \frac{q_B}{C_B} = 0, \\ \frac{dq_A}{dt} = I_3 - I_4, \\ \frac{dq_B}{dt} = I_4. \end{cases}$$

ここで, $\frac{dC_A}{dt} = 0$, $\frac{dC_B}{dt} = b$ を用いて,

$$\begin{cases} I_3 - I_4 = \frac{dq_A}{dt} = \frac{d}{dt}\{C_A(V_0 - rI_3)\} = 0, \\ I_4 = \frac{dq_B}{dt} = \frac{d}{dt}\{C_B(V_0 - rI_3 - rI_4)\} = b(V_0 - rI_3 - rI_4) \\ \therefore I_3 = I_4 = \frac{b}{1+2br}V_0 \quad . \end{cases} \quad (c)$$

よって, $I_4 > 0$ から (v).

(c) 前問に示した.

(d) 系のエネルギー収支 (エネルギーの時間変化率) より,

$$\begin{aligned} P_{\text{電池}} + P_{\text{外力}} &= rI_3^2 + rI_4^2 + \frac{dU_A}{dt} + \frac{dU_B}{dt} \\ \frac{b}{1+2br}V_0^2 + Fv &= 2r \left(\frac{b}{1+2br}V_0 \right)^2 + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q_A^2}{C_A} \right)}_{=0} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q_B^2}{C_B} \right)}_{= \frac{q_B}{C_B} I_4 - \frac{1}{2} \left(\frac{q_B}{C_B} \right)^2 \frac{dC_B}{dt}} \\ \therefore F &= \underbrace{-\frac{bV_0^2}{2v} \left(\frac{1}{1+2br} \right)^2}_{\text{(右向き)}} \end{aligned}$$

【補足】問(3)の微分方程式を解くことについて

微分方程式を解く方法は多岐にわたるが, 結果としては解が見つければそれでよいのである. 今回の場合, 解くべき微分方程式は,

$$\begin{cases} V_0 - ri_1 - \frac{q_A}{C_A} = 0, \\ V_0 - ri_1 - ri_2 - \frac{q_B}{C_B} = 0, \\ \frac{dq_A}{dt} = i_1 - i_2, \\ \frac{dq_B}{dt} = i_2 \end{cases}$$

であり. ここで, $\frac{dC_A}{dt} = 0$, $\frac{dC_B}{dt} = b$ である.

さて, この微分方程式の解として $q_A = \alpha (= \text{const})$, $q_B = \beta t + \gamma$ を仮定してみよう. すると, $\frac{dq_A}{dt} = 0$, $\frac{dq_B}{dt} = \beta$ より下 2 式から,

$$i_1 = i_2 = \beta$$

を得て, 第 1 式

$$\frac{dq_A}{dt} = \frac{d}{dt}\{C_A(V_0 - r \underbrace{i_1}_{=\beta})\} = 0$$

と矛盾しない。また、第2式からは、

$$\frac{dq_B}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ C_B \left(V_0 - r \underbrace{i_1}_{=\beta} - r \underbrace{i_2}_{=\beta} \right) \right\} = \underbrace{\frac{dC_B}{dt}}_{=b} (V_0 - 2r\beta) = \beta \quad \therefore \beta = \frac{b}{1+2br} V_0$$

となり定数 β が決定できる。 $t=0$ において $q_A = C_A V_0 (= \alpha)$, $q_B = 0 (= \gamma)$ より、

$$q_A = C_A V_0, \quad q_B = \beta t = \frac{b}{1+2br} V_0 t$$

が求まり、以上の計算過程を見てわかる通り、これは始めに挙げた4つの微分方程式に矛盾しない解となっている。

3 固有振動, ドップラー効果・公式使用, ドップラー効果・公式導出 (時系列)

【メモ】

- ・固有振動は状況を図示して状況をそのまま立式すればよい. 一般の n に対する倍振動については, $n = 1, 2$ の規則から考えればよい.
- ・ドップラー効果は, 大きく分けて公式導出問題と公式を使い問題に分類でき, この問題は両方に問題に属する. 公式導出は時系列を考える方法である.

【解答】

問(1) (a) 管長が $\frac{5}{4}$ 波長と等しく,

$$\frac{5V}{4f} = L \quad \therefore f = \frac{5V}{4L}.$$

また, ドップラー効果の公式より,

$$f = \frac{V}{V+v_1} f_s \quad \therefore f_s = \frac{5}{4} \left(1 + \frac{v_1}{V}\right) \frac{V}{L}.$$

(b) 管長が $\frac{n}{2}$ 波長と等しく,

$$\frac{nV}{2f} = L \quad \therefore f = \frac{nV}{2L}.$$

よって, ドップラー効果の公式より,

$$\frac{nV}{2L} = \frac{V}{V-v_1} f_s \quad \therefore f_s = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{v_1}{V}\right) \frac{V}{L}.$$

(c) (a), (b) より,

$$\frac{5}{4} \left(1 + \frac{v_1}{V}\right) \frac{V}{L} = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{v_1}{V}\right) \frac{V}{L} \quad \therefore v_1 = \frac{2n-5}{2n+5} V.$$

(d) $0 < v_1 \leq \frac{2}{13} V$ より,

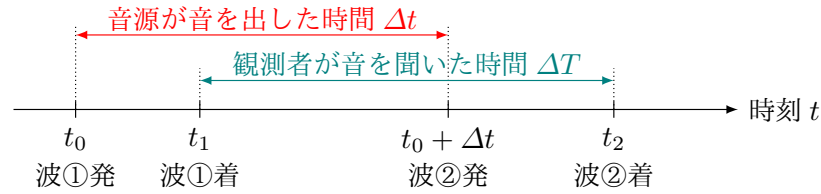
$$0 < \frac{2n-5}{2n+5} \leq \frac{2}{13}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < 2n-5, \\ 2n-5 \leq \frac{2}{13}(2n+5) \end{cases} \quad \therefore 2 + \frac{1}{2} < n \leq 3 + \frac{9}{22}$$

となり,

$$n = 3, \quad f_n = \frac{3V}{2L}, \quad f_s = \frac{15V}{11L}.$$

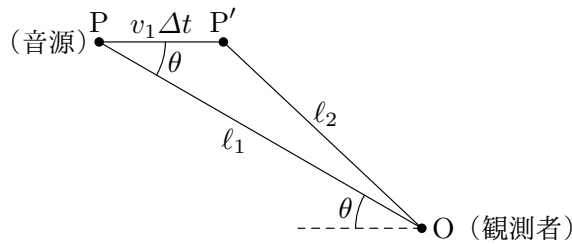
問(2) (a) 時系列は以下の図のようになっている。



状況を整理して,

$$\begin{cases} V(t_1 - t_0) = l_1, \\ V\{t_2 - (t_0 + \Delta t)\} = l_2 \end{cases} \quad \therefore t_2 - t_1 = \underbrace{\Delta t + \frac{l_2 - l_1}{V}}_{(\Delta T)}.$$

(b) 状況を整理すると以下の図のようになる。



図より,

$$l_2 = \sqrt{l_1^2 + (v_1 \Delta t)^2 - 2l_1 v_1 \Delta t \cos \theta}.$$

(c) l_2 を近似して,

$$\begin{aligned} l_2 &= \sqrt{l_1^2 + (v_1 \Delta t)^2 - 2l_1 v_1 \Delta t \cos \theta} \\ &= l_1 \sqrt{1 + \left(\frac{v_1 \Delta t}{l_1}\right)^2 - \frac{2v_1 \cos \theta}{l_1} \Delta t} \\ &\cong l_1 \sqrt{1 - \frac{2v_1 \cos \theta}{l_1} \Delta t} \\ &\cong l_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2v_1 \cos \theta}{l_1} \Delta t\right) \\ &= l_1 - v_1 \Delta t \cos \theta. \end{aligned}$$

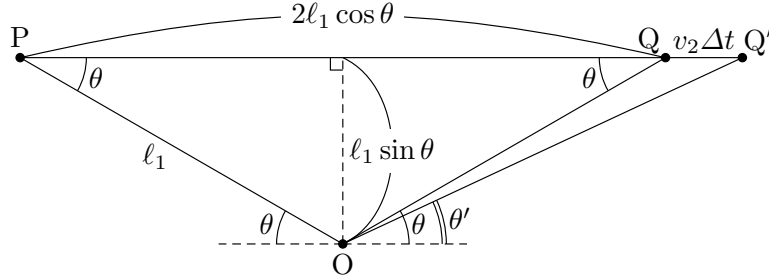
よって,

$$\Delta T = \Delta t + \frac{(l_1 - v_1 \Delta t \cos \theta) - l_1}{V} = \underbrace{\left(1 - \frac{v_1}{V} \cos \theta\right)}_{(\Delta T)} \Delta t.$$

(d) 波の個数不変より,

$$f_P \Delta T = f_s \Delta t \quad \therefore f_P = \frac{V}{V - v_1 \cos \theta} f_s.$$

問(3) (a) 状況を整理すると以下の図のようになる。



図より,

$$\begin{cases} V \Delta t = 2l_1 \cos \theta + v_2 \Delta t, \\ \tan \theta' = \frac{l_1 \sin \theta}{l_1 \cos \theta + v_2 \Delta t} \end{cases} \quad \therefore \tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{2v_2}{V - v_2} \cos \theta} = \frac{V - v_2}{V + v_2} \tan \theta.$$

(b) 公式より,

$$f_Q = \frac{V}{V + v_2 \cos \theta'} \frac{V - v_2}{V - v_1} f_s.$$

(c) $\theta = \frac{\pi}{3}$ より,

$$f_Q = \frac{V}{V + v_2 \cos \left(\frac{\pi}{3} \right)} \frac{V - v_2}{V} f_s = \frac{V - v_2}{V + v_2/2} f_s.$$

よって, $f_Q < f_s$ よりうなりの振動数を計算して,

$$f_s - \frac{V - v_2}{V + v_2/2} f_s = N \quad \therefore v_2 = \frac{2N}{3f_s - N} V.$$

2023 年度 解答

1 天体の絡む運動, 等速円運動, 単振動の時間追跡

【メモ】

・問(1)は等速円運動に関する問題. 等速円運動は, 以下の立式が定石 (今回はつりあいは $0 = 0$ と自明な式であり不要).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{運動方程式 (中心成分)} \\ \text{つりあい (←使わないことも)} \end{array} \right.$$

・等加速度運動, 単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動であり, 問(2), 問(4)では時間追跡 (運動方程式), 問(3)ではエネルギーでの誘導が付いている.

・問(2)では単振動の時間追跡, 問(3)は等加速度運動の時間追跡である. ・問(3)では仕事の計算が問われている. 仕事の計算は以下の通り.

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が既知} \rightarrow \text{定義から直接計算} \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ 一定の場合: } |f| |\Delta x| \cos \theta = \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} (\Delta \vec{x}: \text{変位}) \\ f \text{ が一定出ない場合: } (f \text{ の } x \text{ 積分}) = (f - x \text{ グラフの面積}) \end{array} \right. \\ \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が不明} \rightarrow \text{エネルギー収支から逆算} \end{array} \right.$$

【解答】

問(1) (a) 公式より,

$$F_1 = G \frac{Mm}{(R+h)^2}.$$

(b) 運動方程式 (中心成分) より,

$$m \frac{V^2}{R+h} = G \frac{Mm}{(R+h)^2} \quad \therefore V = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}.$$

(c) 速さ V で $2\pi(R+h)$ 進む時間を求めればよいので,

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{V} = 2\pi(R+h) \sqrt{\frac{R+h}{GM}}.$$

問(2) (a) 地球の密度 ρ は, 密度の定義より,

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

であるから, 半径 $r \leq R$ の球内の質量は,

$$M' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \left(\frac{r}{R}\right)^3 M.$$

(b) 前問より,

$$F_2 = -G \frac{M'm}{r^2} = -\frac{GMm}{R^3} r.$$

(c) 運動方程式より,

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{R^3} r \quad \therefore \ddot{r} = -\frac{GM}{R^3} r$$

となり, 角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$, 振動中心 $r = 0$ の単振動を行うことがわかる. 以上より周期 T_2 は,

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}}.$$

問(3) (a) 仕事の定義より,

$$W_1 = \int_{R+h}^R \left(-\frac{GMm}{r^2} \right) dr = \left[\frac{GMm}{r} \right]_{R+h}^R = \frac{GMmh}{R(R+h)}.$$

(b) 仕事の定義より,

$$W_2 = \int_R^0 \left(-\frac{GMm}{R^3} r \right) dr = \frac{1}{2} \frac{GMm}{R}.$$

(c) 物体のエネルギー収支より,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = \frac{GMmh}{R(R+h)} + \frac{1}{2} \frac{GMm}{R} \quad \therefore v = \sqrt{\left(1 + \frac{2h}{R+h}\right) \frac{GM}{R}}.$$

(d) 位置エネルギーの定義より*22,

$$\begin{aligned} U &= - \int_{\infty}^r F dr = - \left\{ \int_{\infty}^R \left(-\frac{GMm^2}{r} \right) dr + \int_R^r \left(-\frac{GMm}{R^3} r \right) dr \right\} \\ &= \left[-\frac{GMm}{r} \right]_{\infty}^R + \left[\frac{1}{2} \frac{GMm}{R^3} r^2 \right]_R^r \\ &= \frac{GMm}{2R^3} (r^2 - 3R^2). \end{aligned}$$

問(4) 小球 1, 2 の中心からの距離をそれぞれ r_1, r_2 と記す. $t: 0 \rightarrow t_0$ において, $r_1 = R, r_2 : R \rightarrow 0 \rightarrow R$ であり, $t: t_0 \rightarrow 2t_0$ において, $r_1 : R \rightarrow 0 \rightarrow R, r_2 = R$ より, 小球 1 が (お), 小球 2 が (か) となる.

*22 詳しくは【補足】を参照.

【補足】位置エネルギーの定義

物体の始状態における位置を x_{ini} ，運動エネルギーを K_{ini} ，終状態における位置を x_{fin} ，運動エネルギーを K_{fin} とする。物体にはたらく力を f とすると，物体のエネルギー収支の式は，

$$K_{\text{fin}} - K_{\text{ini}} = \int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}} f dx$$

と書ける。ここで，適当な位置 x_0 を定めると，

$$\begin{aligned} K_{\text{fin}} - K_{\text{ini}} &= \int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}} f dx \\ &= \int_{x_{\text{ini}}}^{x_0} f dx + \int_{x_0}^{x_{\text{fin}}} f dx \\ &= - \int_{x_0}^{x_{\text{ini}}} f dx + \int_{x_0}^{x_{\text{fin}}} f dx \\ \therefore K_{\text{fin}} + \left(- \int_{x_0}^{x_{\text{fin}}} f dx \right) &= K_{\text{ini}} + \left(- \int_{x_0}^{x_{\text{ini}}} f dx \right) \end{aligned}$$

のように，（終状態）＝（始状態）の形で記述することができる。両辺第2項が x_0 から x までの経路に依存せず一意に決まるとき^{*23}，物体の位置情報を含んでいることから位置エネルギーと呼び，位置エネルギーが定義できる力を保存力と呼ぶ。 x_0 は任意の位置に取ることができるため，位置エネルギー U が 0 となる位置（基準点）に定めるのが慣例である。

^{*23} 一意に決まらない例は摩擦がはたらく場合を考えてみるとよい。摩擦力の仕事の場合，始点と終点が同一であっても，その仕事の値は面上をずりずりと滑った道のりの長さに依存し，始点と終点だけでは一意に決まらない。このような場合，位置エネルギーは定義されず，このような力を非保存力と呼ぶ。

2 vBl 公式の電磁誘導, 多体系の力学

【メモ】

- ・回路の一部が動く電磁誘導は, 誘導起電力の決定では vBl の公式が基本となる.
- ・電磁誘導の問題は, ①誘導起電力の決定, ②回路の議論, ③運動の議論, ④エネルギーの議論, という作りが基本.
- ・ジュール熱 J の計算は以下のように行う.

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I \text{ 一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I \text{ 一定でないとき}). \end{cases}$$

【解答】

問(1) (a) (i) 公式より,

$$E = \underbrace{v_0 Bl}.$$

(ii) キルヒホッフ則より,

$$v_0 Bl - 2rI_1 = 0 \quad \therefore I_1 = \frac{v_0 Bl}{\underbrace{2r}}.$$

(iii) 導体棒の運動方程式 (つりあい) より,

$$m \cdot 0 = F - I_1 Bl \quad \therefore F = I_1 Bl = \frac{(Bl)^2}{\underbrace{2r}} v_0.$$

(b) キルヒホッフ則, および導体棒の運動方程式より,

$$\begin{cases} \underbrace{v_0 Bl}_{=E} - r(I_A - I_B) - rI_A = 0, \\ E_0 - rI_A - rI_B = 0, \\ (m \cdot 0 = F - (I_A - I_B)Bl) \end{cases} \quad \therefore I_A = \frac{E_0 + E}{\underbrace{3r}}, \quad I_B = \frac{2E_0 - E}{\underbrace{3r}}.$$

問(2) キルヒホッフ則, および導体棒の運動方程式は,

$$\begin{cases} v_0 Bl - (R + r)I - \frac{Q}{C} = 0, \\ m \cdot 0 = F - IB\ell. \end{cases}$$

(a) 十分時間経過後 $\frac{dQ}{dt} = 0 (= I)$ となるため, キルヒホッフ則より,

$$Q = \underbrace{Cv_0 Bl}.$$

(b) 回路のエネルギー収支より,

$$v_0 B l \Delta Q = J + \Delta \left(\frac{Q^2}{2C} \right) \quad \therefore J = v_0 B l \cdot C v_0 B l - \frac{1}{2} \frac{(C v_0 B l)^2}{C} = \frac{1}{2} C (v_0 B l)^2.$$

問(3) キルヒホッフ則, および導体棒の運動方程式は,

$$\begin{cases} v_1 B l - v_2 B l - 2r I_3 = 0, \\ m \dot{v}_1 = -I_3 B l, \\ 2m \dot{v}_2 = I_3 B l. \end{cases}$$

(a) キルヒホッフ則より,

$$v_1 B l - v_2 B l - 2r I_3 = 0 \quad \therefore I_3 = \frac{B l}{2r} (v_1 - v_2).$$

(b) 運動方程式より,

$$\begin{cases} m \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = -I_3 B l, \\ 2m \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = I_3 B l \end{cases} \quad \Delta v_1 = -\frac{I_3 B l}{m} \Delta t, \quad \Delta v_2 = \frac{I_3 B l}{2m} \Delta t.$$

(c) 題意より $\dot{v}_1 = \dot{v}_2 = 0$ であるから, 運動方程式より $I_3 = 0$ であり, キルヒホッフ則より $v_1 = v_2 (= V)$ を得る. 運動量保存則より^{*24*25},

$$mV + 2mV = mv_0 \quad \therefore V = \frac{1}{3} v_0 (= V_1 = V_2).$$

【補足 1】 問(2)の外力がした仕事

キルヒホッフ則, および導体棒の運動方程式は,

$$\begin{cases} 0 = v_0 B l - (R + r)I - \frac{Q}{C}, \\ m \cdot 0 = F - I B l. \end{cases}$$

キルヒホッフ則, および導体棒の運動方程式より, 系全体のエネルギー収支は^{*26*27},

$$0 \cdot v_0 = v_0 B l I - (R + r)I^2 - \frac{Q}{C} I + F v_0 - I B l v_0 \quad \therefore \underbrace{F v_0}_{\text{外力の仕事率}} = \underbrace{(R + r)I^2}_{\text{消費電力}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C} \right)}_{\text{静電エネルギーの時間変化率}}.$$

^{*24} 運動量保存則の導出については【補足 2】を参照.

^{*25} 誘導に従うのなら 1 つ前の結果より,

$$\Delta v_1 + 2\Delta v_2 = 0 \quad \therefore (V_1 - v_0) + 2(V_2 - 0) = 0$$

が成り立ち, これを用いればよい.

^{*26} キルヒホッフ則に電流 I を, 運動方程式に速度 $v (= v_0)$ をかけ 2 式の和を取ればよい.

^{*27} $\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C} \right)$ であることを利用.

よって、外力のする仕事 W_{ex} は設問で求めた誘導起電力のする仕事に等しく、

$$W_{\text{ex}} = v_0 B l \Delta Q = C(v_0 B l)^2.$$

なお、キルヒホッフ則は、

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{(R+r)C} (Q - C v_0 B l)$$

と空気抵抗型の微分方程式となる。この微分方程式の一般解は指数関数であり、 $t=0$ で $Q=0$ であることから、

$$Q = C v_0 B l \left(1 - e^{-\frac{1}{(R+r)C} t}\right)$$

を得る。ここで、運動方程式より、

$$F = I B l = \frac{dQ}{dt} B l = \frac{v_0 (B l)^2}{R+r} e^{-\frac{1}{(R+r)C} t}$$

となり、外力のする仕事は仕事の定義から、

$$\begin{aligned} W_{\text{ex}} &= \int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}} F dx = \int_0^{\infty} F \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\infty} \frac{(v_0 B l)^2}{R+r} e^{-\frac{1}{(R+r)C} t} dt \\ &= \left[-(R+r) C \frac{(v_0 B l)^2}{R+r} e^{-\frac{1}{(R+r)C} t} \right]_0^{\infty} \\ &= C(v_0 B l)^2 \end{aligned}$$

と求めることもできる。設問で問われたジュール熱 J も同様である。

【補足 2】 問(3)の運動量保存則

キルヒホッフ則、および導体棒の運動方程式は、

$$\begin{cases} v_1 B l - v_2 B l - 2r I_3 = 0, \\ m \dot{v}_1 = -I_3 B l, \\ 2m \dot{v}_2 = I_3 B l. \end{cases}$$

運動方程式の和を取って、

$$\begin{aligned} m \frac{dv_1}{dt} + 2m \frac{dv_2}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (m v_1 + 2m v_2) &= 0 \quad \therefore m v_1 + 2m v_2 = \text{const.} \end{aligned}$$

3 熱力学（熱あり過程，断熱過程）

【メモ】

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題。定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定。内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算。

・問(4)は準静的な断熱過程に関する問題。準静的な断熱過程では，ポアソンの公式から圧力か体積の決定，状態方程式から温度の決定。熱力学第 1 法則は仕事の決定方程式となる。

・全体的に使用する文字が統一されていなくややこしい。

【解答】

問(1) 可動部分（シリンダ，ピストン）のつりあい，および状態方程式は*28，

$$\begin{cases} \begin{cases} \text{シリンダ} : 0 = P_0 S + mg - P_1 S, \\ \text{ピストン} : 0 = P_1 S - (P_0 + \rho g d) S, \end{cases} \\ P_1 S L_1 = n R T_0. \end{cases}$$

(a) 状態方程式より，

$$L_1 = \frac{n R T_0}{\underbrace{P_1 S}}.$$

(b) つりあいの 2 式より，

$$\rho S g d = mg \quad \therefore d = \frac{m}{\underbrace{\rho S}}.$$

(c) シリンダのつりあいより，

$$P_1 = \underbrace{P_0 + \frac{mg}{S}}.$$

なお，以上より $L_1 = \frac{n R T_0}{P_0 S + mg}$ とわかる。

問(2) (a) ピストンの液面からの深さを x とする。可動部分（シリンダ，ピストン）のつりあい，および状態方程式より*29，

$$\begin{cases} \begin{cases} \text{シリンダ} : 0 = P_0 S + mg - P_2 S, \\ \text{ピストン} : 0 = P_2 S - (P_0 + \rho g x) S, \end{cases} \\ P_2 S L_2 = n R T_2 \end{cases} \quad \therefore T_2 = \frac{P_0 S + mg}{n R} L_2 = \frac{L_2}{\underbrace{L_1}} T_0.$$

*28 シリンダのつりあいから P_1 を決定→ピストンのつりあいから d ，状態方程式から L_1 を決定。

*29 シリンダのつりあいから P_2 を決定→ピストンのつりあいから x ，状態方程式から T_2 を決定。

- (b) シリンダのつりあいより気体の圧力 P は一定である。よって、気体のする仕事 W は $P-V$ 図の面積より、

$$W = \left(P_0 + \frac{mg}{S} \right) S(L_2 - L_1) = \underbrace{P_1 S(L_2 - L_1)}.$$

- (c) 熱力学第 1 法則より、

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3}{2} nR \left(\frac{L_2}{L_1} T_0 - T_0 \right) + P_1 S(L_2 - L_1) \\ &= \frac{5}{2} \left(\frac{L_2}{L_1} - 1 \right) \underbrace{P_1 S L_1}. \end{aligned}$$

- 問(3) (a) 張力の大きさを F とする。可動部分 (シリンダ, ピストン) のつりあい, および状態方程式より*30,

$$\begin{cases} \begin{cases} \text{シリンダ} : 0 = P_0 S + mg - P_3 S - F, \\ \text{ピストン} : 0 = P_3 S - P_0 S, \\ P_3 S L_3 = nRT_0 \end{cases} & \therefore L_3 = \frac{nRT_0}{P_0 S} = \frac{P_1}{P_0} L_1. \end{cases}$$

- (b) ピストンのつりあい, および状態方程式より*31,

$$\begin{cases} 0 = P_L S - \{P_0 + \rho g(L - L_3)\} S, \\ P_L S L = nRT \end{cases} \quad \therefore P_L = \underbrace{P_0 + \rho g(L - L_3)}.$$

- (c) $P-V$ 図の面積より、

$$W = \int_{L_2}^{L_3} \{P_0 + \rho g(L - L_3)\} S dL = P_0 S(L_3 - L_2) - \frac{1}{2} \rho g S(L_3 - L_2)^2.$$

ここで, $d = L_2 - L_3$, $d = \frac{m}{\rho S}$, $P_1 S = P_0 S + mg$ より,

$$W = P_0 S(L_3 - L_2) - \frac{1}{2} \rho g S(L_3 - L_2)^2 = -P_0 S d - \frac{1}{2} \rho S g d^2 = -\frac{1}{2} (P_0 + P_1) S d.$$

よって, 気体のされた仕事 W' は,

$$W' = -W = \frac{1}{2} \underbrace{(P_0 + P_1) S d}.$$

- (d) 気体の内部エネルギー変化は,

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(T_0 - T_2) = \frac{3}{2} nR \left(T_0 - \frac{L_2}{L_1} T_0 \right) = \frac{3}{2} P_1 S(L_1 - L_2) = -\frac{3}{2} W.$$

よって, 熱力学第 1 法則より,

$$Q = \Delta U + W = -\frac{3}{2} W - W' \quad \therefore Q' = -Q = \underbrace{W' + \frac{3}{2} W}.$$

*30 ピストンのつりあいから P_3 を決定→シリンダのつりあいから F , 状態方程式から L_3 を決定.

*31 ピストンのつりあいから P_L を決定→状態方程式から T を決定.

問(4) ピストンの液面からの深さを x とする. 可動部分 (シリンダ, ピストン) のつりあい, ポアソンの公式, および状態方程式は*32*33*34,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \text{シリンダ} : 0 = P_0 S + mg - P_4 S, \\ \text{ピストン} : 0 = P_4 S - (P_0 + \rho g x) S, \end{array} \right. \\ P_4 (SL_4)^{\frac{5}{3}} = P_3 (SL_3)^{\frac{5}{3}} = P_0 (SL_3)^{\frac{5}{3}}, \\ P_4 SL_4 = nRT_4. \end{array} \right.$$

$$L_3 = \frac{P_1}{P_0} L_1, \quad P_1 S = P_0 S + mg \text{ より},$$

$$\begin{aligned} \left(P_0 + \frac{mg}{S} \right) L_4^{\frac{5}{3}} &= P_0 L_3^{\frac{5}{3}} = P_0 \left(\frac{P_0 + mg/S}{P_0} L_1 \right)^{\frac{5}{3}} \\ \therefore L_4 &= \left(\frac{P_0 + mg/S}{P_0} \right)^{\frac{2}{5}} L_1 = \underbrace{\left(1 + \frac{mg}{P_0 S} \right)^{\frac{2}{5}}}_{>1} L_1. \end{aligned}$$

よって, $L_4 > L_1$ であり (あ).

*32 シリンダのつりあいから P_4 を決定→ピストンのつりあいから x , ポアソンの公式から L_4 , 状態方程式から T_4 を決定.

*33 $L_3 = \left(1 + \frac{mg}{P_0 S} \right) L_1$ より, $L_3 > L_4$ である. このことから体積は減少しており, この過程において気体のする仕事が負になることがわかる (1つ下の脚注で計算している).

*34 この過程で気体が外部にした仕事: $W = -\Delta U = -\frac{3}{2} nR(T_4 - T_0) = -\frac{3}{2} \left\{ \left(1 + \frac{mg}{P_0 S} \right)^{\frac{2}{5}} - 1 \right\} nRT_0$.
 ▶<https://koremura.net/>

2022 年度 解答

1 単振動（エネルギー，時間追跡），等加速度運動（時間追跡），動く座標系

【メモ】

・等加速度運動，単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動である．問(1)では単振動のエネルギー*35，問(2)では動く座標系内部における等加速度運動の時間追跡，問(3)は等加速度運動，および単振動の時間追跡である．

・解答は物体のエネルギー収支で作成したが，力学的エネルギー収支を考えてもよい．エネルギーを論じる際はどこまでを1つの系と見做すかに意識を向ける．

【解答】

問(1) (a) つりあいより，

$$m \cdot 0 = -kx_0 + mg \sin \theta \quad \therefore x_0 = \frac{mg}{k} \sin \theta .$$

(b) 物体のエネルギー収支より，

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mg\ell_0 \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}_{=\sin\theta} \quad \therefore V = \sqrt{2g\ell_0 \sin\theta} .$$

(c) 始状態の位置を x_{ini} ，終状態の位置を x_{fin} とする．物体のエネルギー収支を計算して，

$$\begin{aligned} K_{\text{fin}} - K_{\text{ini}} &= \int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}} (-kx + mg \sin \theta) dx \\ &= -\frac{1}{2}kx_{\text{fin}}^2 + mgx_{\text{fin}} \sin \theta + \frac{1}{2}kx_{\text{ini}}^2 - mgx_{\text{ini}} \sin \theta \\ \therefore K_{\text{fin}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_{\text{fin}}^2 - mgx_{\text{fin}} \sin \theta}_{=U_{\text{fin}}} &= K_{\text{ini}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_{\text{ini}}^2 - mgx_{\text{ini}} \sin \theta}_{=U_{\text{ini}}} \end{aligned}$$

となる．よって，位置エネルギーは，

$$U = \frac{1}{2}kx^2 - mgx \sin \theta .$$

*35 時間追跡でもよいが手間である．

(d) 折り返しゆえ $v = 0$ より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \left(\sqrt{2g\ell_0 \sin \theta} \right)^2 &= \int_0^x (-kx + mg \sin \theta) dx \\ -mg\ell_0 \sin \theta &= -\frac{1}{2}kx^2 + mgx \sin \theta \\ x^2 - \underbrace{\frac{2mg}{k} \sin \theta x}_{=2x_0} - \underbrace{\frac{2mg}{k} \sin \theta \ell_0}_{=2x_0} &= 0 \\ \therefore x &= \underbrace{\frac{mg}{k} \sin \theta \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2k\ell_0}{x_0}} \right)} \end{aligned}$$

問(2) (a) 台固定系でのつりあいより*36,

$$\begin{cases} m \cdot 0 = -kd + mg \sin \phi + mA \cos \phi, \\ m \cdot 0 = -mg \cos \phi + mA \sin \phi \end{cases} \quad \therefore A = \frac{g}{\tan \phi}, \quad d = \frac{mg}{k \sin \phi}.$$

(b) 台固定系（水平右向きに X 軸，鉛直上向きに Y 軸を定める）における物体の運動方程式より，台に対する物体の相対加速度は，

$$\begin{cases} m\ddot{X} = mA, \\ m\ddot{Y} = -mg \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{X} = A, \\ \ddot{Y} = -g \end{cases}$$

と求まり，糸が切れた時刻を $t = 0$ とすると相対初速度は $\dot{X}(0) = 0$ ， $\dot{Y}(0) = 0$ となり，相対初期位置を $X(0) = Y(0) = 0$ と取れば，

$$\begin{cases} X(t) = \frac{1}{2}At^2, \\ Y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \therefore Y = -\frac{g}{A}X$$

となり (う) のグラフが適当.

問(3) (a) 運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = mg \sin \theta + \mu N, \\ m \cdot 0 = N - mg \cos \theta \end{cases} \quad \therefore a = \underbrace{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)}.$$

(b) 物体のエネルギー収支より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= mg\ell_1 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \mu mg \cos \theta \ell_1 \cos \pi \\ &= -mg\ell_1 (\sin \theta + \mu \cos \theta) \\ \therefore \ell_1 &= \frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu \cos \theta)} = \frac{v_0^2}{\underline{2a}}. \end{aligned}$$

*36 地面固定系での運動方程式： $\begin{cases} m(-A) = -kd \cos \phi, \\ m \cdot 0 = kd \sin \phi - mg. \end{cases}$

(c) 物体のエネルギー収支より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= mg\ell_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \mu N\ell_1 \cos\pi \\ &= mg \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu \cos\theta)} (\sin\theta - \mu \cos\theta) \\ \therefore v &= v_0 \sqrt{\frac{\sin\theta - \mu \cos\theta}{\sin\theta + \mu \cos\theta}} (= v_1). \end{aligned}$$

(d) 物体のエネルギー収支より,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv_{N-1}^2 = -mg\ell_N \sin\theta - \mu mg\ell_N \cos\theta, \\ \frac{1}{2}mv_N^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mg\ell_N \sin\theta - \mu mg\ell_N \cos\theta \end{cases}$$

$$\therefore v_N = \sqrt{2g(\sin\theta - \mu \cos\theta)\ell_N} = v_{N-1} \sqrt{\frac{\sin\theta - \mu \cos\theta}{\sin\theta + \mu \cos\theta}} = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^N v_0.$$

(e) $v_N = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^N v_0$ より, $N \rightarrow \infty$ で $v_N \rightarrow 0$ となり, このとき $\ell_N \rightarrow 0$ である^{*37}. $v_N = 0$ となった時刻を $t = 0$ としたとき, $v(0) = 0$, $x(0) = 0$ である. 摩擦のない面における物体の運動方程式は,

$$m\ddot{x} = -kx + mg \sin\theta \quad \therefore \ddot{x} = -\frac{mg}{k} \left(x - \frac{mg}{k} \sin\theta\right)$$

となり, 物体の位置 x は位置 $x = \frac{mg}{k} \sin\theta$ を中心に単振動を行い, 初期条件を考慮すれば時刻 t における物体の位置 x は

$$x = \frac{mg}{k} \sin\theta \left\{ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \right\}$$

と表され, $x < 0$ に到達することはない. よって, グラフは (ア) が適当.

^{*37} $\ell_N = \frac{v_N^2}{2g(\sin\theta - \mu \cos\theta)}$ より.

2 vBl 公式の電磁誘導, 単振動

【メモ】

- ・回路の一部が動く電磁誘導は, 誘導起電力の決定では vBl の公式が基本となる. また, 磁場が仕事をしないことにより, 誘導起電力の仕事 (仕事率) とアンペール力のする仕事 (仕事率) は相殺する.
- ・電磁誘導の問題は, ①誘導起電力の決定, ②回路の議論, ③運動の議論, ④エネルギーの議論, という作りが基本.
- ・単振動に関する問題. 等加速度運動, 単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動である.

【解答】

問(1) (a) キルヒホッフ則より,

$$V - RI = 0 \quad \therefore I = \frac{V}{R}, \quad F_0 = -IB\ell = -\frac{VB\ell}{R}.$$

(b) キルヒホッフ則, および導体棒のつりあいより,

$$\begin{cases} V - RI = 0, \\ m \cdot 0 = -kx_0 - IB\ell \end{cases} \quad \therefore x_0 = -\frac{VB\ell}{kR}.$$

問(2) キルヒホッフ則, 電流の定義, および導体棒の運動方程式は,

$$\begin{cases} vB\ell + \frac{Q}{C} = 0, \\ I = -\frac{dQ}{dt}, \\ ma = -kx - IB\ell. \end{cases}$$

(a) 公式, およびキルヒホッフ則より,

$$V_1 = vB\ell, \quad Q = -CvB\ell.$$

(b) 物体, ばね, コンデンサからなる系の力学的エネルギーは,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}C(vB\ell)^2.$$

(c) 力学的エネルギー保存則より,

$$E = \frac{1}{2}\{m + C(B\ell)^2\}v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

と書け、質量 $m + C(B\ell)^2$ 、ばね定数 k のばね振り子と見做せる。したがって、振動の周期 T は、

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m + C(B\ell)^2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m + C(B\ell)^2}{k}}.$$

問(3) キルヒホッフ則、および導体棒の運動方程式より、

$$\begin{cases} vB\ell - L\frac{dI}{dt} = 0, \\ ma = -kx - IB\ell. \end{cases}$$

(a) キルヒホッフ則より、

$$V_2 = |vB\ell| = L \left| \frac{\Delta I}{\Delta t} \right|.$$

(b) キルヒホッフ則より、

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = B\ell \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \therefore \Delta I = \underbrace{\frac{B\ell}{L}}_{=c} \Delta x.$$

(c) $t = 0$ で $I(0) = 0$ (コイルの性質：電流の連続性)、 $x(0) = x_1$ であり、前問より、

$$\begin{aligned} I(t) - I(0) &= \frac{B\ell}{L} \{x(t) - x(0)\} \\ I &= \frac{B\ell}{L} (x - x_1) \quad \therefore \alpha = \frac{B\ell}{L}, \quad \beta = \underline{x_1}. \end{aligned}$$

(d) $I = \frac{B\ell}{L} (x - x_1)$ より、

$$F = -kx - \frac{(B\ell)^2}{L} (x - x_1) = - \left\{ k + \frac{(B\ell)^2}{L} \right\} \left(x - \frac{(B\ell)^2}{kL + (B\ell)^2} x_1 \right).$$

(e) 運動方程式より導体棒は角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{kL + (B\ell)^2}{mL}}$ 、振動中心 $x = \frac{(B\ell)^2}{kL + (B\ell)^2} x_1 (= x_c)$ の単振動を行い、その位置 x 、および速度 v は未知定数 C, D を用いれば

$$\begin{cases} x = x_c + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t), \\ v = \omega C \cos(\omega t) - \omega D \sin(\omega t) \end{cases}$$

と書ける。初期条件 $x(0) = x_1, v(0) = 0$ より、

$$\begin{cases} x_1 = x_c + C \sin 0 + D \cos 0, \\ 0 = \omega C \cos 0 - \omega D \sin 0 \end{cases} \quad \therefore C = 0, \quad D = x_1 - x_c.$$

よって,

$$\begin{cases} x = x_c + (x_1 - x_c) \cos(\omega t), \\ v = -\omega(x_1 - x_c) \sin(\omega t) \end{cases}$$

であり, $\omega = \sqrt{\frac{kL + (Bl)^2}{mL}}$, $x_c = \frac{(Bl)^2}{kL + (Bl)^2} x_1$ と戻せば*38,

$$\begin{aligned} I &= \frac{Bl}{L} \left[\left\{ \frac{(Bl)^2}{kL + (Bl)^2} x_1 + \frac{kL}{kL + (Bl)^2} x_1 \cos\left(\sqrt{\frac{kL + (Bl)^2}{mL}} t\right) \right\} - x_1 \right] \\ &= \frac{Bl}{L} \left[\frac{kL}{kL + (Bl)^2} x_1 \left\{ -1 + \cos\left(\sqrt{\frac{kL + (Bl)^2}{mL}} t\right) \right\} \right] \\ \therefore |I|_{\max} &= \underbrace{-\frac{2kBlx_1}{kL + (Bl)^2}} \end{aligned}$$

【補足】問(2)を運動方程式から確認

キルヒホッフ則, および運動方程式は,

$$\begin{cases} vBl + \frac{Q}{C} = 0, \\ ma = -kx - IB\ell. \end{cases}$$

キルヒホッフ則の両辺を t で微分して,

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{dv}{dt} CBl = aCBl.$$

よって, 運動方程式より,

$$\begin{aligned} ma &= -kx - aC(Bl)^2 \\ \{m + C(Bl)^2\}a &= -kx \quad \therefore a = -\frac{k}{m + C(Bl)^2}x \end{aligned}$$

となり, 角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m + C(Bl)^2}}$, 振動中心 $x = 0$ の単振動を行うことがわかる.

なお, 電磁誘導において, コンデンサは仮想的な質量の増加に, コイルは仮想的なばね定数の増加に寄与することは覚えておくとよい.

*38 $x_1 < 0$ に注意.

3 波（干渉），原子（ブラッグ干渉）

【メモ】

・前半は光波の干渉に関する問題．後半は X 線の干渉．干渉条件は m を整数として，

$$(\text{位相差}) = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強め合い}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱め合い}) \end{cases}$$

と計算するようにする．位相差は $\frac{2\pi}{\lambda}$ (経路差) に反射による位相のずれを加減すればよい*39.

【解答】

問(1) (a) (i) 経路差は図より，

$$\begin{aligned} \Delta L = L_2 - L_1 &= \sqrt{L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2} \\ &= L \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{x + d/2}{L}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{x - d/2}{L}\right)^2} \right\} \\ &\approx L \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x + d/2}{L}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x - d/2}{L}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{xd}{L}. \end{aligned}$$

(ii) 位相差が 2π の整数倍となるとき強め合い，

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a_k d}{L} = 2\pi k \quad \therefore a_k = \frac{L\lambda}{d} k.$$

(iii) 原点に最も近い $x > 0$ の位置で観測される暗線の位相差は π ゆえ，

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{bd}{L} = \pi \quad \therefore b = \frac{L\lambda}{2d}.$$

(b) 板 F を置く前，原点 O では位相差 0 の 2 つの波の合成波が観測され，その振幅は $2E_0$ である．原点 O で観測されていた光強度は比例定数を k とすれば，

$$I_0 = k(2E_0)^2 = 4kE_0^2.$$

さて，位置 $x = a_1$ において 2 つの波は同位相であり，観測される波の振幅は $E_0 + rE_0$ となる．翻って，位置 $x = b$ では 2 つの波の位相差は π (逆位相) であり，観測される波の振幅

*39 屈折率 n の媒質中では波長 λ を $\frac{\lambda}{n}$ とする．

は $E_0 - rE_0$ となる。したがって、

$$I(a_1) = k(E_0 + rE_0)^2 = \frac{I_0}{4E_0^2}(1+r)^2 E_0^2 = \underbrace{\left(\frac{1+r}{2}\right)^2}_{\text{~~~~~}} I_0,$$

$$I(b) = k(E_0 - rE_0)^2 = \underbrace{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2}_{\text{~~~~~}} I_0.$$

問(2) (a) (i) 経路差は図より、

$$\Delta\ell = \underbrace{2D \sin \theta}_{\text{~~~~~}}.$$

(ii) 位相差が 2π の整数倍となるとき強め合い、

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2D \sin \theta = 2\pi m \quad \therefore \underbrace{2D \sin \theta}_{\text{~~~~~}} = m\lambda.$$

(b) このとき経路差は $\frac{2D}{\sqrt{2}}$ となり、問(2)(a)と同様に考えれば、

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2 \frac{D}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi m \quad \therefore D = m\lambda = m \times 1.54 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

よって、 $2.0 \times 10^{-10} \text{ m} < D < 4.0 \times 10^{-10} \text{ m}$ より、

$$\underbrace{\frac{2.0}{1.54}}_{=1.3...} < m < \underbrace{\frac{4.0}{1.54}}_{=2.6...} \quad \therefore m = 2.$$

以上より、

$$D = 2 \times 1.54 \times 10^{-10} \text{ m} = \underbrace{3.1 \times 10^{-10} \text{ m}}_{\text{~~~~~}}.$$

(c) 観測される X 線の強度 I は、原子 A のみからなる格子面からの散乱 X 線 X_1 と格子面 B のみからなる格子面からの散乱 X 線 X_2 の合成波の振幅を A 、比例定数を k としたとき、

$$I = kA^2$$

となる。位相差が π の奇数倍（逆位相）となる方向での観測強度を I_{odd} 、位相差が π の偶数倍（同位相）となる方向での観測強度を I_{even} とするとき、

$$I_{\text{odd}} = k(A_1 - A_2)^2 = k(1-r)^2 A_1^2,$$

$$I_{\text{even}} = k(A_1 + A_2)^2 = k(1+r)^2 A_1^2$$

である*40。このことから奇数倍の方向では弱い強め合い、偶数倍の方向では強い強め合いが観測される。 $\theta > 0$ より位相差は 0 より大きな値を取ることから、最初に観測されるピーク

*40 詳しい話は【進んだ補足】を参照。

(強め合う位置) は位相差が π のときで、

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta \ell' = \pi \quad \therefore \Delta \ell' = \frac{\lambda}{2}.$$

- (d) 以上のように、位相差が π の奇数倍では弱い強め合い、偶数倍では強い強め合いが観測される。すなわち、まず初めに位相差が π で弱い強め合いが観測され、次に 2π で強い強め合いが観測される。後は適当な範囲までこの繰り返しである。よって、(オ) のグラフが適当。

【進んだ補足】 問(2)2(c), (d)について、グラフの導出まで

以下の手順でグラフの導出を行う。

- ① 各格子面のみだけの状況を考え、その格子面からの散乱 X 線の合成波を求める。
- ② 各格子面のみだけの状況を考え、散乱 X 線の観測される方向の強度分布を調べる。
- ③ 以上を踏まえ、両格子面からの散乱 X 線の合成波を考えることで、観測される強度分布を得る。

やや計算が長いので、計算を追う人は根気よく付いて来てほしい。

■各格子面のみだけの合成波を求める

まず、原子 A のみからなる格子面 (格子面 A と呼ぶ) による散乱 X 線の合成波 Y_A 、原子 B のみからなる格子面 (格子面 B と呼ぶ) による散乱 X 線の合成波 Y_B を求めよう。

図に従い、等間隔 D で N 層 (N は十分大きい) の原子面からなる場合を考える。1 層目の原子面から θ 方向の観測点 P に届く X 線の振動を

$$y_1 = A \sin(\omega t)$$

と表すと、 $k = 1, 2, \dots, N$ 層目の原子面から点 P に届く X 線の振動は、 $2\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2D \sin \theta$ として*41*42,

$$y_k = A \sin \{ \omega t - 2(k-1)\delta \}$$

と表される。

点 P で観測される合成波は、 y_k の $k = 1$ から N までの総和であるから、

$$y_P = \sum_{k=1}^N y_k = \sum_{k=1}^N A \sin \{ \omega t - 2(k-1)\delta \}$$

*41 経路差は $2D \sin \theta$ 。

*42 後の計算の煩雑さを回避するために 2δ と置いている。

を計算すればよい. ここで*43,

$$\begin{aligned} 2 \sin \delta \sum_{k=1}^N y_k &= A \sum_{k=1}^N [-\cos \{\omega t - 2(k-1)\delta + \delta\} + \cos \{\omega t - 2k\delta + \delta\}] \\ &= A \{-\cos(\omega t + \delta) + \cos(\omega t - 2N\delta + \delta)\} \\ &= 2A \sin(N\delta) \sin\{\omega t - (N-1)\delta\} \\ \therefore \sum_{k=1}^N y_k &= A \frac{\sin(N\delta)}{\sin \delta} \sin\{\omega t - (N-1)\delta\} \end{aligned}$$

より,

$$y_P = A \frac{\sin(N\delta)}{\sin \delta} \sin\{\omega t - (N-1)\delta\}$$

となる. よって, 格子面 A による散乱 X 線の振幅を $A (> 0)$, 格子面 B による散乱 X 線の振幅を $B (0 < B < A)$ とし, 格子面 A による波と格子面 B による波の位相差が $\frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta (= \delta)$ であることを考慮すれば, Y_A, Y_B はそれぞれ以下のように書ける.

$$\begin{aligned} Y_A &= A \frac{\sin(N\delta)}{\sin \delta} \sin\{\omega t - (N-1)\delta\}, \\ Y_B &= B \frac{\sin(N\delta)}{\sin \delta} \sin\{\omega t - (N-1)\delta + \delta\}. \end{aligned}$$

■各格子面だけの X 線強度を考え, 各格子面から散乱され観測される合成 X 線の分布を調べる

まず, 格子面 A のみの場合を考える. 観測される X 線強度 $I^{(A)}$ は振幅の 2 乗に比例し, その比例定数を k_A とすると,

$$I^{(A)} = k_A \left\{ A \frac{\sin(N\delta)}{\sin \delta} \right\}^2$$

と表される. $\delta = 0$ での観測強度を $I_0^{(A)}$ とすると,

$$I_0^{(A)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} k_A A^2 \left\{ \frac{\sin(N\delta)}{\sin \delta} \right\}^2 = k_A (AN)^2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin^2(N\delta)}{(N\delta)^2} \frac{\delta^2}{\sin^2 \delta} = k_A (AN)^2$$

より, $I^{(A)}$ を $I_0^{(A)}$ で規格化すれば,

$$\frac{I^{(A)}}{I_0^{(A)}} = \left\{ \frac{\sin(N\delta)}{N \sin \delta} \right\}^2 \quad \therefore I^{(A)} = \left\{ \frac{\sin(N\delta)}{N \sin \delta} \right\}^2 I_0^{(A)}$$

*43 以下の恒等式を用いた.

$$2 \sin\{\omega t - 2(k-1)\delta\} \sin \delta = -\cos\{\omega t - 2(k-1)\delta + \delta\} + \cos\{\omega t - 2k\delta + \delta\}.$$

となる.

さて, $\delta \neq m\pi$ のとき, 十分大きな N では $N \rightarrow \infty$ を計算して,

$$\frac{I^{(A)}}{I_0^{(A)}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \underbrace{\left\{ \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right\}^2}_{\leq 1} = 0 \quad \therefore I^{(A)} = 0$$

となり, $\delta \neq m\pi$ の方向では格子面 A による散乱 X 線は弱め合い観測されない (図 2).

続いて, $\delta = m\pi$ のときを考える. この場合, $\delta = m\pi$ では $\frac{0}{0}$ で不定形になってしまうため $\delta = m\pi + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$) としてから最終結果に $\varepsilon \rightarrow 0$ と取ることを考える. このとき, $\sin \delta = \pm \sin \varepsilon \doteq \pm \varepsilon$, $\sin(N\delta) = \pm \sin(N\varepsilon)$ であり, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考え,

$$\frac{I^{(A)}}{I_0^{(A)}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(N\delta)}{N \sin \delta} \right\}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pm \sin(N\varepsilon)}{\pm N \sin \varepsilon} \right\}^2 \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin N\varepsilon}{N\varepsilon} \right\}^2 = 1 \quad \therefore I^{(A)} = I_0^{(A)}$$

となり, $\delta = m\pi$ の方向では格子面 A による散乱 X 線の鋭いピークが観測されることがわかる (図 2).

格子面 B についても同様であり, それぞれの観測強度 $I^{(A)}$, $I^{(B)}$ を $\delta = 0$ での観測強度 $I_0^{(A)}$, $I_0^{(B)}$ で割った値は図 1, 図 2 のようになる (上付き添え字の (A) , (B) は省略している).

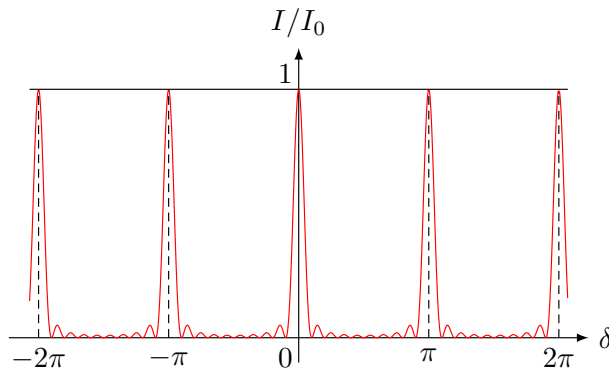


図 1 1 種類のみ : $N = 10$ の場合

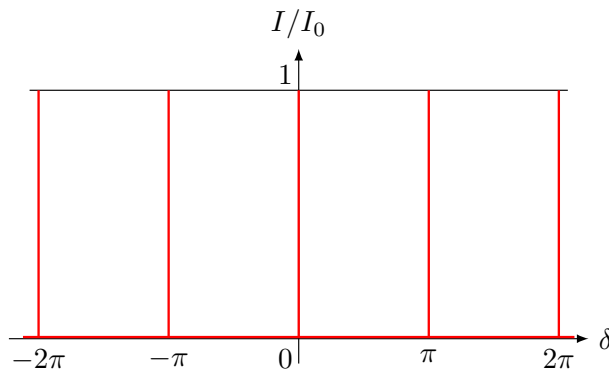


図 2 1 種類のみ : N が十分大きい場合

■両格子面からの X 線の合成波を計算する

以上の結果を用いて、両格子面からの散乱 X 線の干渉を考える。文字指定をあわせる場合 $A = A_1$, $B = RA_1$ とすればよい。

前提として、格子面 A, B からの散乱 X 線は $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta = m\pi$ を満たす角度 θ 方向のみで観測され、それ以外の方向では各々の X 線の干渉によって弱め合い観測されない。

時刻 t において、格子面 A による散乱 X 線の合成波 Y_A , 格子面 B による散乱 X 線の合成波 Y_B はそれぞれ以下のように書けた。

$$Y_A = A \frac{\sin(N\delta)}{\sin \delta} \sin\{\omega t - (N-1)\delta\} = cA \sin(\omega t - \theta),$$

$$Y_B = B \frac{\sin(N\delta)}{\sin \delta} \sin\{\omega t - (N-1)\delta + \delta\} = cB \sin(\omega t - \theta + \delta).$$

ここで、 $c = \frac{\sin N\delta}{\sin \delta}$, $\theta = (N-1)\delta$ とした。

点 P において観測される合成波 Y は、

$$\begin{aligned} Y &= Y_A + Y_B = cA \sin(\underbrace{\omega t - \theta}_{=\spadesuit}) + cB \sin(\underbrace{\omega t - \theta + \delta}_{=\spadesuit + \delta}) \\ &= c\{A \sin \spadesuit + B \sin(\spadesuit + \delta)\} \\ &= c\{(A + B \cos \delta) \sin \spadesuit + B \sin \delta \cos \spadesuit\} \\ &= c\sqrt{(A + B \cos \delta)^2 + (B \sin \delta)^2} \sin(\spadesuit + \phi) \\ &= c\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \delta} \sin(\omega t - \theta + \phi) \end{aligned}$$

となる。ここで ϕ は $\tan \phi = \frac{B \sin \delta}{A + B \cos \delta}$ $\left(= \frac{B \sin(2\pi D \sin \theta / \lambda)}{A + B \cos(2\pi D \sin \theta / \lambda)} \right)$ を満たす角度である。

さて、振幅 $c\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \delta}$ に注目し、強度分布を調べよう。

Y_A, Y_B が $\delta = m\pi$ を満たす角度のみで観測されることから $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta \neq m\pi$ を満たすような角度 θ では X 線は観測されない。そのため、 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta = m\pi$ を満たす角度でのみ考察すればよく、このとき合成波 Y の振幅は、

$$c\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(m\pi)} = c\sqrt{A^2 + B^2 + (-1)^m 2AB} = c\{A + (-1)^m B\}$$

と表せるので、観測強度 $I^{(A+B)}$ はその比例定数を k として、

$$I^{(A+B)} = kc^2\{A + (-1)^m B\}^2$$

となる。 $\delta = 0$ ($\theta = 0$) での観測強度を $I_0^{(A+B)}$ とすると、

$$I_0^{(A+B)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} k \left\{ \frac{\sin(N\delta)}{\sin \delta} \right\}^2 (A + B)^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin^2(N\delta)}{(N\delta)^2} \frac{\delta^2}{\sin^2 \delta} k N^2 (A + B)^2 = k\{N(A + B)\}^2$$

であり、 $I^{(A+B)}$ を $I_0^{(A+B)}$ で規格化すれば、

$$\frac{I^{(A+B)}}{I_0^{(A+B)}} = \left\{ \frac{\sin(N\delta)}{N \sin \delta} \frac{A + (-1)^m B}{A + B} \right\}^2,$$

$\delta = m\pi$ では、

$$I^{(A+B)} = \left\{ \frac{A + (-1)^m B}{A + B} \right\}^2 I_0^{(A+B)}.$$

設定では θ を 0 より少しずつ大きくしていくことから、はじめに X 線が観測される方向 θ'_1 は位相差 δ が π となるときで*44、

$$\frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta'_1 = \pi \quad \therefore \sin \theta'_1 = \frac{\lambda}{2D}$$

の方向である。このときの観測強度は $\left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2 I_0^{(A+B)}$ である。2 回目に観測される方向 θ'_2 は位相差が 2π のときで、

$$\frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta'_2 = 2\pi \quad \therefore \sin \theta'_2 = \frac{\lambda}{D}$$

の方向で、このときの観測強度は $I_0^{(A+B)}$ である。

以上より、一般に m 回目に X 線の観測される方向 θ'_m とその点での観測強度 $I_m^{(A+B)}$ をまとめれば、

$$\begin{cases} \sin \theta'_m = \frac{\lambda}{2D} m, \\ I_m = \left\{ \frac{A + (-1)^m B}{A + B} \right\}^2 I_0^{(A+B)} \end{cases}$$

となり、この結果を図示すれば(オ)のグラフが得られる (図 3)。

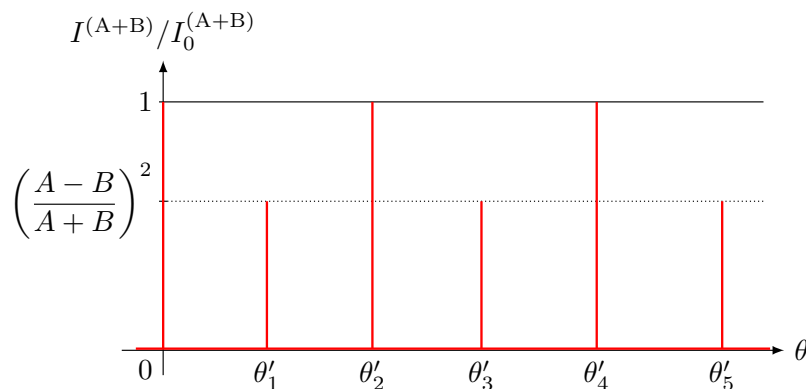


図 3 観測される X 線強度分布 ($D = 3\lambda$ で図示)

*44 前提として、各格子面の散乱 X 線の重ね合わせより、X 線が観測される方向は $\delta = m\pi$ となる方向に限られている。

2021 年度 解答

1 非等速円運動，動く座標系（回転座標系）

【メモ】

・非等速円運動は，以下2式を立式．

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

・問(2)，問(3)は単振動の時間追跡に関する問題．等加速度運動，単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動である．

・遠心力は，角速度 ω で回転する回転座標系の回転軸から半径 r の位置にある物体（質量 m ）に対し，座標系とともに回転する座標系内部において生じ，その大きさは $m r \omega^2$ ，向きは回転軸から遠ざかる向きである．

【解答】

問(1) (a) 公式より，最下点が基準であることに注意して，

$$U = \underline{mgR(1 - \cos \theta)}.$$

(b) 物体，重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \quad \therefore v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)}.$$

(c) v が最小値を取る最高点で $v > 0$ であればよい^{*45}．よって，

$$\sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos \pi)} > 0 \quad \therefore v > \underline{2\sqrt{gR}} (= v_1).$$

問(2) (a) 角度 θ の位置にあるとき回転軸からの距離は $R \sin \theta$ である．よって，

$$F = \underline{mR\omega^2 \sin \theta \cos \theta - mg \sin \theta}.$$

(b) $v = R \frac{d\theta}{dt}$ より，回転座標系内部における物体の加速度の接線成分は $\frac{dv}{dt} = R \frac{d^2\theta}{dt^2}$ である．運動方程式より， $|\theta| \ll 1$ ゆえ $\sin \theta \doteq \theta$ ， $\cos \theta \doteq 1$ と近似して，

$$\begin{aligned} mR \frac{d^2\theta}{dt^2} &= mR\omega^2 \sin \theta \cos \theta - mg \sin \theta \doteq mR\omega^2 \theta - mg\theta \\ \therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right) \theta. \end{aligned}$$

^{*45} リングが変形しないので垂直抗力の大きさは常に0以上となり，軌道は円に拘束されている．

よって, $\frac{g}{R} - \omega^2$ が正であれば単振動を行うことがわかる. よって, 単振動となるための ω の条件を考えて,

$$\frac{g}{R} - \omega^2 > 0 \quad \therefore \omega < \sqrt{\frac{g}{R}} (= \omega_0).$$

(c) 問(2)(b)より, 単振動の角振動数は $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}$ である. よって, 周期 T は,

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g - R\omega^2}}.$$

問(3) (a) $F = 0$ を解いて*46,

$$\begin{aligned} mR\omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - mg \sin \theta_0 &= 0 \\ mR\omega^2 \sin \theta_0 \left(\cos \theta_0 - \frac{g}{R\omega^2} \right) &= 0 \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{R \cos \theta_0}}. \end{aligned}$$

(b) $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$) では, $\frac{d^2}{dt^2}(\theta_0 + \varepsilon) = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$, $\cos \theta_0 = \frac{g}{R\omega^2}$, $\sin \theta_0 = \frac{\sqrt{(R\omega^2)^2 - g^2}}{R\omega^2}$, $\varepsilon^2 \doteq 0$ より,

$$\begin{aligned} mR \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} &= mR\omega^2 \sin(\theta_0 + \varepsilon) \cos(\theta_0 + \varepsilon) - mg \sin(\theta_0 + \varepsilon) \\ &= -mg \sin(\theta_0 + \varepsilon) \left\{ -\frac{R\omega^2}{g} \cos(\theta_0 + \varepsilon) + 1 \right\} \\ &= -mg(\sin \theta_0 \cos \varepsilon + \cos \theta_0 \sin \varepsilon) \left\{ -\frac{R\omega^2}{g} (\cos \theta_0 \cos \varepsilon - \sin \theta_0 \sin \varepsilon) + 1 \right\} \\ &\doteq -mg(\sin \theta_0 \cdot 1 + \cos \theta_0 \cdot \varepsilon) \left\{ -\frac{R\omega^2}{g} (\cos \theta_0 \cdot 1 - \sin \theta_0 \cdot \varepsilon) + 1 \right\} \\ &= -mg \left(\frac{\sqrt{(R\omega^2)^2 - g^2}}{R\omega^2} + \frac{g}{R\omega^2} \varepsilon \right) \left(-1 + \frac{\sqrt{(R\omega^2)^2 - g^2}}{g} + 1 \right) \\ \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} &= -\frac{(R\omega^2)^2 - g^2}{(R\omega^2)^2} \varepsilon - \underbrace{\frac{g\sqrt{(R\omega^2)^2 - g^2}}{(R\omega^2)^2}}_{\varepsilon^2 \text{の項で無視}} \varepsilon^2 \\ &\doteq -\frac{(R\omega^2)^2 - g^2}{(R\omega^2)^2} \varepsilon. \end{aligned}$$

よって, $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$, $|\varepsilon| \ll 1$ では角振動数 $\Omega = \frac{\sqrt{(R\omega^2)^2 - g^2}}{R\omega}$, 振動中心 $\theta = \theta_0$ の単振動を行うため, (a)は起こり得る. また, $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$ では $\theta = 0$ を中心とした微小な往復運動は起こ

*46 $\sin \theta = 0$ の解でない方の解を考える.

り得ないため (う) が不適切なものとなる。(い)については、(あ)における往復運動の振幅を大きくしていったときに起こる、折り返すことなく周回を行う軌道を表す。

2 荷電粒子の運動（静電場，静磁場），時間追跡（等加速度運動），等速円運動

【メモ】

・問(1)は等加速度運動の時間追跡に関する問題．等加速度運動，単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動である．
 ・問(2)は等速円運動に関する問題．等速円運動は以下 2 式を立式．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{つりあい（←使わないことも）} \end{array} \right.$$

【解答】

問(1) (a) 平行一様電場の公式より，

$$E = \frac{V_0}{d_1}.$$

よって，粒子の加速度は運動方程式より，

$$ma = qE = \frac{qV_0}{d_1} \quad \therefore a = \frac{qV_0}{md_1}.$$

(b) 加速度一定より粒子の位置 y ，および速度 v は，

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \frac{qV_0}{md_1} t^2, v = \frac{qV_0}{md_1} t. \end{array} \right.$$

$y = d_1$ を解いて，

$$\frac{1}{2} \frac{qV_0}{md_1} t^2 = d_1 \quad \therefore t = d_1 \sqrt{\frac{2m}{qV_0}}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}.$$

(c) 粒子のエネルギー収支より^{*47*48}，

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_{n-1}^2 = qV_0 \\ \frac{1}{2}mv_{n-1}^2 - \frac{1}{2}mv_{n-2}^2 = qV_0 \\ \vdots \\ \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = qV_0 \end{array} \right. \quad \therefore v_n = \sqrt{v_1^2 + \frac{2qV_0}{m}(n-1)} = \sqrt{n}v_1.$$

(d) 電極板 D_{n-1} から D_n の区間，加速度は $\frac{qV_0}{md_n}$ で一定であり，電極板 D_{n-1} の位置を y_{n-1} とし， D_{n-1} を通過する瞬間の粒子の速度を v_{n-1} ，この時刻を $\tau = 0$ と定める．すると，時

^{*47} 粒子が電場からされる仕事： $W = qE \cdot d_n \cdot \cos 0 = q \frac{V_0}{d_n} d_n = qV_0$ ．

^{*48} 力学的エネルギー保存則で考える場合： $\frac{1}{2}mv_n^2 + q(-nV_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 + q(-V_0)$ ．

刻 τ における粒子の位置 y , および速度 v は,

$$\begin{cases} y = y_{n-1} + v_{n-1}\tau + \frac{1}{2} \frac{qV_0}{md_n} \tau^2, \\ v = v_{n-1} + \frac{qV_0}{md_n} \tau. \end{cases}$$

電極板 D_n を通過する瞬間の速さ v_n は $\sqrt{n} v_1$ であるから, 題意より $\tau = t_1$ で $v = v_n$ を考えて*49,

$$\begin{aligned} \sqrt{n} v_1 &= \sqrt{n-1} v_1 + \frac{qV_0}{md_n} \cdot d_1 \sqrt{\frac{2m}{qV_0}} \\ \therefore d_n &= \frac{d_1}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \underbrace{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}_{\text{}} d_1. \end{aligned}$$

問(2) (a) 正電荷が時計回りの中心向きに力を受ければよいので, 磁場は z 軸正方向 が正しい.

(b) 粒子のエネルギー収支より*50,

$$\frac{1}{2} m u_1^2 - \frac{1}{2} m u_0^2 = q \frac{V_0}{d} d \cos 0 = q V_0 \quad \therefore u_1 = \sqrt{u_0^2 + \frac{2qV_0}{m}}.$$

また, 円運動の加速度は公式より,

$$b_1 = \frac{u_1^2}{r} = \frac{1}{r} \left(u_0^2 + \frac{2qV_0}{m} \right).$$

(c) N 周目の粒子の速さ u_N は, 粒子のエネルギー収支より*51,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m u_N^2 - \frac{1}{2} m u_{N-1}^2 = qV_0 \\ \frac{1}{2} m u_{N-1}^2 - \frac{1}{2} m u_{N-2}^2 = qV_0 \\ \vdots \\ \frac{1}{2} m u_1^2 - \frac{1}{2} m u_0^2 = qV_0 \end{cases} \quad \therefore u_N = \sqrt{n_0^2 + \frac{2qV_0}{m}} N.$$

よって, 周回に要する時間 T_N は,

$$T_N = \frac{2\ell}{u_N} + \frac{2\pi r}{u_N} = \frac{2(\ell + \pi r)}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2qV_0}{m}} N}.$$

また, 運動方程式 (中心成分) より,

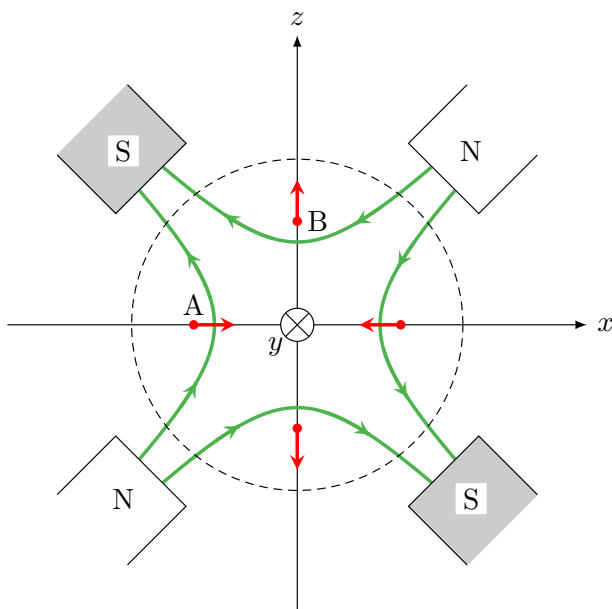
$$m \frac{u_N^2}{r} = q u_N B_N \quad \therefore B_N = \frac{m}{qr} \sqrt{u_0^2 + \frac{2qV_0}{m}} N.$$

*49 $y_n = d_n + y_{n-1}$ を満たす時刻が $\tau = t_1$ としてもよい. このとき, $d_n^2 - 2\sqrt{n-1} d_1 d_n - d_1^2 = 0$ の 2 次方程式を解くこととなる.

*50 力学的エネルギー保存則: $\frac{1}{2} m u_1^2 + q(-V_0) = \frac{1}{2} m u_0^2 + Q \cdot 0$.

*51 力学的エネルギー保存則で考える場合: $\frac{1}{2} m u_N^2 + q(-nV_0) = \frac{1}{2} m u_0^2 + q \cdot 0$.

問(3) (a) 磁力線は緑色の線, 各点で生じる力は赤色の矢印で示した (後の設問のため 4 点図示してある).



- (b) 前問に示した.
- (c) 荷電粒子にはたらく力は上図のようになる. よって, 荷電粒子の分布は (イ) のようになる.

3 波の式 (定常波), ドップラー効果の公式導出 (波の式)

【メモ】

- ・波の式は日本語で整理しながら立式するのが良い。
- ・ドップラー効果は, 大きく分けて公式導出問題と公式を使い問題に分類でき, この問題は両方に問題に属する。公式導出は時系列を考える方法である。

【解答】

問(1) (a) 波の基本式より,

$$\lambda = \frac{V}{f}$$

(b) n を整数とする。固定端ゆえ境界 (位置 $x = d$) での変位は恒等的に 0 となり,

$$\begin{aligned} 0 &= F + F_R \\ &= A \sin \left\{ 2\pi f \left(t - \frac{d}{V} \right) \right\} - A \sin \left\{ 2\pi f \left(t + \frac{d-a}{V} \right) \right\} \\ \therefore -\frac{2\pi f}{V}d &= \frac{2\pi f}{V}(d-a) + 2\pi n \\ \therefore a &= \underbrace{2d + n\lambda}. \end{aligned}$$

(c) 生じる合成波は,

$$\begin{aligned} y &= F + F_R \\ &= A \sin \left\{ 2\pi f \left(t - \frac{x}{V} \right) \right\} - A \sin \left\{ 2\pi f \left(t + \frac{x-2d}{V} \right) + 2\pi n \right\} \\ &= \underbrace{-2A \sin \left\{ \frac{2\pi f}{V}(x-d) \right\}}_{\substack{\text{各点の振動の幅を表す因子} \\ \text{(この因子の絶対値が振幅)}}} \underbrace{\cos \left\{ 2\pi f \left(t - \frac{d}{V} \right) \right\}}_{-1 \sim 1 \text{ の間で振動する因子}} \end{aligned}$$

となり, 定常波が観測される。よって, 振幅は,

$$A_S = 2A \left| \sin \left\{ \frac{2\pi f}{V}(x-d) \right\} \right|$$

(d) 任意の時刻 t で $A_S = 0$ となる点が, $0 < x < d$ の範囲で存在すればよいので,

$$\begin{cases} \frac{2\pi f}{V}(x-d) = n\pi, \\ 0 < x < d \end{cases} \quad \therefore -\frac{2f}{V} < n < 0$$

を満たす n が 1 つ以上存在するために, $-\frac{2fd}{V} \leq -1$ となればよい. よって,

$$-\frac{2fd}{V} \leq -1 \quad \therefore d \geq \frac{V}{2f}.$$

問(2) (a) 速度の定義より,

$$x = x_0 + u\Delta t.$$

(b) 与式 F に $t = t_0 + \Delta t$, $x = x_0 + u\Delta t$ を代入して,

$$F' = A \sin \left\{ 2\pi f \left(t_0 + \Delta t - \frac{x_0 + u\Delta t}{V} \right) \right\}.$$

(c) 時刻 $t = t_0$ における観測者 P の位置を $x_P = x_0$ とすると, 時刻 t における P の位置 x_P は,

$$x_P = x_0 + u(t - t_0)$$

と書けるので, 時刻 $t = t_0 + \Delta t$ では,

$$x_P = x_0 + u\Delta t.$$

したがって,

$$\left(\begin{array}{l} \text{時刻 } t_0 + \Delta t \text{ における} \\ \text{位置 } x_P \text{ での波の変位} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{時刻 } x_P/V \text{ 過去の} \\ \text{原点での波の変位} \end{array} \right)$$

より,

$$\begin{aligned} F_P(t_0 + \Delta t, x_P) &= A \sin \left\{ 2\pi f \left(t_0 + \Delta t - \frac{x_0 + u\Delta t}{V} \right) \right\} \\ &= A \sin \left\{ 2\pi f \left(t_0 + \Delta t - \frac{x_0 + u(t_0 + \Delta t) - ut_0}{V} \right) \right\} \\ &= A \sin \left[2\pi f \left\{ \left(1 - \frac{u}{V} \right) (t_0 + \Delta t) - \frac{x_0 - ut_0}{V} \right\} \right] \\ &= A \sin \left\{ 2\pi \underbrace{\left(1 - \frac{u}{V} \right)}_{=f'} f \left(t_0 + \Delta t - \frac{x_0 - ut_0}{V - u} \right) \right\}. \end{aligned}$$

よって, P の観測する波の振動数は $f' = \left(1 - \frac{u}{V} \right) f$ であり, P に対する相対的な音速は $V - u$ であることがわかる.

問(3) (a) 余弦定理より,

$$\begin{aligned} r^2 &= r_0^2 + (u\Delta t)^2 - 2r_0u\Delta t \cos(\pi - \theta_0) \\ &\doteq r_0^2 + 2r_0u\Delta t \cos \theta_0 \\ \therefore r &= \sqrt{r_0^2 + 2r_0u\Delta t \cos \theta_0} \\ &= r_0 \sqrt{1 + \frac{2u \cos \theta_0}{r_0} \Delta t} \\ &\doteq \underbrace{r_0 + u\Delta t \cos \theta_0}. \end{aligned}$$

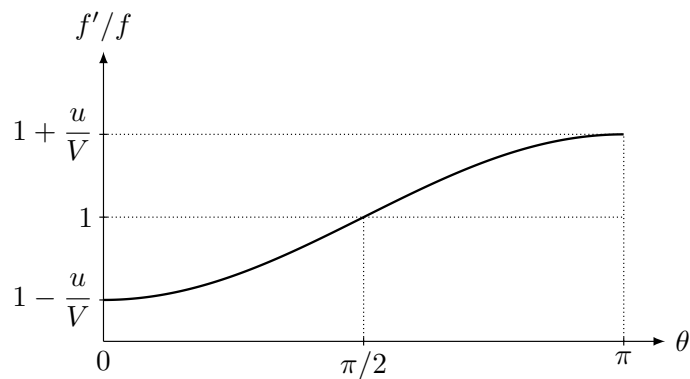
(b) 与式より, 与式 F に $t = t_0 + \Delta t$, $r = r_0 + u\Delta t \cos \theta_0$ を代入して,

$$F'_r = A \sin \left\{ \underbrace{2\pi f \left(t_0 + \Delta t - \frac{r_0 + u\Delta t \cos \theta_0}{V} \right)} \right\}.$$

(c) 問(2)(c)同様に,

$$\begin{aligned} F'_r(t_0 + \Delta t, r_P) &= A \sin \left\{ 2\pi f \left(t_0 + \Delta t - \frac{r_0 + u\Delta t \cos \theta}{V} \right) \right\} \\ &= A \sin \left\{ 2\pi f \left(t_0 + \Delta t - \frac{r_0 + u(t_0 + \Delta t) \cos \theta_0 - ut_0 \cos \theta}{V} \right) \right\} \\ &= A \sin \left[2\pi f \left\{ \left(1 - \frac{u \cos \theta}{V} \right) (t_0 + \Delta t) - \frac{r_0 - ut_0 \cos \theta}{V} \right\} \right] \\ &= A \sin \left\{ 2\pi \underbrace{\left(1 - \frac{u \cos \theta}{V} \right)}_{=f'} f \left(t_0 + \Delta t - \frac{r_0 - ut_0 \cos \theta}{V - u \cos \theta} \right) \right\} \\ \therefore f' &= \underbrace{\left(1 - \frac{u}{V} \cos \theta \right)} f. \end{aligned}$$

また, $\frac{f'}{f} = 1 - \frac{u}{V} \cos \theta$ を $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で図示すれば以下のようなになる.



2020 年度 解答

1 衝突

【メモ】

・衝突は以下の2式を連立.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{array} \right.$$

なお, 衝突に関与する物体が外力によって固定されているとき運動量保存則は成り立たない*52.

【解答】

問(1) (a) 物体のエネルギー収支より,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0 - 2 = mgh \cos 0 \quad \therefore v = \sqrt{2gh}.$$

(b) 鉛直線から 60° の方向に跳ね返るので,

$$v_x = v_0 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0, \quad v_y = v_0 \sin 30^\circ = \frac{1}{2}v_0.$$

(c) 物体に生じる加速度は $\vec{a} = (0, -g)$ である. よって, 時刻 t における物体の位置は,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0t, \\ y = \frac{v_0}{2}t - \frac{1}{2}gt^2. \end{array} \right.$$

この2式から t を消去して,

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2g}{3v_0^2}x^2.$$

(d) 小球の軌道が $(L, -L/\sqrt{3})$ を通ればよく,

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}L = \frac{1}{\sqrt{3}}L - \frac{2g}{3 \cdot 2gh}L^2 \quad \therefore L = 2\sqrt{3}h.$$

問(2) (a) 衝突の前後での小球の運動量収支より,

$$\left\{ \begin{array}{l} mv'_x - m \cdot 0 = \frac{1}{2}P, \\ mv'_y - m(-v_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}P \end{array} \right. \quad \therefore v'_x = \frac{P}{2m}, \quad v'_y = -v_0 + \frac{\sqrt{3}P}{2m}.$$

(b) 作用・反作用の関係より $P_1 = P$ であり, 台の運動量収支より,

$$\left\{ \begin{array}{l} MV - M \cdot 0 = -\frac{1}{2}P, \\ M \cdot 0 - M \cdot 0 = P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P \end{array} \right. \quad \therefore V = -\frac{P}{2M}, \quad P_2 = -v_0 + \frac{\sqrt{3}P}{2m}.$$

*52 滑らかな面の場合, 面に平行な力積を受けないことから面に平行な方向の速度成分は不変.

- (c) 前問に示した。
 (d) 小球と台からなる系の力学的エネルギー保存則より, $P \neq 0$ の解を選んで,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \left\{ \left(\frac{P}{2m} \right)^2 + \left(-v_0 + \frac{\sqrt{3}P}{2m} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2}M \left(-\frac{P}{2M} \right)^2 &= \frac{1}{2}mv_0^2 \\ \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{4M} \right) P^2 - \sqrt{3}v_0P &= 0 \\ \therefore P &= \frac{4\sqrt{3}Mm}{4M+m}v_0. \end{aligned}$$

- (e) $M = 5m$ のとき, $P = \frac{20\sqrt{3}}{21}mv_0$ であり, このとき台に対する小球の相対速度 $(\dot{x}_{\text{re}}, \dot{y}_{\text{re}})$ は,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{\text{re}} \\ \dot{y}_{\text{re}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_x - V \\ v'_y - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3}/7 \\ 3/7 \end{pmatrix} v_0.$$

よって, 水平方向とのなす角 α の正接は,

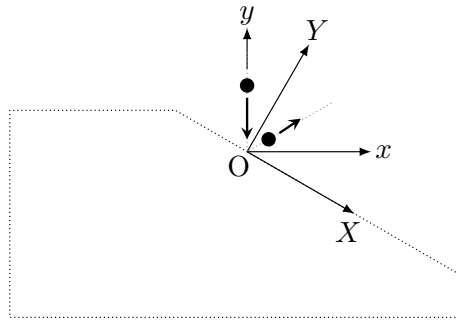
$$\tan \alpha = \left| \frac{\dot{y}_{\text{re}}}{\dot{x}_{\text{re}}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

【補足】衝突の条件「衝突の前後で小球と台の力学的エネルギーの和は保存する」の別解釈

この現象は, 小球, 台, 床の3体衝突である. 3体衝突では, モデルを明確に設定しないと解答が一意に定まらない. ここでは, 問題文にある「衝突の前後で小球と台の力学的エネルギーの和は保存する」という文章について意地悪く別の読み取り方をすることで別の結論を得ることを考える.

モデル設定としては, 衝突を「小球と台が衝突した後, 台と床(および固定具)が衝突する」という逐次的な現象として捉え, 「衝突の前後で小球と台の力学的エネルギーの和は保存する」という文章を「小球と台との衝突」にのみ適用して考える. すなわち, 台と床(および固定具)との衝突において力学的エネルギーの損失が生じてよいという立場である.

図のように, 衝突面に平行な方向と垂直な方向それぞれに X 軸, Y 軸を, はじめ台と重なるよう地面に固定された座標系として定める.



■ 小球と台の衝突

衝突直後の小球の速度の X 成分, および Y 成分をそれぞれ v_X, v_Y , 台の速度の Y 成分を V_Y とする*53. 小球と台の衝突では力学的エネルギーが保存することから物体間のはね返り係数 1 の衝突として, 衝突の前後における運動量の Y 成分の保存則, およびはね返り係数の式より,

$$\begin{cases} MV_Y + mv_Y = m(-v_0 \cos 30^\circ), \\ V_Y - v_Y = -1\{0 - (-v_0 \cos 30^\circ)\} \end{cases} \quad \therefore V_Y = -\frac{\sqrt{3}m}{M+m}v_0, \quad v_Y = \frac{\sqrt{3}M-m}{2M+m}v_0.$$

また, 面に平行な X 方向には小球, 台ともに力積を受けないことから運動量は一定であり速度成分も不変である. よって, 衝突直後 (台と床の衝突はまだ行われていない) の小球の速度 \vec{v} , および台の速度 \vec{V} の XY 成分はそれぞれ,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_0 \\ \frac{\sqrt{3}M-m}{2M+m}v_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}m}{M+m}v_0 \end{pmatrix}.$$

■ 問(1)について

- (a) 略.
- (b) 衝突の計算結果より,

$$v_x = v_X \cos 30^\circ + v_Y \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{M}{M+m} v_0,$$

$$v_y = -v_X \sin 30^\circ + v_Y \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \frac{M-2m}{M+m} v_0.$$

- (c) (b) の結果より,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{M}{M+m} v_0 t, \\ y = \frac{1}{2} \frac{M-2m}{M+m} v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

*53 小球と台の衝突では, 台は X 方向に力積を受けないため, 台の速度の X 成分は $V_X = 0$ である.

この 2 式から t を消去して,

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{2m}{M} \right) x - \frac{2}{3} \frac{g}{v_0^2} \left(1 + \frac{m}{M} \right)^2 x^2.$$

(d) $x = L, y = -\frac{1}{\sqrt{3}}L, v_0^2 = 2gh$ より,

$$L = \frac{2\sqrt{3}M(M-m)}{(M+m)^2} h.$$

なお, 台が床から受けた鉛直方向の力積 $P_{\text{床}}$, および固定具から受けた水平方向の力積 $P_{\text{固定具}}$ はそれぞれ, 台が小球から受ける力積の大きさを P とすると,

$$P_{\text{床}} = P \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} m \{v_Y - (-v_0 \cos 30^\circ)\} = \frac{3}{2} \frac{Mm}{M+m} v_0,$$

$$P_{\text{固定具}} = P \sin 30^\circ = \frac{1}{2} m \{v_Y - (-v_0 \cos 30^\circ)\} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Mm}{M+m} v_0.$$

■問(2)について

(a) 【解答】に示したものと同一。

(b) 作用・反作用の関係より $P_1 = P$ である。小球と台の衝突後の台の速度の xy 成分を V_x, V_y , 台と床の衝突後の台の速度の xy 成分を V'_x, V'_y とすると, 題意より $V'_y = 0$ であり, 台の運動量収支は,

$$\begin{cases} \text{小球と台} & \begin{cases} MV_x - M \cdot 0 = -P/2, \\ MV_y - M \cdot 0 = -\sqrt{3}P/2, \end{cases} \\ \text{台と床} & \begin{cases} MV'_x - MV_x = 0, \\ M \cdot 0 - MV_y = P_2. \end{cases} \end{cases}$$

よって, 台の運動量収支の y 成分の 2 式より,

$$P_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} P.$$

(c) 台の運動量収支の x 成分の 2 式より,

$$V = V'_x = -\frac{P}{2M}.$$

(d) 小球と台の衝突の計算結果より,

$$P = |MV_Y - M \cdot 0| = \frac{\sqrt{3}Mm}{M+m} v_0.$$

(e) 一連の衝突後の台の速度の xy 成分は,

$$V_x = V_Y \sin 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{M+m} v_0, \quad V_y = 0$$

であるから $M = 5m$ では,

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{-v_X \sin 30^\circ + v_Y \sin 30^\circ - 0}{v_X \cos 30^\circ + v_Y \sin 30^\circ - V_Y \sin 30^\circ} \\ &= \frac{\frac{3}{4} \frac{5m-m}{5m+m} v_0 - \frac{1}{4} v_0 - 0}{\frac{\sqrt{3}}{4} v_0 + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{5m-m}{5m+m} v_0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{5m+m} v_0\right)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

なお, 台が床から受けた鉛直方向の力積 $P_{\text{床}}$ は,

$$P_{\text{床}} = \frac{\sqrt{3}}{2} P = \frac{3}{2} \frac{Mm}{M+m} v_0.$$

■ 小球と台の衝突におけるエネルギー保存則, 台と床の衝突におけるエネルギー損失の確認

小球と台:

$$\begin{aligned} \Delta E_1 &= \left[\frac{1}{2} M \left(\frac{\sqrt{3}m}{M+m} v_0 \right)^2 + \frac{1}{2} m \left\{ \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}M-m}{2(M+m)} v_0 \right)^2 \right\} \right] - \frac{1}{2} m v_0^2 \\ &= \frac{m v_0^2}{2(M+m)^2} \left\{ 3Mm + \frac{1}{4} (M^2 + 2Mm + m^2 + 3M^2 + 3m^2 - 6Mm) \right\} - \frac{1}{2} m v_0^2 \\ &= \frac{m v_0^2}{2(M+m)^2} (M+m)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

台と床:

$$\Delta E_2 = \left\{ \frac{1}{2} M \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{M+m} v_0 \right)^2 \right\} - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{Mm}{(M+m)^2} \right\} m v_0^2.$$

この問題の「衝突の前後で小球と台の力学的エネルギーの和は保存する」は読み方次第では2通りの解釈ができ, 上記に示したようにそれぞれの解釈で結果が異なる. そのため, この問題の文章は「小球が台と衝突し台が水平方向に動き出すこの一連の過程で, 小球と台からなる系の力学的エネルギーの和は一定に保たれる」などとした方がよい.

2 荷電粒子の運動 (静電場, 静磁場)

【メモ】

- ・問(1)は抵抗の内部構造.
- ・問(2)は電場, 磁場の入っただけの力学.

【解答】

問(1) (a) 電子の運動方程式より,

$$m \cdot 0 = eE - kv_0 \quad \therefore v_0 = \frac{eE}{k}.$$

(b) 単位体積当たりの電子数が n であるから,

$$N = nabv_0 t.$$

(c) 電流の定義より,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{eN}{t-0} = enabv_0.$$

(d) 抵抗の合成則より, m 個の直列接続では,

$$r_{\text{直列}} = \underbrace{r + r + \cdots + r}_{m \text{ 個}} = \underbrace{mr}_{\textcircled{1}},$$

m 個の並列接続では,

$$\frac{1}{r_{\text{並列}}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{r} \quad \therefore r_{\text{並列}} = \underbrace{\frac{1}{m}}_{\textcircled{2}} r.$$

ここで, 抵抗の直列接続は合成するごとに抵抗の長さが長くなると見做せるから, $i (= 1, 2, \dots, n)$ 番目の抵抗値を r_i , 抵抗の長さを l_i , 比例定数を α としたとき,

$$\begin{aligned} r_{\text{直列}} &= r_1 + r_2 + \cdots + r_n = \alpha l_1 + \alpha l_2 + \cdots + \alpha l_n \\ \therefore r_{\text{直列}} &= \sum_{i=1}^n r_i = \alpha \sum_{i=1}^n l_i \end{aligned}$$

と表せる. 同様に, 並列接続では合成するごとに抵抗の断面積が大きくなると見做せるから, $i (= 1, 2, \dots, n)$ 番目の抵抗値を r_i , 抵抗の断面積を S_i , 比例定数を β としたとき,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{\text{並列}}} &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} = \beta S_1 + \beta S_2 + \cdots + \beta S_n \\ \therefore r_{\text{並列}} &= \sum_{i=1}^n r_i = \frac{1}{\beta \sum_{i=1}^n S_n}. \end{aligned}$$

以上より，抵抗値は長さに比例，断面積に反比例するとわかる．したがって，長さ L ，断面積 ab の抵抗の抵抗値は，比例定数（抵抗率と呼ぶ）を ρ として，

$$r' = \rho \times \frac{\tilde{L}}{\underset{\textcircled{3}, \textcircled{4}}{\sim{ab}}} .$$

(e) $v_0 = \frac{eE}{k}$ ， $I = enav_0$ より，

$$I = aben \frac{eE}{k}$$

$$\therefore \underbrace{EL}_{\text{電位差}} = \frac{k}{e^2 n} \frac{L}{ab} \times I \quad \therefore \rho = \frac{k}{\underbrace{e^2 n}} .$$

問(2) (a) ホールの受ける力は公式より，

$$\begin{pmatrix} F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev_z B - eE' - kv_y \\ -ev_y B + eE - kv_z \end{pmatrix} .$$

(b) 題意より， $F_y = F_z = 0$ ， $v_y = 0$ より，

$$\begin{cases} 0 = ev_z B - eE' - k \cdot 0, \\ 0 = eE - ev_y B - kv_z \end{cases} \quad \therefore v_z = \frac{eE}{k} (= v_1), \quad E' = v_z B = \frac{eEB}{k} .$$

(c) 平行一様電場ゆえ，電位差 $\Delta\phi$ は，電場 \vec{E} ，変位 $\Delta\vec{r}$ と

$$\Delta\phi = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r}$$

の関係がある．よって*54，

$$\phi - 0 = - \left\{ 0 \cdot 0 + \left(-\frac{eBE}{k} \right) Y + EZ \right\} \quad \therefore \phi = \frac{eBE}{k} Y - EZ .$$

(d) V_1 ， V_2 はそれぞれ，

$$V_1 = \frac{eBE}{k} b, \quad V_2 = -Ec + \frac{eBE}{k} b$$

であり， V_2 の E の符号を反転させたものを $V_{3,E}$ ， B の符号を反転させたものを $V_{3,B}$ とすると，

$$V_{3,E} = Ec - \frac{eBE}{k} b, \quad V_{3,B} = -Ec - \frac{eBE}{k} b$$

*54 各方向について，平行一様電場ゆえ， $\phi_x = 0$ ， $\phi_z = -EZ$ ， $\phi_y = \frac{eBE}{k} Y$ であり，電位の重ね合わせより， $\phi = \phi_x + \phi_y + \phi_z$ と計算するのが想定解答だろう．

である。 $V_{3,E} = -V_2$ より、 E の符号を反転させたものは独立 V_2 とは独立とはならないので、 V_1 を決定するためには B の向きを変えればよい。 このとき、

$$V_1 = \frac{V_2 - V_3}{2}.$$

3 熱あり過程

【メモ】

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題。定石は、可動部分のつりあいから圧力の決定、状態方程式から温度の決定。内部エネルギー変化を公式、気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価、熱力学第1法則を通じて熱を計算。

【解答】

問(1) (a) ピストンのつりあいより、

$$0 = P_1 S - (P_0 + \rho gh) S \quad \therefore P_0 = \underbrace{P_0 + \rho gh}.$$

(b) 状態方程式より、

$$P_1 Sh = nRT_1 \quad \therefore T_1 = \frac{(P_0 + \rho gh) Sh}{\underbrace{nR}}.$$

(c) ピストンのつりあい、および状態方程式より、

$$\begin{cases} 0 = PS - (P_0 + \rho gh) S, \\ P \cdot 2Sh = nRT_2 \end{cases} \quad \therefore T_2 = \frac{2(P_0 + \rho gh) Sh}{nR} = \underbrace{2T_1}.$$

(d) $P-V$ 図の面積評価を行い（図略）、

$$W_1 = P_1(2Sh - Sh) = \underbrace{P_1 Sh}.$$

(e) 熱力学第1法則より、

$$Q_1 = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) + P_1 Sh = \frac{3}{2} nR \frac{P_1 Sh}{nR} + P_1 Sh = \frac{5}{2} \underbrace{P_1 Sh}.$$

問(2) (a) ピストンが x だけ下降したときの水面のストッパーからの高さを y とする。総体積不変ゆえ、

$$Sx + 2Sy = Sh \quad \therefore y = \frac{h-x}{2}.$$

よって、ピストンのつりあいより、

$$0 = PS - (P_0 + \rho gx) S \quad \therefore P = \underbrace{P_0 + \frac{1}{2} \rho g(h+x)}.$$

- (b) 状態 4 から状態 1 の過程において、ピストンが x だけ下降したときの気体の体積 V は $V = S(2h - x)$ と表されるので、 $x = -\frac{V}{S} + 2h$ である。気体の圧力 P を V で表すと、

$$P = P_0 + \frac{1}{2}\rho g \left(3h - \frac{V}{S}\right).$$

となるので、 P は V に関して傾きが負の 1 次関数であり (オ) のグラフが適当とわかる。

- (c) 気体のした仕事は $P - V$ 図の面積評価を行い (図略)*55,

$$\begin{aligned} W &= \int_{2Sh}^{Sh} P dV = \int_0^h P \frac{dV}{dx} dx \\ &= \int_0^h \left\{ P_0 + \frac{1}{2}\rho g(h+x) \right\} (-S) dx \\ &= -P_0Sh - \frac{3}{4}\rho Sgh^2 \end{aligned}$$

と求まるので、気体のされた仕事 W_4 は、

$$W_4 = -W = P_0Sh + \frac{3}{4}\rho Sgh^2.$$

- (d) 過程 1 から 2 における吸熱量を $Q_{1 \rightarrow 2}$ 、過程 2, 3 から 4 における吸熱量を $Q_{2,3 \rightarrow 4}$ 、過程 4 から 1 における吸熱量を $Q_{4 \rightarrow 1}$ とする。

$Q_{1 \rightarrow 2}$: 問(1)(e)より、

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{5}{2}P_1Sh = \frac{5}{2}(P_0 + \rho gh)Sh.$$

$Q_{2,3 \rightarrow 4}$: ピストンのつりあい、および状態方程式より、

$$\begin{cases} 0 = P_4S - \left(P_0 + \frac{1}{2}\rho gh\right)S, \\ P_4 \cdot 2Sh = nRT_4 \end{cases} \quad \therefore T_4 = \frac{2Sh}{nR} \left(P_0 + \frac{1}{2}\rho gh\right)$$

であるから、熱力学第 1 法則より、

$$\begin{aligned} Q_{2,3 \rightarrow 4} &= \Delta U + W \\ &= \frac{3}{2}nR \left\{ \frac{2Sh}{nR} \left(P_0 + \frac{1}{2}\rho gh\right) - \frac{2Sh}{nR} (P_0 + \rho gh) \right\} + 0 \\ &= -\frac{3}{2}\rho Sgh^2. \end{aligned}$$

*55 置換積分の因子について： $\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}\{S(2h-x)\} = -S$.

$Q_{4 \rightarrow 1}$: 熱力学第 1 法則より,

$$\begin{aligned} Q_{4 \rightarrow 1} &= \Delta U + W \\ &= \frac{3}{2}nR \left\{ \frac{Sh}{nR} (P_0 + \rho gh) - \frac{2Sh}{nR} \left(P_0 + \frac{1}{2}\rho gh \right) \right\} - P_0Sh - \frac{3}{4}\rho Sgh^2 \\ &= -\frac{5}{2}P_0Sh - \frac{3}{4}\rho Sgh^2. \end{aligned}$$

以上より,

$$Q_c = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2,3 \rightarrow 4} + Q_{4 \rightarrow 1} = \frac{1}{4}\rho Sgh^2.$$

2019 年度 解答

1 単振動，回転座標系

【メモ】

・問(1)，問(2)共に単振動の問題で，問(1)はエネルギー，問(2)は時間追跡に関する問題．等加速度運動，単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動である．

・遠心力は，角速度 ω で回転する回転座標系の回転軸から半径 r の位置にある物体（質量 m ）に対し，座標系とともに回転する座標系内部において生じ，その大きさは $m r \omega^2$ ，向きは回転軸から遠ざかる向きである．

【解答】

問(1) (a) つりあいより，

$$m \cdot 0 = k d_0 - m g \cos \theta \quad \therefore d_0 = \frac{m g}{k} \cos \theta .$$

(b) 物体のエネルギー収支より *56*57，

$$\frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -h \end{pmatrix} = m g h \quad \therefore V = \sqrt{2 g h} .$$

(c) 衝突の直前・直後の運動量保存則より，

$$2 m v = m \sqrt{2 g h} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{g h}{2}} .$$

(d) 物体，ばね，重力場からなる系の力学的エネルギーは，

$$E = \frac{1}{2} \cdot 2 m v^2 + \frac{1}{2} k d^2 + 2 m g (-d \cos \theta) = \underbrace{m v^2 + \frac{1}{2} k d^2 - 2 k d_0 d} .$$

(e) 力学的エネルギー保存則より *58，

$$\frac{1}{2} k x^2 - 2 k d_0 x = m v_0^2 + \frac{1}{2} k d^2 - 2 k d_0 d \quad \therefore x = \underbrace{d_0 \left(2 + \sqrt{1 + \frac{2 m v_0^2}{k d_0^2}} \right)} (= d_1) .$$

問(2) (a) 物体が位置 x にあるとき，回転軸からの距離（円運動の半径）は $x \sin \theta$ であることに留意して，

$$F_x = \underbrace{-k(x - L) - m g \cos \theta + m \omega^2 x \sin^2 \theta} .$$

*56 力学的エネルギー保存則： $\frac{1}{2} m V^2 = m g h$.

*57 仕事の計算（いつも通り）．重力と変位（大きさ l ）のなす角を θ とする： $W = m g l \cos \theta = m g l \frac{h}{l} = m g h$.

*58 つりあい時 $x = \frac{2 m g}{k} \cos \theta = 2 d_0$ であり，この点よりも更に縮むため $x > 2 d_0$ と判断する．

(b) $F_x = 0$ を解いて,

$$0 = -k(x_0 - L) - mg \cos \theta + m\omega^2 x_0 \sin^2 \theta \quad \therefore x_0 = \frac{kL - mg \cos \theta}{\underbrace{k - m\omega^2 \sin^2 \theta}} \dots$$

(c) F_x を整理して,

$$F_x = -(k - m\omega^2 \sin^2 \theta)x + kL - mg \cos \theta.$$

x の係数が負であればよいので,

$$k - m\omega^2 \sin^2 \theta > 0 \quad \therefore \omega < \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{k}{m}}, (= \omega_0).$$

(d) 運動方程式より, 単振動の角振動数 Ω は,

$$m\ddot{x} = -(k - m\omega^2 \sin^2 \theta) \left(x - \frac{kL - mg \cos \theta}{k - m\omega^2 \sin^2 \theta} \right) \quad \therefore \Omega = \sqrt{\frac{k - m\omega^2 \sin^2 \theta}{m}}.$$

よって, 単振動の周期 T は,

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\underbrace{k - m\omega^2 \sin^2 \theta}}}.$$

(e) 図より, 物体が回転軸の周りを 1 周する時間と単振動の周期が一致すればよい. よって,

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2 \sin^2 \theta}} \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{1}{\underbrace{1 + \sin^2 \theta}} \frac{k}{m}}.$$

2 電磁誘導 (ファラデー則)

【メモ】

- ・問(1)は静磁場中を導体棒が運動する電磁誘導. 誘導起電力の起源はローレンツ力 (vBl 公式) であるが, ファラデー則でも整合した結果を得ることができる. 誘導はファラデー則となっている.
- ・問(2)は磁場が時間変化することによる電磁誘導. そのため, 現象を支配する物理法則はファラデー則であり, 誘導起電力の計算もファラデー則一択となる*59. ・磁場が仕事をしないことにより, 誘導起電力の仕事 (仕事率) とアンペール力のする仕事 (仕事率) は相殺する. 磁場を介することで, 力学的エネルギーが回路のエネルギーへと変換される (逆もまた同様).

【解答】

問(1) (a) 磁束の定義より,

$$\Phi = \underline{Bavt}.$$

(b) ファラデー則より,

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = \underline{-Bav}.$$

(c) キルヒホッフ則より,

$$E - RI = 0 \quad \therefore I = \underline{-\frac{Bav}{R}}.$$

(d) 公式より,

$$J = RI^2 = \underline{\frac{(Bav)^2}{R}},$$

(e) 梯子コイルのつりあいより,

$$M \cdot 0 = F + IBa = F - \frac{B^2 a^2 v}{R} \quad \therefore F = \underline{\frac{B^2 a^2 v}{R}}.$$

問(2) (a) 重力の位置エネルギーの基準点を最下点に定める. 回路, および力学系を合わせたエネルギー収支より*60,

$$\begin{aligned} Q &= -\Delta K - \Delta U \\ &= -\left(\frac{1}{2}M \cdot 0^2 - \frac{1}{2}M \cdot 0^2\right) - \{Mg \cdot 0 - MgL(1 - \cos \theta_0)\} \\ &= \underline{MgL(1 - \cos \theta_0)}. \end{aligned}$$

*59 vBl 公式でも整合した結果を得ることもできる場合もあるが, 法則の適用としては誤りである.

*60 導出は【補足】を参照.

- (b) 磁石がコイルの左辺を通過する瞬間を考える。磁石の位置を x としたとき、磁石の速度が $u = \frac{dx}{dt}$ であることから、磁束 Φ 、誘導起電力 \mathcal{E} （時計回りを正）、コイルに流れる電流 I （時計回りを正）はそれぞれ、

$$\begin{aligned}\Phi &= Ba(x - a), \\ \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -Bau, \\ I &= \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{Ba}{R}u,\end{aligned}$$

であり、コイル左辺の受けるアンペール力は右向きを正として、

$$F = -IBa = \frac{B^2 a^2}{R}u$$

となり、梯子コイルは磁場から水平右向きに大きさ $\frac{B^2 a^2 u}{R}$ のアンペール力を受ける^{*61}。各糸からの張力の合力の大きさを T とすれば、梯子コイルのつりあい（中心成分、鉛直成分）より、

$$\begin{cases} M \cdot 0 = T - \frac{B^2 a^2 u}{R} \sin \theta - Mg \cos \theta, \\ M \cdot 0 = \frac{B^2 a^2 u}{R} \cos \theta - Mg \sin \theta \end{cases}$$

$$\therefore \tan \theta_1 = \frac{B^2 a^2 u}{MgR} (\equiv \theta_1), \quad T = \sqrt{\left(\frac{B^2 a^2 u}{R}\right)^2 + (Mg)^2}.$$

よって、 $X_1 = L \sin \theta_1$ より、

$$X_1 = L \sin \theta_1 \doteq L \theta_1 = \frac{B^2 a^2 u}{MgR} L.$$

- (c) 一般に、磁石の床面に対する速度を $U (= \text{const})$ 、梯子コイルが θ だけ傾いているときの梯子コイルの速度（接線方向）を $V_\theta \left(= L \frac{d\theta}{dt}\right)$ とする^{*62}。このとき、コイルに生じる誘導起電力 E は $E = \mp Ba(U - V_\theta \cos \theta)$ であり^{*63}、いずれの場合でもコイルに生じるアンペール力は水平右向きに大きさ $\frac{B^2 a^2}{R}(U - V_\theta \cos \theta)$ である。よって、梯子回路の運動方程式（中心）

*61 【補足】では一般論を論じている。

*62 この辺の詳しい解説は全て【補足】に詳細に記してある。なお、【補足】では $U \rightarrow v$ であることに注意。

*63 負符号が、磁場がコイルの左側の辺を通過する間の誘導起電力であり、正符号が磁場がコイルの右側の辺を通過する間の誘導起電力である。

は*64*65,

$$\begin{aligned}
 M \frac{dV_\theta}{dt} &= -Mg \sin \theta + \frac{B^2 a^2}{R} (U - V_\theta \cos \theta) \cos \theta \\
 &\doteq -Mg \theta + \frac{B^2 a^2}{R} U - \frac{B^2 a^2}{R} L V_\theta \\
 \therefore L \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -\frac{g}{L} \left(L \theta - \frac{B^2 a^2 U}{MgR} L \right) - \frac{B^2 a^2}{MgR} L V_\theta \\
 \therefore \frac{d^2 X}{dt^2} &\doteq -\frac{g}{L} \left(X - \frac{B^2 a^2 U}{MgR} L \right) - \frac{B^2 a^2}{MgR} \frac{dX}{dt}
 \end{aligned}$$

となり, $X = \frac{B^2 a^2 U}{MgR} L$ を振動中心とした振幅の減衰していく振動 (減衰振動) を行う*66.

$U = \frac{1}{4}u$ での振動中心は

$$X = \frac{B^2 a^2 u}{4MgR} L = \frac{1}{4} X_1$$

であるから, グラフは (v) のようになる.

*64 微小角 θ に対し次の近似式を利用: $\sin \theta \doteq \theta$, $\cos \theta \doteq 1$.

*65 最後の行で次の式を利用: $\frac{dX}{dt} = V_\theta \cos \theta = L \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \doteq L \frac{d\theta}{dt}$.

*66 単振動に, 速度に比例した抵抗力が加わった運動を行うことからわかる. なお, こちらについて詳しくは【補足】を参照.

【補足】問(2)(c)を事細かに

■誘導起電力，およびアンペール力について

磁石（質量 m ）磁場領域の右端の位置を x ，コイルの右辺の位置を X とし， $t = 0$ においてコイルの左辺と磁石の右端の位置が揃っているものとする．すなわち $X(0) = x(0) + a$ である．磁石の速度は $v = \frac{dx}{dt}$ ，梯子コイルが θ （反時計回りを正）だけ傾いているときの梯子コイルの速度（糸と直交した方向成分）は $V_\theta = L \frac{d\theta}{dt}$ であり，速度の水平成分は $V_x = \frac{dX}{dt}$ ($= V_\theta \cos \theta$) である．

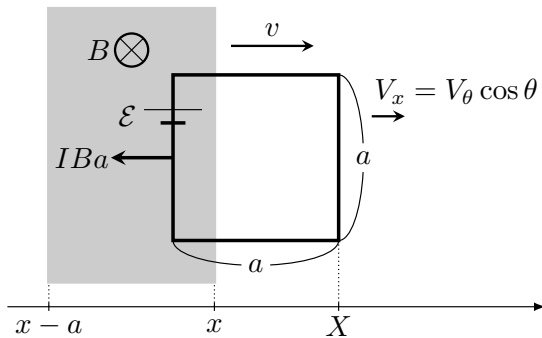


図 1

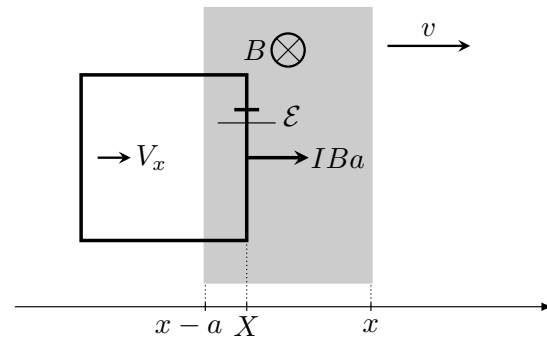


図 2

まずは，磁石がコイルの左側の辺を通過する状況を考えよう（図 1）．ここでは，磁石がコイルの右辺を通過する時刻を T_1 としたとき， $0 \leq t \leq T_1$ の間の運動を論じる^{*67}．時刻 t においてコイルを貫く磁束 Φ は，

$$\Phi = Ba\{x - (X - a)\}$$

であり，コイル 1 周に生じる誘導起電力 \mathcal{E} は時計回りを正として，

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt} \right) = -Ba(v - V_x).$$

コイルに流れる電流 I は，誘導起電力と同様時計回りを正とすると，

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{Ba}{R}(v - V_x).$$

よって，コイルの左辺に生じるアンペール力は右向きを正として，

$$F = -IBa = -\frac{\mathcal{E}}{R}Ba = \frac{B^2 a^2}{R}(v - V_x).$$

続いて，磁石がコイルの右側の辺を通過する状況を考えよう（図 2）．ここでは，磁石がコイルの右辺を通過し終わる時刻を T_2 としたとき， $T_1 \leq t \leq T_2$ の間の運動を論じる． $X(T_1) = x(T_1)$ であることに留

^{*67} 相対速度 $v - V_x$ が定数でないことから $T_1 \neq \frac{a}{v - V_x}$ であることに注意．

意して、時刻 t においてコイルを貫く磁束 Φ は、

$$\Phi = Ba\{X - (x - a)\}$$

であり、コイル 1 周に生じる誘導起電力 \mathcal{E} は時計回りを正として、

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = Ba(v - V_x).$$

コイルに流れる電流 I は、誘導起電力と同様時計回りを正とすると、

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Ba}{R}(v - V_x).$$

よって、コイルの左辺に生じるアンペール力は右向きを正として、

$$F = +IBa = \frac{\mathcal{E}}{R}Ba = \frac{B^2a^2}{R}(v - V_x).$$

以上のように、磁石を速度 v で運動させる場合、磁石がコイルの左右いずれの辺を通過する場合においても同一の式で表されるアンペール力が生じる*68.

■コイル、磁石の運動方程式とキルヒホッフの法則

キルヒホッフ則は*69、

$$\mathcal{E} = \mp Ba(v - V_\theta \cos \theta) = RI.$$

磁石に加える外力を F_{ex} 、各糸の張力の合力の大きさを T とする。磁石にはコイルに生じるアンペール力の反作用が生じることに留意すると、コイルの運動方程式（接線成分，中心成分），および磁石の運動方程式（水平成分）はそれぞれ、

$$\begin{cases} M \frac{dV_\theta}{dt} = -Mg \sin \theta + \frac{B^2a^2}{R}(v - V_\theta \cos \theta) \cos \theta, \\ M \frac{V_\theta^2}{L} = T - Mg \cos \theta - \frac{B^2a^2}{R}(v - V_\theta \cos \theta) \sin \theta, \\ m \frac{dv}{dt} = F_{\text{ex}} - \frac{B^2a^2}{R}(v - V_\theta \cos \theta). \end{cases}$$

■力学系と回路を合わせた系のエネルギー収支

コイルの運動方程式の接線成分にコイルの速度 V_θ 、磁石の運動方程式に磁石の速度 v 、キルヒホッフ則に回路に流れる電流 I をかけることでそれぞれのエネルギー収支の式を得ることができ、3 式の和を取ることで力学系と回路を合わせた系のエネルギー収支の式を得ることができる。

*68 $V_x > v$ となる場合（磁石を動かす速さがゆっくりでコイルが磁石を抜かすような状況）では左向きのアンペール力となる。

*69 $V_x = V_\theta \cos \theta$ （ $\Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} \cos \theta$ ）である。

梯子コイルのエネルギー収支の式は*70,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M V_{\theta}^2 \right) = -MgV_{\theta} \sin \theta + \frac{B^2 a^2}{R} V_{\theta} (v - V_{\theta} \cos \theta) \cos \theta.$$

磁石のエネルギー収支の式は,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = F_{\text{ex}} v - \frac{B^2 a^2}{R} v (v - V_{\theta} \cos \theta).$$

回路のエネルギー収支の式は,

$$RI^2 = \mp Ba (v - V_{\theta} \cos \theta) I$$

$$\therefore RI^2 = \frac{B^2 a^2}{R} (v - V_{\theta} \cos \theta)^2 = \frac{B^2 a^2}{R} (v^2 + V_{\theta}^2 \cos^2 \theta - 2vV_{\theta} \cos \theta).$$

以上 3 式の和を取ると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M V_{\theta}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) + RI^2 &= -MgV_{\theta} \sin \theta + \frac{B^2 a^2}{R} V_{\theta} (v - V_{\theta} \cos \theta) \cos \theta \\ &\quad + F_{\text{ex}} v - \frac{B^2 a^2}{R} v (v - V_{\theta} \cos \theta) \\ &\quad + \frac{B^2 a^2}{R} (v^2 + V_{\theta}^2 \cos^2 \theta - 2vV_{\theta} \cos \theta) \\ &= -MgV_{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

となり, アンペール力の仕事率と誘導起電力の仕事率が相殺する. この式を整理すれば,

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} M V_{\theta}^2}_{\text{コイルの運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{磁石の運動エネルギー}} \right) + \underbrace{RI^2}_{\text{ジュール熱}} = \underbrace{-MgV_{\theta} \sin \theta}_{\text{重力の仕事率}}$$

のように, 重力が系にする仕事の一部が 2 物体の運動エネルギー変化に, 残りがジュール熱に変換されることがわかる. また, 次のように変形すれば*71,

$$-\frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} M V_{\theta}^2}_{\text{コイルの運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{磁石の運動エネルギー}} + \underbrace{Mg(-L \cos \theta)}_{\text{重力場の蓄える位置エネルギー}} \right\} = \underbrace{RI^2}_{\text{ジュール熱}}$$

コイル, 磁石, 重力場からなる系の力学的エネルギーの減少分が回路で生じるジュール熱に等しいとも解釈できる. 問(2)(a)では磁石が静止していることから恒等的に $v = 0$ であり, コイルと重力場からなる系の力学的エネルギーの減少分がジュール熱に等しいことを用いている.

*70 次の恒等式を利用: $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} A^2 \right) = \frac{d}{dA} \left(\frac{1}{2} A^2 \right) \frac{dA}{dt} = A \frac{dA}{dt}$.

*71 次の式を利用: $V_{\theta} = L \frac{d\theta}{dt}$.

■微分方程式を解く

設問に合わせ、磁石の速度が $v = \frac{1}{4}u$ で一定の場合を論じる。また、ここでは物理量 O の時間微分を $\dot{O} = \frac{dO}{dt}$ と記す。

梯子コイルの運動方程式（接線成分）は、

$$ML\ddot{\theta} = -Mg \sin \theta + \frac{B^2 a^2}{R} \left(\frac{1}{4}u - L\dot{\theta} \cos \theta \right) \cos \theta = -Mg \theta + \frac{1}{4} \frac{B^2 a^2 u}{R} - \frac{B^2 a^2}{R} L\dot{\theta}$$

$$\therefore \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \left(\theta - \frac{B^2 a^2 u}{4MgR} \right) - \frac{B^2 a^2}{MgR} \dot{\theta}.$$

ここで、 $\Theta = \theta - \frac{B^2 a^2 u}{4MgR}$, $2\gamma = \frac{B^2 a^2}{MgR}$, $\omega^2 = \frac{g}{L}$ とすると、この微分方程式は、

$$\ddot{\Theta} + 2\gamma\dot{\Theta} + c\Theta = 0$$

となる。

さて、解として $\Theta = ce^{\lambda t}$ (c, λ は定数) を仮定すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} (ce^{\lambda t}) + 2\gamma \frac{d}{dt} (ce^{\lambda t}) + \omega^2 ce^{\lambda t} = 0$$

$$c\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma c\lambda e^{\lambda t} + \omega^2 ce^{\lambda t} = 0$$

$$ce^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2) = 0$$

となり、この式が任意の t で成り立つような λ は*72、

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad \therefore \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

である。この解は (i) $\gamma > \omega$, (ii) $\gamma = \omega$, (iii) $\gamma < \omega$ の3つの場合に分類され、振動しながら徐々に振幅が小さくなる解は (iii) である*73。この場合、

$$\lambda = -\gamma \pm i \underbrace{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}_{>0} (= \lambda_{\pm})$$

となり、 Θ の一般解は $e^{\lambda_+ t}$ と $e^{\lambda_- t}$ の線形結合で与えられ、初期条件から決まる未知定数を A, B とすれば*74、

$$\begin{aligned} \Theta &= Ae^{-\gamma t + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} + Be^{-\gamma t - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} \\ &= e^{-\gamma t} \left(Ae^{i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} + Be^{-i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} \right) \\ &= e^{-\gamma t} \left\{ (A + B) \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t \right) + i(A - B) \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t \right) \right\} \\ &= e^{-\gamma t} \left\{ C \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t \right) + D \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t \right) \right\} \end{aligned}$$

*72 $c = 0$ は $\Theta = 0$ の自明な解（振動中心で静止している解）である。

*73 この辺は大学に入ってからすぐにやる内容なので掘り下げることなく省略します。

*74 オイラーの公式を利用： $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 。

と書ける. なお, 最後に $C = A + B$, $D = i(A - B)$ とした. また, 角速度 $\dot{\theta} (= \dot{\theta})$ は,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\gamma e^{-\gamma t} \left\{ C \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) + D \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \right\} \\ & + \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} e^{-\gamma t} \left\{ -C \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) + D \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \right\}. \end{aligned}$$

考える解は初期条件 $\theta(0) = \theta_1$, $\dot{\theta}(0) = 0$ を満たすものであり*75,

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\theta_1 = C + 0, \\ 0 = -\gamma C + D\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{cases} \quad C = \frac{3}{4}\theta_1, \quad D = \frac{3}{4}\theta_1 \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$$

と未知定数 C , D が決定され,

$$\theta = \frac{\theta_1}{4} \left\{ 1 + 3e^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t - \delta) \right\}$$

を得る (図3)*76. ただし, $\tan \delta = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 - 1}$, $\theta_1 = \frac{B^2 a^2 u}{MgR}$, $\gamma = \frac{B^2 a^2}{2MgR}$, $\omega^2 = \frac{g}{L}$ である.

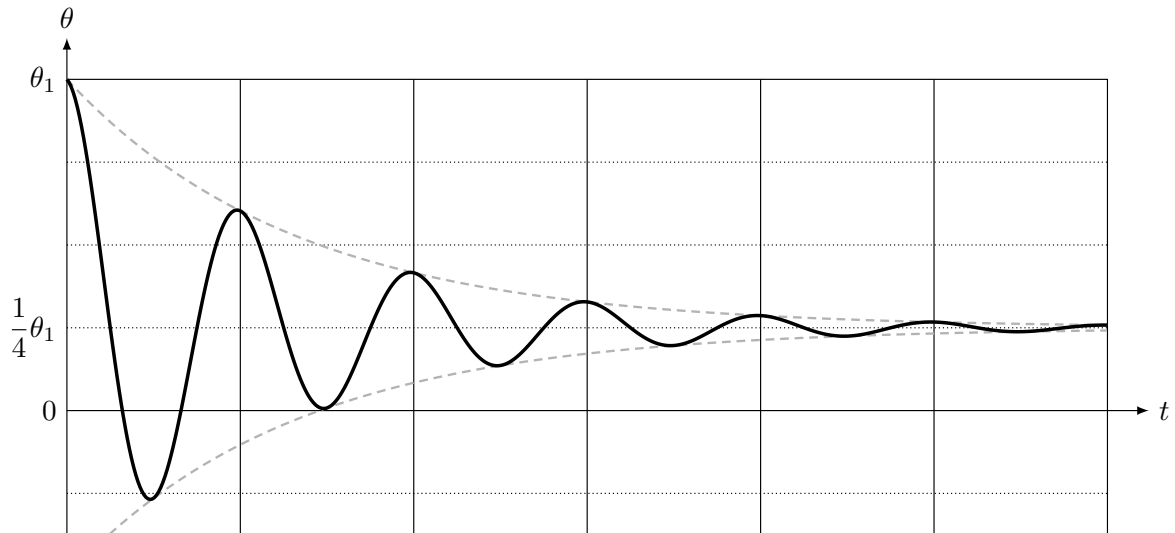


図 3

*75 $\theta(0) = \frac{3}{4}\theta_1$, $\dot{\theta}(0) = 0$.

*76 X で書きたい場合は両辺を L 倍すればよい.

3 熱あり過程

【メモ】

・ A 室については，熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程．定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P - V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算．

・ C 室については，準静的な断熱過程．準静的な断熱過程では，ポアソンの公式から圧力が体積の決定，状態方程式から温度の決定．熱力学第 1 法則は仕事の決定方程式となる．

・ 問(1)(d)は気体にむらが生じている過程．気体にむらが生じている場合，気体の圧力や温度は定義されず，仕事も計算できない．そのため，途中過程は問うことはできず，解法選択としては始状態と終状態のエネルギー収支一択となる．

【解答】

問(1) (a) 公式より，

$$U = \frac{3}{2}RT.$$

(b) 状態方程式より，

$$P = \frac{RT}{SL}.$$

(c) ピストンのつりあいより，

$$0 = K_0\Delta x - PS \quad \therefore \Delta x = \frac{PS}{K_0} = \frac{RT}{K_0L}.$$

(d) 気体とばねからなる系のエネルギー保存則より，

$$\frac{3}{2}RT' + \frac{1}{2}K_0 \cdot 0^2 = \frac{3}{2}RT + \frac{1}{2}K_0(\Delta x)^2 \quad \therefore T' = T + \frac{1}{3} \frac{K_0}{R} (\Delta x)^2.$$

問(2) (a) ポアソンの公式より，

$$P_1' \left(\frac{2}{3}SL \right)^\gamma = P_1(SL)^\gamma \quad \therefore P_1' = \left(\frac{3}{2} \right)^\gamma P_1.$$

(b) 状態方程式より，

$$\left(\frac{3}{2} \right)^\gamma P_1 \cdot \frac{2}{3}SL = RT_2 \quad \therefore T_2 = \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} \frac{P_1SL}{R} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} T_1.$$

(c) ばねの縮みを Δy とする。ピストンのつりあいより A 室の気体の圧力 P_A は、

$$P_A S = K_1 \Delta y = \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma P_1 S \quad \therefore P_A = \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma P_1.$$

よって、状態方程式より、

$$\left(\frac{3}{2}\right)^\gamma P_1 \cdot \frac{3}{2} S L = R T_3 \quad \therefore T_3 = \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma+1} T_1.}$$

(d) ばねの自然長を ℓ とする。始状態と終状態のピストンのつりあい^{*77*78}、および状態方程式より、

$$\begin{cases} 0 = P_1 S - K_1(\ell - L), \\ 0 = \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma P_1 S - K_1\left(\ell - \frac{5}{6}L\right), \\ 0 = P_1 S - K_1(\ell - L) \end{cases}$$

$$\therefore K_1 = 6 \underbrace{\left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma - 1 \right\} \frac{R T_1}{L^2}}, \quad \ell = \frac{(3/2)^\gamma - 5/6}{(3/2)^\gamma - 1} L.$$

(e) 公式より^{*79},

$$\Delta E = \frac{1}{2} K_1 \left(\ell - \frac{5}{6}L\right)^2 - \frac{1}{2} K_1 (\ell - L)^2 = \frac{1}{12} \underbrace{\left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma + 1 \right\} R T_1}.$$

*77 中央の部屋が真空なことからはばねは縮んでいる

*78 終状態のばねの長さ: $3L - \left(\frac{3}{2}L + \frac{2}{3}L\right) = \frac{5}{6}L.$

*79 $\ell - \frac{5}{6}L = \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma (\ell - L)^2, \quad \ell - L = \frac{1/6}{(3/2)^\gamma - 1} L.$

【補足】問(2)(c)を事細かに

A 室, および C 室の気体の圧力を P_A, P_C , 温度を T_A, T_C , ピストンの位置を x, y とする (図1). 始状態において $x = L, y = 2L$, 終状態では $x = \frac{3}{2}L, y = \frac{7}{3}L$ であり, 体積 $V_A = Sx, V_C = S(3L - y)$ である.

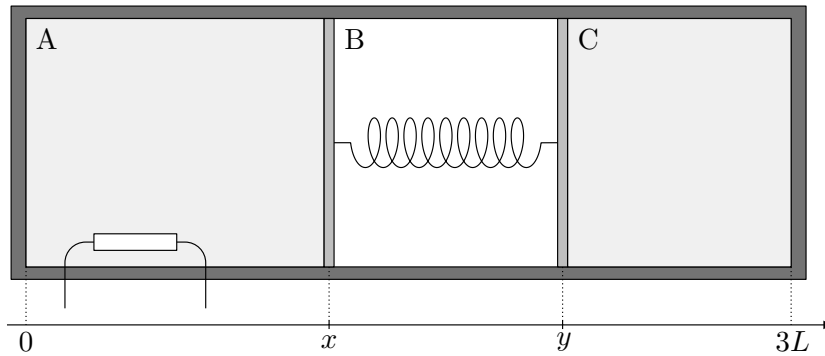


図3

■気体の圧力, 温度を求める

ピストンのつりあい, 状態方程式, ポアソンの公式 (C 室) より,

$$\begin{cases} 0 = P_A S - K_1 \{ \ell - L(y - x) \}, \\ 0 = P_C S - K_1 \{ \ell - L(y - x) \}, \\ P_A S x = R T_A, \\ P_C S (3L - y) = R T_C, \\ P_C \{ S(3L - y) \}^\gamma = \frac{R T_1}{S L} (S L)^\gamma. \end{cases}$$

つりあいより $P = P_A = P_C$ とする. また, $K_1 = 6 \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^\gamma - 1 \right\} \frac{R T_1}{L^2}$, $\ell = \frac{(3/2)^\gamma - 5/6}{(3/2)^\gamma - 1} L$ を用いれば, つりあい, およびポアソンの公式から位置 x は y を用いて,

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{3L - y} \right)^\gamma \frac{R T_1}{S L} &= \frac{6}{S} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^\gamma - 1 \right\} \frac{R T_1}{L^2} \left\{ \frac{(3/2)^\gamma - 5/6}{(3/2)^\gamma - 1} L - (y - x) \right\} \\ \therefore x &= y + \frac{1}{6} \frac{L}{(3/2)^\gamma - 1} \left(\frac{L}{3L - y} \right)^\gamma - \frac{(3/2)^\gamma - 5/6}{(3/2)^\gamma - 1} L \end{aligned}$$

と表せる. 以上より, A 室, C 室それぞれの気体の状態は以下のように求まる.

$$\begin{cases} P = \left(\frac{L}{3L - y} \right)^\gamma \frac{R T_1}{S L}, \\ T_A = \left(\frac{L}{3L - y} \right)^\gamma \left\{ \frac{y}{L} + \frac{1}{6} \frac{L}{(3/2)^\gamma - 1} \left(\frac{L}{3L - y} \right)^\gamma - \frac{(3/2)^\gamma - 5/6}{(3/2)^\gamma - 1} \right\} T_1, \\ T_C = \left(\frac{L}{3L - y} \right)^{\gamma-1} T_1, \\ V_A = S x, \\ V_C = S(3L - y). \end{cases}$$

■仕事, 熱の計算の全て

まず, A 室の気体について. 内部エネルギー変化 ΔU_A は,

$$\Delta U_A = \frac{3}{2} R \Delta T_A = \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma+1} - 1 \right\} RT_1.$$

仕事 W_A は,

$$W_A = \int_{SL}^{\frac{3}{2}SL} P dV_A = \int_{x=L}^{x=\frac{3}{2}L} P \frac{dV_A}{dx} dx = \int_{y=2L}^{y=\frac{7}{3}L} P \frac{dV_A}{dx} \frac{dx}{dy} dy$$

を計算すればよい. 置換積分に伴う因子はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \frac{dV_A}{dx} &= S, \\ \frac{dx}{dy} &= 1 + \frac{\gamma}{6} \frac{L}{(3/2)^\gamma - 1} \left(\frac{L}{3L-y} \right)^{\gamma+1} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} W_A &= \frac{RT_1}{L} \int_{2L}^{\frac{7}{3}L} \left(\frac{L}{3L-y} \right)^\gamma \left\{ 1 + \frac{\gamma}{6} \frac{L}{(3/2)^\gamma - 1} \left(\frac{L}{3L-y} \right)^{\gamma+1} \right\} dy \\ &= \frac{RT_1}{L} \int_{2L}^{\frac{7}{3}L} \left(\frac{L}{3L-y} \right)^\gamma dy + \frac{RT_1}{L} \int_{2L}^{\frac{7}{3}L} \frac{\gamma}{6} \frac{L}{(3/2)^\gamma - 1} \left(\frac{L}{3L-y} \right)^{2\gamma+1} dy \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1 + \frac{1}{12} \frac{1}{(3/2)^\gamma - 1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{2\gamma} - 1 \right\} RT_1 \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1 + \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^\gamma + 1 \right\} RT_1. \end{aligned}$$

よって, A 室の気体の吸熱量 Q_A は, 熱力学第 1 法則より,

$$\begin{aligned} Q_A &= \Delta U_A + W_A \\ &= \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma+1} - 1 \right\} RT_1 + \frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1 + \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^\gamma + 1 \right\} RT_1. \end{aligned}$$

続いて, C 室の気体について. 内部エネルギー変化 ΔU_C は,

$$\Delta U_C = \frac{3}{2} R \Delta T_C = \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1.$$

仕事 W_C は*80,

$$W_C = \int_{y=2L}^{y=\frac{7}{3}L} P \frac{dV_C}{dy} dy = -\frac{RT_1}{L} \int_{2L}^{\frac{7}{3}L} \left(\frac{L}{3L-y} \right)^\gamma dy = -\frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1.$$

*80 置換積分の因子: $\frac{dV_C}{dy} = -S$.

よって、熱力学第1法則より、

$$0 = \Delta U_C + W_C = \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1 - \frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1.$$

であり、 $\gamma = \frac{5}{3}$ より右辺が0になることが確認できる。

■ A, B, C からなる系の熱力学第1法則から弾性エネルギーを逆算して求める

先の計算結果より、

$$W_A + W_C = \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma} + 1 \right\} RT_1$$

であるから、

$$Q_A = \underbrace{\frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma+1} - 1 \right\} RT_1}_{=\Delta U_A} + \underbrace{\frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1}_{=\Delta U_C} + \underbrace{\frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma} + 1 \right\} RT_1}_{=W_A+W_C}.$$

と見ることができる。

翻って、A室の気体、ばね（弾性エネルギー変化を ΔU_B とする）、C室の気体からなる系の熱力学第1法則は、

$$Q_A = \Delta U_{A+B+C} + W_{A+B+C} = \Delta U_A + \Delta U_B + \Delta U_C$$

である*81。よって、2式を比較すれば、

$$\Delta U_B = W_A + W_C = \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma} + 1 \right\} RT_1$$

と弾性エネルギー変化を逆算的に求めることができる。

*81 系全体は外界に仕事をしていない、すなわち $W = 0$ であることに注意。

2018 年度 解答

1 衝突，時間追跡できる運動（等加速度運動，単振動）

【メモ】

- ・衝突，および時間追跡（等加速度運動，単振動）から構成される。
- ・問(1)は等加速度運動，問(2)は単振動．時刻 t は問われていないのでエネルギーで論じればよい。

【解答】

問(1) (a) つりあいより，

$$M \cdot 0 = Mg - \rho S d g \quad \therefore d = \frac{M}{\rho S}, \quad F_0 = -\rho S d g = \underline{\underline{Mg}}.$$

(b) 衝突直前の小球の速度 v_0 は，小球のエネルギー収支より*82，

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = m g h \cos 0 \quad \therefore v_0 = \underline{\underline{\sqrt{2gh}}}.$$

また，衝突の直前・直後の運動量保存則，およびはね返り係数の式より，

$$\begin{cases} MV + mv = m\sqrt{2gh}, \\ V - v = -(0 - \sqrt{2gh}) \end{cases} \quad \therefore V = \frac{2m}{M+m}\sqrt{2gh}, \quad v = \frac{m-M}{M+m}\sqrt{2gh}.$$

(c) 衝突後の小球は x 軸正方向に大きさ g の加速度の等加速度運動を行う．衝突後の小球のエネルギー収支より*83，

$$\frac{1}{2} m \cdot 0^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{m-M}{M+m} \sqrt{2gh} \right)^2 = m g H \cos \pi \quad \therefore H = \underline{\underline{\left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 h}}.$$

問(2) (a) 物体間の垂直抗力の大きさを N とする．つりあいより，

$$\begin{cases} 0 = Mg - \rho S d g, \\ 0 = Mg + N - kx_0 - \rho S g(d + x_0), \\ 0 = mg - N \end{cases} \quad \therefore x_0 = \frac{mg}{\underline{\underline{k + \rho S g}}}.$$

(b) 2物体が接触している間を考えるため，2物体の加速度は等しい（束縛条件）．2物体の加速度 a は運動方程式より，

$$\begin{cases} Ma = Mg + N - kx - \rho S g \left(\frac{M}{\rho S} + x \right), \\ ma = mg - N \end{cases} \quad \therefore a = -\frac{k + \rho S g}{M + m} \left(x - \frac{mg}{k + \rho S g} \right)$$

*82 力学的エネルギー保存則： $\frac{1}{2} m v_0^2 = m g h$ ， 時間追跡： $\begin{cases} x = -h + \frac{1}{2} g t^2, \\ v = g t. \end{cases}$

*83 力学的エネルギー保存則： $m g H = \frac{1}{2} m \left(\frac{m-M}{M+m} \sqrt{2gh} \right)^2$ ， 時間追跡： $\begin{cases} x = \frac{m-M}{M+m} \sqrt{2gh} t + \frac{1}{2} g t^2, \\ v = \frac{m-M}{M+m} \sqrt{2gh} + g t. \end{cases}$

となり, $K = k + \rho Sg$ とわかる. また, 2 物体は一体のまま角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k + \rho Sg}{M + m}}$, 振動中心 $x = x_0$ の単振動を行い, その周期 T は,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M + m}{k + \rho Sg}}.$$

- (c) 初期条件より, おもりと一体の間の円柱の運動は振幅 x_0 , 角振動数 $\frac{K}{M + m}$, 振動中心 $x = x_0$ の単振動である. したがって, $x = x_0$ を通過する瞬間の円柱の速さは $x_0\omega$ である. それから, おもりを取り除いた後の円柱の運動は, 運動方程式より,

$$Ma = Mg - kx - \rho Sg \left(\frac{M}{\rho S} + x \right) = -(k + \rho Sg)x = -Kx$$

であるから, 円柱は角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$, 振動中心 $x = 0$ の単振動を行う. よって, 円柱のエネルギー収支より振幅を $A (> 0)$ として*84,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \left(x_0 \sqrt{\frac{K}{M + m}} \right)^2 &= \int_{x_0}^A (-Kx) dx \\ &= -\frac{1}{2}KA^2 + \frac{1}{2}Kx_0^2 \\ \therefore A &= x_0 \sqrt{\frac{2M + m}{M + m}}. \end{aligned}$$

*84 円柱, ばね, 重力場からなる力学的エネルギー収支:

$$\underbrace{\left\{ \frac{1}{2}M \cdot 0^2 - \frac{1}{2}M(x_0\omega)^2 \right\}}_{\text{円柱}} + \underbrace{\{MgA - Mg(-x_0)\}}_{\text{重力場}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 \right)}_{\text{ばね}} = \int_{x_0}^A \left\{ -\rho Sg \left(\frac{M}{\rho S} + x \right) \right\} dx,$$

$$\text{時間追跡: } \begin{cases} x = x_0 \sin \left(\sqrt{\frac{K}{M}} t \right) + x_0 \sqrt{\frac{M}{M + m}} \cos \left(\sqrt{\frac{K}{M}} t \right), \\ v = x_0 \sqrt{\frac{K}{M}} \cos \left(\sqrt{\frac{K}{M}} t \right) - x_0 \sqrt{\frac{K}{M + m}} \sin \left(\sqrt{\frac{K}{M}} t \right). \end{cases}$$

2 中身の見えるコンデンサ

【メモ】

- ・問(1)は中身の見えるコンデンサに関する出題. と言っても, 問(1)(c)のみ.
- ・問(2)はコンデンサを含む回路の問題. 電気回路は, 以下の3式によって一意に決まる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{array} \right.$$

【解答】

問(1) (a) 公式より,

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{x}.$$

(b) $a \leq x \leq b$ では $C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{x}$ ゆえ, 帯電量 Q_1 はキルヒホッフ則より,

$$V - \frac{Q_1}{C_1} = 0 \quad \therefore Q_1 = C_1 V = \frac{\varepsilon_0 S V}{x}.$$

また, 静電エネルギーは公式より,

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} = \frac{1}{2} \frac{(C_1 V)^2}{C_1} = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2x}.$$

$b < x < c$ では極板は孤立し, 帯電量は $x = b$ での電荷で保存する. よって, 帯電量 $Q_1 = \frac{\varepsilon_0 S V}{b}$ であり, 静電エネルギーは公式より,

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2b}.$$

(c) 回路のエネルギー収支より*85,

$$\underbrace{\Delta Q V}_{\text{電池の仕事}} + W = \Delta U \quad \therefore W = \left(\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S V^2}{b} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S V^2}{a} \right) - \left(\frac{\varepsilon_0 S V}{b} - \frac{\varepsilon_0 S V}{a} \right) V$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \varepsilon_0 S V^2.$$

問(2) (a) 並列合成則より

$$C_{GP} = C_c + C_2.$$

*85 極板間引力が求まるので, 仕事の定義から計算もできる. 【補足】を参照.

(b) キルヒホッフ則, および電荷保存則より,

$$\begin{cases} -\frac{Q_1}{C_c} + \frac{Q_2}{C_2} = 0, \\ Q_1 + Q_2 = Q_b \end{cases} \quad \therefore Q_2 = \frac{C_2}{C_c + C_2} Q_b, \quad Q_c = \frac{C_c}{C_c + C_2} Q_b.$$

(c) n 回目操作終了後のコンデンサ 1, 2 の帯電量をそれぞれ $Q_1^{(n)}$, $Q_2^{(n)}$ とする. n 回目操作終了後のキルヒホッフ則, および電荷保存則は,

$$\begin{cases} -\frac{Q_1^{(n)}}{C_c} + \frac{Q_2^{(n)}}{C_2} = 0, \\ Q_1^{(n)} + Q_2^{(n)} = Q_b + Q_2^{(n-1)}. \end{cases}$$

無限回操作後, 電荷がある値に収束することから $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_1^{(n-1)} = Q_1^{(\infty)}$ (2 も同様) ゆえ *86,

$$\begin{cases} -\frac{Q_1^{(\infty)}}{C_c} + \frac{Q_2^{(\infty)}}{C_2} = 0, \\ Q_1^{(\infty)} + Q_2^{(\infty)} = Q_b + Q_2^{(\infty)}. \end{cases} \quad \therefore \frac{Q_2^{(\infty)}}{C_2} = \frac{Q_1^{(\infty)}}{C_c} = \frac{Q_b}{C_c} = \frac{c}{b} V (= V_F).$$

【補足】問(1)(c)の仕事定義通り

コンデンサ 1 の極板に生じる極板間引力 F (鉛直上向きを正) は, 極板間の電場の大きさ $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$ を踏まえて,

$$F = -\frac{1}{2}QE = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2} = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} \left(\frac{\varepsilon_0 SV}{x} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x^2}$$

となる. つりあいより, ピストンに加える外力 F_{ex} は $F_{\text{ex}} = -F$ であり *87, $x = a$ から $x = b$ までに外力のする仕事は,

$$W = \int_a^b F_{\text{ex}} dx = - \int_a^b \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \varepsilon_0 SV.$$

*86 等比数列になるので漸化式を解いてもよいが解答としては回りくどい. 一般項を求めたい人は各自求めてみよう.

*87 つりあいの式: $m \cdot 0 = F_{\text{ex}} + F$.

3 干渉

【メモ】

・干渉条件は m を整数として,

$$(\text{位相差}) = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強めあい}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱めあい}) \end{cases}$$

と計算するようにする. 位相差は $\frac{2\pi}{\lambda}$ (経路差) に反射による位相のずれを加減すればよい*88.

【解答】

問(1) (a) 三平方の定理より,

$$\ell_A = \sqrt{\ell^2 + \left(Y - \frac{d}{2}\right)^2}, \quad \ell_B = \sqrt{\ell^2 + \left(Y + \frac{d}{2}\right)^2}.$$

(b) 経路差 $\ell_B - \ell_A$ は,

$$\begin{aligned} \ell_B - \ell_A &= \sqrt{\ell^2 + \left(Y + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{\ell^2 + \left(Y - \frac{d}{2}\right)^2} \\ &= \ell \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{Y + d/2}{\ell}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{Y - d/2}{\ell}\right)^2} \right\} \\ &\doteq \ell \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Y + d/2}{\ell}\right)^2 - 1 - \left(\frac{Y - d/2}{\ell}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{Yd}{\ell}. \end{aligned}$$

よって, 強め合いが観測される位置 $Y = Y_m$ は,

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{Yd}{\ell} = 2m\pi, \quad \therefore Y_m = \frac{\ell\lambda}{d} m.$$

(c) 前問同様に位相差を計算して*89,

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{Dd}{L} + \frac{Y'_m d}{\ell} \right) = 2m\pi \quad \therefore Y'_m = \frac{\ell\lambda}{d} m - \frac{Dd}{L}.$$

よって, 強め合いの位置のずれ ΔY は,

$$\Delta Y = Y'_m - Y_m = -\frac{Dd}{L}.$$

*88 屈折率 n の媒質中では波長 λ を $\frac{\lambda}{n}$ とする.

*89 左側の領域の経路差: $\sqrt{L^2 + \left(D + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(D - \frac{d}{2}\right)^2} \doteq \frac{Dd}{L}$.

問(2) (a) Oにおいて、温度の上昇の過程に伴い強め合いと弱め合いの繰り返しが観測され、4回目の強め合いを観測していることから2つの波の位相差は $\pm 2 \times 3\pi$ である。よって、

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda_B}w - \frac{2\pi}{\lambda_A}w &= \pm 6\pi \\ \frac{1}{\lambda_B} &= \frac{1}{\lambda_A} \pm \frac{3}{w} \\ &= \frac{10}{w} \pm \frac{3}{w} \quad \therefore \lambda_B = \frac{1}{7}w, \frac{1}{13}w. \end{aligned}$$

ここで、温度の上昇とともに音速が上昇したことから（振動数が不変のため）波長も増加することから $\lambda_B = \frac{1}{7}w$ が適当で（ $m = -3$ に対応）,

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{10}{7}.$$

(b) $\lambda_B = \frac{10}{7}\lambda_A = \frac{10}{7}\left(\frac{w}{10} - \Delta\lambda'\right)$ である*90。また、前問の結果より考える強め合いは $m = -3$ の強め合いに対応することから位相差は、

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda_B}w - \frac{2\pi}{\lambda_A}w + \frac{2\pi}{\lambda_A}(\ell_B - \ell_A) &= -6\pi \\ \frac{7}{10}w - w + \frac{\Delta Y' d}{\ell} &= -3\lambda_A = -3\left(\frac{w}{10} - \Delta\lambda'\right) \\ \therefore \Delta Y' &= \frac{3\ell}{d} \Delta\lambda' \quad (\underline{\underline{y \text{ 軸正方向}}}). \end{aligned}$$

*90 温度は一定なままなので $V_B = \frac{10}{7}V_A$ は保たれ、波長も常に $\lambda_B = \frac{10}{7}\lambda_A$ の関係性を満たす。
2025.04.04 版

2017 年度 解答

1 衝突，時間追跡できる運動（等加速度運動，単振動）

【メモ】

・全て運動方程式を立てるだけの問題。

【解答】

問(1) (a) 物体間の静摩擦力の大きさを R とする。運動方程式より，

$$\begin{cases} Ma_0 = F_0 - R, \\ ma_0 = R \end{cases} \quad \therefore a_0 = \frac{F_0}{M+m}, \quad M_0 = \frac{F_0}{a_0} = \underline{\underline{M+m}}.$$

(b) 運動方程式より $R = \frac{m}{M+m}F_0$ ゆえ，滑らない条件 $R < \mu N$ を考えて，

$$\underbrace{\frac{m}{M+m}F_0}_{=ma_0} < \mu mg \quad \therefore \underline{\underline{a_0 < \mu g}}.$$

問(2) (a) $F = F_1$ のとき滑りが生じることから，滑らない条件の対偶を考えて，

$$\frac{m}{M+m}F \geq \mu mg \quad \therefore F \geq \underline{\underline{\mu(M+m)g}} (= F_1).$$

(b) 滑りが生じていることから物体間には動摩擦力が生じている。運動方程式より，

$$\begin{aligned} Ma_1 &= \mu(M+m)g - \mu'mg \\ \therefore a_1 &= \underbrace{\left(1 + \frac{m}{M}\right)\mu g - \frac{m}{M}\mu'g}_{\text{}} , \quad M_1 = \frac{F_1}{a_1} = \frac{(M+m)\mu}{\underline{\underline{(M+m)\mu - m\mu'}}}M. \end{aligned}$$

問(3) (a) 滑りの向きが反転していることを考慮して*91，運動方程式より，

$$\begin{aligned} Ma_2 &= \mu(M+m)g + \mu'mg \\ \therefore a_2 &= \underbrace{\left(1 + \frac{m}{M}\right)\mu g + \frac{m}{M}\mu'g}_{\text{}} , \quad M_2 = \frac{F_1}{a_2} = \frac{(M+m)\mu}{\underline{\underline{(M+m)\mu + m\mu'}}}M. \end{aligned}$$

(b) 式の形から $M_2 < M_1$ ， $M_2 < M_0$ は明らか。 M_1 と M_0 の大小関係については*92，

$$\begin{aligned} M+m &\geq \frac{(M+m)\mu}{(M+m)\mu - m\mu'}M \\ (M+m)\mu - m\mu' &\geq M\mu \\ \underbrace{m(\mu - \mu')}_{>0} &\geq 0 \\ \therefore M+m &> \frac{(M+m)\mu}{(M+m)\mu - m\mu'}M. \end{aligned}$$

*91 容器内左面の壁と衝突した後の運動。

*92 1行目から2行目の式変形では， $\mu > \mu'$ より分母が正であることから不等号の向きは変わらない（そもそも質量ゆえ正であることは明らか）。

以上より, 大小関係は $M_2 < M_1 < M_0$ の順である.

$$(c) \quad a_0 = \frac{F_0}{M+m}, \quad a_1 = \frac{F_1}{M} - \frac{m}{M}\mu'g, \quad a_2 = \frac{F_1}{M} + \frac{m}{M}\mu'g \text{ より,}$$

$$M = \frac{2F_1}{\underbrace{a_1 + a_2}},$$

$$m = \frac{1}{a_0}(F_0 - Ma_0) = \frac{F_0}{\underbrace{a_0}} - \frac{2F_1}{\underbrace{a_1 + a_2}},$$

$$\mu = \frac{F_1}{(M+m)g} = \frac{a_0g}{\underbrace{F_0F_1}},$$

$$\mu' = \frac{M}{mg} \left(a_2 - \frac{F_1}{M} \right) = \frac{F_1(a_2 - a_1)}{\underbrace{F_0(a_1 + a_2) - 2F_1a_0}} \frac{a_0}{g}.$$

2 荷電粒子の運動

【メモ】

・等加速度運動と等速円運動の時間追跡.

【解答】

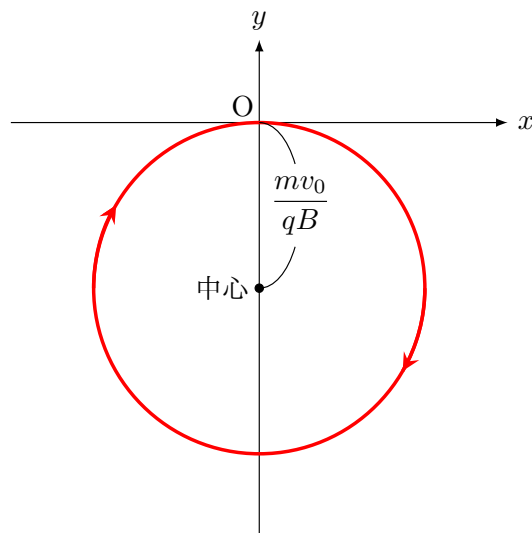
問(1) (a) つりあいより,

$$m \cdot 0 = qE_0 - mg \quad \therefore E_0 = \frac{mg}{q}.$$

(b) 粒子は x 軸正方向の初速度で運動を始め, この瞬間から速度に対して右回りの方向に速度と直行したローレンツ力を受け等速円運動を行う^{*93}. 運動方程式 (中心成分) より円運動の半径 r は,

$$m \frac{v_0^2}{r} = qv_0B \quad \therefore r = \frac{mv_0}{qB}.$$

以上より, 粒子の軌跡は以下の図のようになる.



(c) xy 平面内は半径 $\frac{mv_0}{qB}$, 中心 $\left(0, -\frac{mv_0}{qB}\right)$ の等速円運動. z 方向は運動方程式より,

$$ma_z = qE - mg \quad \therefore a_z = \frac{qE}{m} - g.$$

^{*93} ローレンツ力が速度と直交していることからローレンツ力は仕事をせず, 粒子の速さは一定となる.

であり、等加速度運動を行う。よって、 $t=0$ で $v_z=0$, $x=y=z=0$ を踏まえて、

$$\begin{cases} x = \frac{mv_0}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right), \\ y = -\frac{mv_0}{qB} \left\{1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right\}, \\ z = \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{m} - g\right) t^2. \end{cases}$$

問(2) (a) 物体の位置 (x, y, z) は、

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = 0, \\ z = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

$z=0$ を満たす時刻は $t = \frac{2v_1}{g}$ ゆえ、

$$x = \frac{2v_0 v_1}{g}, \quad y = 0.$$

(b) 問(1)(c)の x, y に $t = \frac{2v_1}{g}$ を代入して、

$$x = \frac{mv_0}{qB} \sin\left(\frac{2qv_1 B}{mg}\right), \quad y = -\frac{mv_0}{qB} \left\{1 - \cos\left(\frac{2qv_1 B}{mg}\right)\right\}.$$

(c) $y=0$ となる状況を考えて、

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2qv_1 B}{mg}\right) &= 1 \\ \frac{2qv_1 B}{mg} &= 2\pi n \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \therefore B &= \frac{\pi mg}{qv_1} n \quad \therefore B_{\min} = \frac{\pi mg}{qv_1}. \end{aligned}$$

(d) 加速度の z 成分が $g - \frac{qE}{m}$ となる。したがって、問(2)(1)(b)の議論を $g \rightarrow g - \frac{qE}{m}$ とすれば、 $z=0$ を通過する時刻は $t = \frac{2v_1}{g - qE/m}$ であり、 $y=0$ となる状況を考えて、

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{qvB}{m} \frac{2v_1}{g - qE/m}\right) &= 1 \\ \frac{2qv_1 B}{mg - qE} &= 2\pi n \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \therefore E &= \frac{mg}{q} - \frac{v_1 B}{\pi n} \quad \therefore E_{\min} = \frac{mg}{q} - \frac{v_1 B}{\pi}. \end{aligned}$$

3 波の式, 固有振動, ドップラー効果

【メモ】

・波の式のパートは誘導に従って計算するだけ。固有振動は、定常波の横波表現をの図を用いて、管長と波長の長さを対応させればよい。

・ドップラー効果は、公式を用いるだけの問題と公式を導出する問題に分けられ、前者の方が得点しやすい問題となる。今回は前者の問題である。が、ちらりと出てくるだけで、問題全体としては波の式と固有振動からなる。

【解答】

問(1) (a) $x = 0$ は固定端のため境界条件 $F_1(t, 0) + F_2(t, 0) = 0$ を満たし*94,

$$\begin{aligned} A_1 \sin(2\pi ft) + A_2 \sin(2\pi ft) &= 0 \\ (A_1 + A_2) \sin(2\pi ft) &= 0 \quad \therefore A_2 = -A_1 \end{aligned}$$

の関係を得る (問題文の誘導)。

同様に $x = L$ は自由端のため境界条件 $F_1(t, L) = F_2(t, L)$ を満たし、 $A_2 = -A_1$ を考慮すれば、

$$\begin{aligned} A_1 \sin\left(2\pi ft + \frac{2\pi}{\lambda}L\right) + A_1 \sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}L\right) &= 0 \\ 2A_1 \sin\left(\underbrace{2\pi ft}_\tau\right) \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}L}_\lambda\right) &= 0 \end{aligned}$$

を得る。任意の時刻 t で上記等式が成り立つためには $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right) = 0$ が必要で、

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = \frac{\pi}{2}(2m - 1) \quad \therefore \lambda = \frac{4}{\underbrace{2m - 1}_\nu}L$$

以上より、管内で観測される合成波は、

$$\begin{aligned} F &= F_1(t, x) + F_2(t, x) \\ &= A_1 \sin\left(2\pi ft + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) - A_1 \sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\ &= 2A_1 \sin\left\{\underbrace{\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}}_x\right\} \cos\left(\underbrace{2\pi ft}_\tau\right) \end{aligned}$$

となる。

*94 任意の時刻 t で 0 となるには $A_1 + A_2 = 0$ となる必要がある。

(b) $m = 3$ の下で $\sin \left\{ \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right\} = 0$ となるときを考えて,

$$\frac{5}{2} \frac{\pi x}{L} = n\pi \quad \therefore x = \frac{2}{5} nL.$$

ここで, n は整数である. $0 \leq x \leq L$ より n は,

$$0 \leq \frac{2}{5} nL \leq L \quad \therefore n = 0, 1, 2$$

と求まり,

$$x = 0, \frac{2}{5}L, \frac{4}{5}L.$$

(c) $x = 0$ が自由端であることから $F_1 = F_2$ より $A_1 = A_2$ が結論付けられ, 同様に $x = L$ が自由端であることから,

$$A_1 \sin \left(2\pi ft + \frac{2\pi}{\lambda} L \right) = A_2 \sin \left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda} L \right) \quad \therefore \lambda = \frac{2}{n} L \quad (n \text{ は自然数}).$$

また, このとき,

$$\begin{aligned} F(t, x) &= A_1 \sin \left(2\pi ft + \frac{2\pi}{\lambda} x \right) + A_2 \sin \left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \\ &= 2A_1 \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \sin(2\pi ft). \end{aligned}$$

問(2) (a) 閉管の共鳴時の音の波長は $\lambda_{\text{閉}} = \frac{L}{2m-1}$ であり, 開管の共鳴時の音の波長は $\lambda_{\text{開}} = \frac{2}{n}L$ を満たす. さらに, 閉管における振動数はドップラー効果の公式より $f_{\text{閉}} = \frac{V}{V+v_s} f_s$, 同様に開管では $f_{\text{開}} = \frac{V}{V-v_s} f_s$ である. いずれの場合も音速は共通の値を取ることから,

$$\frac{4L}{2m-1} \frac{V}{V+v_s} f_s = \frac{2L}{n} \frac{V}{V-v_s} f_s \quad \therefore \frac{v_s}{V} = \frac{2n-2m+1}{2n+2m-1}.$$

(b) 波の基本式より,

$$V = \frac{4L}{2m-1} \frac{V}{V+v_s} f_s \quad \therefore m = \frac{1}{2} + \frac{1}{170} \frac{f_s}{1+v_s/V}$$

ここで, $300 \text{ Hz} \leq f_s \leq 400 \text{ Hz}$, $0 \leq \frac{v_s}{V} \leq \frac{1}{3}$ より^{*95},

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{170} \frac{300}{1+1/3} &\leq m \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{100} \frac{400}{1+0} \\ \therefore 1 + \frac{28}{34} &\leq m \leq 2 + \frac{29}{34} \quad \therefore m = 2. \end{aligned}$$

^{*95} 次のように回りくどく考えてもよい (ページを跨ぎます): $f_s = \frac{V}{2L} \left(m - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{v_s}{V} \right)$, $300 \text{ Hz} \leq f_s \leq 400 \text{ Hz}$ より,

$$\frac{60}{17(2m-1)} - 1 \leq \frac{v_s}{V} \leq \frac{80}{17(2m-1)} - 1$$

(c) $m = 2$ の下で^{*96},

$$\frac{v_s}{V} = \frac{2n - 3}{2n + 3}$$

であり, $0 \leq \frac{v_s}{V} \leq \frac{1}{3}$ より,

$$0 \leq \frac{2n - 3}{2n + 3} \leq \frac{1}{3}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} \leq n \leq 3 \quad \therefore n = 2, 3.$$

$n = 2$ の下では,

$$\frac{v_s}{V} = \frac{1}{7}, \quad \therefore f_s = \frac{3}{4} \times 340 \left(1 + \frac{1}{7}\right) = 291 + \frac{3}{7} \text{ Hz}$$

となり, $300 \text{ Hz} \leq f_s \leq 400 \text{ Hz}$ の範囲外であり不適.

$n = 3$ の下では,

$$\frac{v_s}{V} = \frac{1}{3}, \quad \therefore f_s = \frac{3}{4} \times 340 \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{340 \text{ Hz}}}$$

となり $300 \text{ Hz} \leq f_s \leq 400 \text{ Hz}$ の範囲を満たす.

となり, この不等式が $0 \leq \frac{v_s}{V} \leq \frac{1}{3}$ と共通部分を持つような m を考えればよい. 共通部分を持たない場合の否定を考えて,

$$\begin{cases} \frac{60}{17(2m-1)} - 1 \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{80}{17(2m-1)} - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \therefore 1 + \frac{14}{17} \leq m \leq 2 + \frac{29}{34}, \quad \therefore m = 2.$$

^{*96} $m = 2$ を代入し, m と同様回りくどく考えると $1 + \frac{13}{17} \leq n \leq 3 + \frac{9}{17}$ となり $n = 2, 3$ を得る.

2016 年度 解答

1 動く座標系, 多体系, 衝突

【メモ】

- ・問(1), 問(2)は動く座標系内部での物体の運動を問う問題. 設問はともに抗力の存在条件.
- ・問(2)は衝突に関する問題. 衝突は, 以下 2 式を連立.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{衝突の直前, 直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{array} \right.$$

なお, 衝突に関与する物体が外力によって固定されているとき運動量保存則は成り立たない.

【解答】

問(1) (a) 重力と慣性力の合力の各成分は,

$$F_x = -m_B g \sin \theta + m_B a_A \cos \theta, \quad F_y = -m_B g \cos \theta - m_B a_A \sin \theta.$$

(b) 小球 B が物体 A, および物体 A の平板から受ける垂直抗力の x 成分を N_x , y 成分を N_y とする. A に固定された座標系 xy 系 (以降 A 固定系と呼ぶ) において小球 B が静止しているとき (平板と接しているとき) の, A 固定系における小球 B のつりあいより,

$$m \cdot 0 = N_x + F_x \quad \therefore N_x = -F_x = m_B g \sin \theta - m_B a_A \cos \theta.$$

$N_x > 0$ であれば離れていない状態であるから, 離れる瞬間はその対偶 $N \leq 0$ を考えて*97,

$$N_x = m_B g \sin \theta - m_B a_A \cos \theta \leq 0 \quad \therefore a_A \geq \tan \theta.$$

問(2) 地面固定系として水平左向きに X 軸, 鉛直上向きに Y 軸を定め, 原点をばねが自然長となるときの物体 A の位置に定める. すなわち $t = 0$ において $X(0) = -L$ であり, $\dot{X}(0) = 0$ である.

(a) 2 物体が一体のまま運動している間を考える. 小球 B が物体 A から受ける垂直抗力の x 成分を N_x , y 成分を N_y , 物体 A の位置を X とする. 地面固定系の物体 A の運動方程式, および A 固定系における小球 B のつりあいより, 物体 A の加速度 a_A は*98,

$$\left\{ \begin{array}{l} m_A a_A = -kX + N_x \cos \theta - N_x \sin \theta, \\ \left\{ \begin{array}{l} m_B \cdot 0 = N_x - m_B g \sin \theta + m_B a_A \cos \theta, \\ m_B \cdot 0 = N_y - m_B g \cos \theta - m_B a_A \sin \theta \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \therefore a_A = -\frac{k}{m_A + m_B} X$$

*97 これはあくまでも「抗力が値を持って存在しているとき 2 物体は接触している」という命題の対偶を考えているだけであり, 実際に $N < 0$ となることはないことに注意したい. 等号の有無に関してはどちらでも良い.

*98 全て地面固定系で考えた場合: $\left\{ \begin{array}{l} m_A a_A = -kX + N_x \cos \theta - N_x \sin \theta, \\ m_B a_A = -N_x \cos \theta - N_y \sin \theta, \\ m_B \cdot 0 = N_x \sin \theta + N_y \cos \theta - m_B g. \end{array} \right.$

となり、振動中心 $X = 0$ 、角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_A + m_B}}$ の単振動を行うことがわかる。一体となっている間の物体 A の位置 X は、初期条件より、

$$X = -L \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m_A + m_B}} t \right)$$

と表され、 X の取り得る範囲が $-L \leq X \leq L$ であることがわかる^{*99}。また、運動方程式より、

$$N_x = -m_B a_A \cos \theta + m_B g \sin \theta = -\frac{m_B}{m_A + m_B} k X \cos \theta + m_B g \sin \theta$$

であり、 N_x の最小値 $\min\{N_x\}$ が $\min\{N_x\} \leq 0$ であれば小球 B は平板から離れる。よって、

$$\min\{N_x\} = -\frac{m_B}{m_A + m_B} k L \cos \theta + m_B g \sin \theta \leq 0 \quad \therefore L \geq \underbrace{\frac{(m_A + m_B)g}{k} \tan \theta}_{\text{~~~~~}}$$

(b) 運動方程式より、

$$N_y = m_B a_A \sin \theta + m_B g \cos \theta = \frac{m_B}{m_A + m_B} k X \sin \theta + m_B g \cos \theta$$

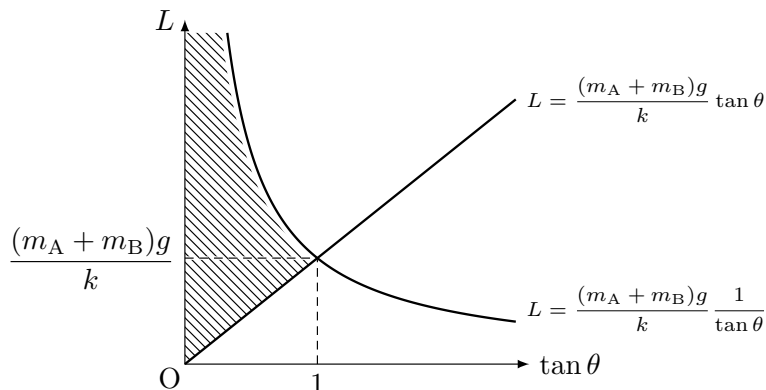
であり、小球 B が物体 A と接触を保っているとき N_y は恒等的に正の値を取ることから、 N_y の最小値 $\min\{N_y\}$ は $\min\{N_y\} > 0$ を満たす。よって、

$$\min\{N_y\} = -\frac{m_B}{m_A + m_B} k L \sin \theta + m_B g \cos \theta > 0 \quad \therefore L < \underbrace{\frac{(m_A + m_B)g}{k} \frac{1}{\tan \theta}}_{\text{~~~~~}}$$

(c) 問(2)(b),(c)より、このような運動が実現する L の範囲は、

$$\frac{(m_A + m_B)g}{k} \tan \theta \leq L < \frac{(m_A + m_B)g}{k} \frac{1}{\tan \theta}$$

であり、これを図示すれば次の図のようになる。



^{*99} $-L \leq X \leq L$ がわかればよいので、わざわざ時刻 t の関数として表す必要はない。
2025.04.04 版

また, このような L の存在しない θ の範囲は, $\frac{(m_A + m_B)g}{k} \frac{1}{\tan \theta} \leq \frac{(m_A + m_B)g}{k} \tan \theta$ となるときで, 設定から $\theta < \frac{\pi}{2}$ より,

$$\frac{(m_A + m_B)g}{k} \frac{1}{\tan \theta} \leq \frac{(m_A + m_B)g}{k} \tan \theta \quad \therefore (\theta_{\max} =) \frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

問(3) 物体 A, 小球 C の地面固定系での速度をそれぞれ $\vec{V}_A = (v_A, 0)$, $\vec{V}_C = (v_{C,x}, v_{C,y})$, A に対する C の相対速度を \vec{V}_{AC} とする. なお, 問題文では $\vec{V}_{AC} = \vec{v}_C$ であることに注意.

(a) 衝突直前の A に対する C の相対速度 \vec{V}_{AC} が斜面に沿った方向に大きさ v_C であるから, 衝突直前の小球 C の地面固定系における速度は

$$\begin{aligned} \vec{V}_{AC} &= \vec{V}_C - \vec{V}_A \\ \begin{pmatrix} v_C \cos 30^\circ \\ v_C \sin 30^\circ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_{C,x} \\ v_{C,y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_A \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} v_{C,x} \\ v_{C,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A + \frac{\sqrt{3}}{2} v_C \\ -\frac{1}{2} v_C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる. よって, 運動量の X 成分の保存則, および条件 (一体となる) より,

$$m_A v'_A + m_C v'_A = m_A v_A + m_C \left(v_A + \frac{\sqrt{3}}{2} v_C \right) \quad \therefore v'_A = v_A + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_C}{m_A + m_C} v_C.$$

(b) 衝突時のばねの縮みを X_0 とする. 始状態から衝突直前までの物体 A, 小球 C のエネルギー収支は,

$$\Delta K_A + \Delta K_C = \int_{-L}^{X_0} (-kX) dX = -\frac{1}{2} k X_0^2 + \frac{1}{2} k L^2.$$

衝突後からばねの伸びが最大となるまでの一体となった物体 A と小球 C のエネルギー収支は,

$$\Delta K_{A+C} = \int_{X_0}^{L'} (-kX) dX = -\frac{1}{2} k L'^2 + \frac{1}{2} k X_0^2.$$

以上 2 式より*100,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}kL'^2 &= \frac{1}{2}kL^2 - \Delta K_{A+C} - \Delta K_A - \Delta K_C \\
 &= \frac{1}{2}kL^2 - \left\{ 0 - \frac{1}{2}(m_A + m_C)v_A'^2 \right\} - \left(\frac{1}{2}m_A v_A^2 - 0 \right) \\
 &\quad - \left[\frac{1}{2}m_C \left\{ \left(v_A + \frac{\sqrt{3}}{2}v_C \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}v_C \right)^2 \right\} - 0 \right] \\
 &= \frac{1}{2}kL^2 + \frac{1}{2}(m_A + m_C) \left(v_A + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_C}{m_A + m_C} v_C \right)^2 - \frac{1}{2}m_A v_A^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2}m_C (v_A^2 + v_C^2 + \sqrt{3}v_A v_C) \\
 &= \frac{1}{2}kL^2 - \frac{1}{8} \frac{4m_A + m_C}{m_A + m_C} m_C v_C^2 \\
 \therefore L' &= L \sqrt{1 - \frac{m_C v_C^2}{4kL^2} \frac{4m_A + m_C}{m_A + m_C}}.
 \end{aligned}$$

【補足 1】問(3)の衝突で設問になってもよさそうなアレコレ

衝突時, 小球 C が受ける力積の X 成分を I_X , Y 成分を I_Y とする. 小球 C の運動量収支より,

$$\begin{cases} m_C v_A' - m_C \left(v_A + \frac{\sqrt{3}}{2} v_C \right) = I_X, \\ m_C \cdot 0 - m_C \left(-\frac{1}{2} v_C \right) = I_Y \end{cases} \quad \therefore I_X = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_A m_C}{m_A + m_C} v_C, \quad I_Y = \frac{1}{2} m_C v_C.$$

この計算より, 小球 C の受けた力積の大きさ I は,

$$I = \sqrt{I_X^2 + I_Y^2} = \frac{1}{2} m_C v_C \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{3} m_A}{m_A + m_C} \right)^2}$$

であり, その方向は水平右向き直線から反時計回りに θ を定めたとき,

$$\tan \theta = \left| \frac{I_Y}{I_X} \right| = \frac{\sqrt{3} m_A}{m_A + m_C}$$

の方向である. 大きさに違和感はあるが, $m_C = 2m_A$ と取れば $\theta = \frac{\pi}{6}$ となる.

続いて, 物体 A が床から受ける力積の大きさを J とする. 物体 A の Y 方向の運動量収支より,

$$m_A \cdot 0 - m_A \cdot 0 = J - I_Y \quad \therefore J = I_Y = \frac{1}{2} m_C v_C.$$

*100 この問題では, 衝突で損失するエネルギーが 2 物体の相対運動エネルギーであることを使えない (なぜならこの衝突は 2 物体の衝突ではなく, 物体 A, 小球 C, 床の 3 体衝突である).

【補足2】重心運動エネルギーと相対運動エネルギーと衝突

まず、2物体の衝突について考える。簡単のため、1次元衝突を扱う。質量 m , M の物体を想定し、衝突直前の2物体の速度をそれぞれ v , V (大文字同士が対応)、衝突直後の2物体の速度をそれぞれ v' , V' , 2物体の間のはね返り係数を e とする。

■衝突直後の速度の決定

運動量保存則、および衝突の条件式 (ここでははね返り係数の式) より、

$$\begin{cases} mv' + MV' = mv + MV, \\ v' - V' = -e(v - V) \end{cases}$$

$$\therefore v' = \frac{m - eM}{M + m}v + \frac{(1 + e)M}{M + m}V, \quad V' = \frac{M - em}{M + m}V + \frac{(1 + e)m}{M + m}v.$$

■重心運動エネルギーと相対運動エネルギー

2物体の運動エネルギーの和は次のように書き換えができる。

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(M + m) \left(\frac{MV + mv}{M + m} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Mm}{M + m} (v - V)^2$$

右辺第1項は質量因子が全質量、速度因子が重心速度となっていることから重心運動エネルギーと呼ぶ。同様に、第2項は速度因子が相対速度となっていることから相対運動エネルギーと呼ぶ (相対運動エネルギーの質量に対応する因子を換算質量と呼ぶ)。

このことは以下のように右辺を崩していくことで容易に確認できる。

$$\begin{aligned} (\text{R.H.S.}) &= \frac{1}{2} \frac{M^2V^2 + 2MmVv + m^2v^2}{M + m} + \frac{1}{2} \frac{Mmv^2 - 2MmVv + MmV^2}{M + m} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m^2 + Mm}{M + m} v^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2 + Mm}{M + m} V^2 \\ &= (\text{L.H.S.}). \end{aligned}$$

なお、以降 K_{CM} と書いた場合、始状態 (および終状態) の重心運動エネルギーを指し、 K_{rel} と書いた場合始状態の相対運動エネルギーを指す。

■2体の衝突で損失するエネルギーが2体の相対運動エネルギーであること

衝突の前後で運動量が保存することから、

$$mv' + MV' = mv + MV \quad \therefore \frac{mv' + MV'}{m + M} = \frac{mv + MV}{m + M}$$

となり、衝突の前後で重心速度不変であることがわかる。これは衝突時にかかる力が内力であることに由来する。

衝突の前後で重心速度が不変であることから、2物体からなる系の運動エネルギーの変化量 ΔK_{total} は

以下のように始状態の相対運動エネルギー K_{rel} とはね返り係数 e で表すことができる.

$$\begin{aligned}\Delta K_{\text{total}} &= \left(\frac{1}{2} M V'^2 + \frac{1}{2} m v'^2 \right) - \left(\frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} \underbrace{(v' - V')^2}_{=-e(v-V)} - \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} (v - V)^2 \\ &= -\frac{1 - e^2}{2} \frac{Mm}{M+m} (v - V)^2 \\ &= -(1 - e^2) K_{\text{rel}}\end{aligned}$$

■今回のように 3 体衝突では...

この問題の設定は、小球 C、物体 A、床の 3 体衝突である。物体 A と小球 C からなる系の衝突前後での運動エネルギー変化 ΔK_{A+C} は問(3)(c)で計算したように、

$$\Delta K_{A+C} = -\frac{1}{8} \frac{4m_A + m_C}{m_A + m_C} m_C v_C^2 = -\frac{1}{2} \frac{m_A m_C}{m_A + m_C} v_C^2 - \frac{1}{8} \frac{m_C^2}{m_A + m_C} v_C^2$$

であり、相対運動エネルギー変化は衝突後一体となることから、

$$\Delta K_{\text{rel}} = -\frac{1}{2} \frac{m_A m_C}{m_A + m_C} v_C^2$$

であり、両者は一致せず、物体 A と小球 C からなる系の衝突前後での運動エネルギー変化 ΔK_{A+C} の方が小さくなることが確認できる。

2 中身の見えるコンデンサ

【メモ】

- ・問(1), 問(3)いずれも中身の見えるタイプのコンデンサに関する出題. 金属板挿入時の外力のする仕事の計算まであり (外力のや金属板に生じる引き摺り込む力の大きさなどを求める計算はない).
- ・回路の状態決定は定石に従う.

【解答】

問(1) (a) 公式より,

$$C_A = \varepsilon_0 \frac{S}{4d-x}, \quad C_B = \varepsilon_0 \frac{S}{x}.$$

(b) 合成則より^{*101},

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} \quad \therefore C = \frac{\varepsilon_0 S}{4d}.$$

また, 極板 A, 金属板 M, 極板 B からなるコンデンサの静電エネルギーは公式より^{*102},

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q_A^2}{C} = \frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{8d}.$$

(c) 金属板挿入前, 極板 A と極板 B が対となりコンデンサを形成する. このコンデンサの静電容量は $\frac{\varepsilon_0 S}{5d}$ である, スイッチを繋いだ後の帯電量はキルヒホッフ則より $\frac{\varepsilon_0 S V_0}{5d}$ と求まる. よって, 極板 A の電荷の変化量は,

$$\Delta Q = \frac{\varepsilon_0 S V_0}{4d} - \frac{\varepsilon_0 S V_0}{5d} = \frac{\varepsilon_0 S V_0}{20d}.$$

(d) 電池のした仕事は公式より,

$$W_p = \Delta Q V_0 = \frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{20d}.$$

^{*101} 簡易的な補足: 各極板の帯電量を Q_A, Q_B とする. キルヒホッフ則, および電荷保存則より,

$$\begin{cases} V_0 - \frac{Q_A}{C_A} + \frac{Q_B}{C_B} = 0, \\ -Q_A - Q_B = 0 \end{cases} \quad \therefore Q_A = -Q_B = \frac{C_A C_B}{C_A + C_B} V_0 = \frac{V_0}{1/C_A + 1/C_B} = \frac{\varepsilon_0 S V_0}{4d}.$$

$Q_A = -Q_B$ より, 極板 A と金属板 M, 極板 B と金属板 M からなるそれぞれのコンデンサは 1 つのコンデンサと見做すことができ, その合成容量 C は系の両端に帯電している電荷が Q_A , 両端電位差が V_0 であることから $C = \frac{Q_A}{V_0}$ を計算すれば (当然) 同様の結果を得る.

^{*102} もちろん各々の静電エネルギーを計算して和を取ってもよい: $\frac{1}{2} \frac{Q_A^2}{C_A} + \frac{1}{2} \frac{Q_B^2}{C_B} = \frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{8d}$.

また、外力のした仕事は回路のエネルギー収支より、

$$W_p + W_e = \Delta U = \frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{8d} - \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_0 S V_0 / 5d)^2}{\varepsilon_0 S V_0 / 5d} = \frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{40d} \quad \therefore W_e = \underbrace{-\frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{40d}}.$$

問(2) (a) 極板 A と金属板 M からなるコンデンサの容量は $C_A = \frac{\varepsilon_0 S}{3d}$, 極板 B と金属板 M からなるコンデンサの容量は $C_B = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ であり、極板 A, B の帯電量をそれぞれ Q_A, Q_B とする^{*103}. キルヒホッフ則より、

$$\begin{cases} V_0 + \frac{Q_A}{C_A} = 0, \\ V_0 + \frac{Q_B}{C_B} = 0 \end{cases} \quad \therefore Q_A = -C_A V_0 = \underbrace{-\frac{\varepsilon_0 S V_0}{3d}}, \quad Q_B = -C_B V_0 = \underbrace{-\frac{\varepsilon_0 S V_0}{d}}$$

であり、金属板 M の表面に分布している電荷の総和は、

$$Q_M = (-Q_A) + (-Q_B) = \underbrace{\frac{4\varepsilon_0 S V_0}{3d}}.$$

(b) 金属板 M の下面が極板 B から距離 x にあるとき、 $C_A = \frac{\varepsilon_0 S}{4d-x}$, $C_B = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$ であり、このときの各極板の帯電量 Q_A, Q_B はキルヒホッフ則、および電荷保存則^{*104}より、

$$\begin{cases} -\frac{Q_A}{\varepsilon_0 S / (4d-x)} + \frac{Q_B}{\varepsilon_0 S / x} = 0, \\ -Q_A - Q_B = \frac{4\varepsilon_0 S V_0}{3d} \end{cases} \quad \therefore Q_A = -\frac{\varepsilon_0 S V_0}{3d^2} x^2, \quad Q_B = -\frac{4\varepsilon_0 S V_0}{3d} \left(1 - \frac{x}{4d}\right).$$

よって、距離 x にあるときに系の蓄える静電エネルギー U' は、

$$U' = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\left(\frac{\varepsilon_0 S V_0}{3d^2} x\right)^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{4d-x}}}_{\text{A と M の対}} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\left\{\frac{4\varepsilon_0 S V_0}{3d} \left(1 - \frac{x}{4d}\right)\right\}^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{x}}}_{\text{B と M の対}} = \underbrace{-\frac{2\varepsilon_0 S V_0^2}{9d^3} (x^2 - 4dx)}.$$

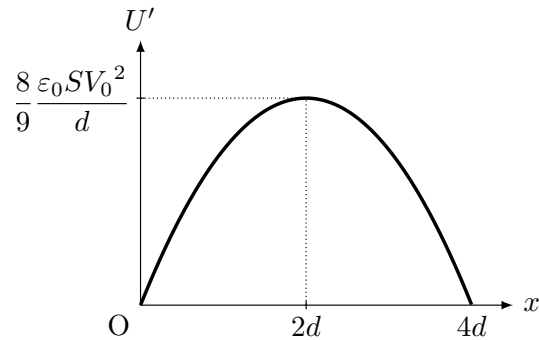
したがって、 U' は $x = 2d (= x_m)$ に頂点を持つ上に凸の 2 次関数で、最大値 U'_m は、

$$\begin{aligned} U' &= \frac{2\varepsilon_0 S V_0^2}{9d^3} (x^2 - 4dx) \\ &= -\frac{2\varepsilon_0 S V_0^2}{9d^3} (x - 2d)^2 + \frac{8\varepsilon_0 S V_0^2}{9d} \quad \therefore U'_m = \underbrace{\frac{8\varepsilon_0 S V_0^2}{9d}} \end{aligned}$$

であり、グラフは以下のようなになる。

*103 静電誘導により、金属板 M の上面に $-Q_A$, 下面に $-Q_B$ の電荷が帯電する。

*104 スイッチを切ったため金属板 M は電氣的に孤立をしている。



(c) 電池と繋がっていないことに留意して、回路のエネルギー収支より、

$$W_e' = \Delta U = U'(x = 2d) - U'(x = d) = \frac{2 \epsilon_0 S V_0^2}{9 d}.$$

(d) 終状態における各極板の帯電量は、キルヒホッフ則よりともに $Q_A = Q_B = -\frac{\epsilon_0 S V_0}{2d}$ であり、系の蓄える静電エネルギーは公式より、

$$U_{\text{fin}} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\epsilon_0 S V_0}{2d}\right)^2}{\frac{\epsilon_0 S}{2d}} \times 2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{d}$$

であり、この間電池のした仕事 W_p'' は、

$$W_p'' = \Delta Q_M V_0 = \left(\frac{\epsilon_0 S V_0}{2d} \cdot 2 - \frac{4 \epsilon_0 S V_0}{3 d}\right) V_0 = -\frac{1}{3} \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{d}.$$

よって、回路のエネルギー収支より、

$$W_p'' + W_e'' = \Delta U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{d} - \frac{2}{3} \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{d} = -\frac{1}{6} \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{d} \quad \therefore W_e'' = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{6d}.$$

3 熱あり過程, (準静的) 断熱過程

【メモ】

・問(1), 問(3)熱力学の基本的(むらがなく熱あり)な過程に関する問題. 定石は, 可動部分のつりあいから圧力の決定, 状態方程式から温度の決定. 内部エネルギー変化を公式, 気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価, 熱力学第 1 法則を通じて熱を計算.

・問(2)は準静的な断熱過程に関する問題. 準静的な断熱過程では, ポアソンの公式から圧力か体積の決定, 状態方程式から温度の決定. 熱力学第 1 法則は仕事の決定方程式となる. この問題ではポアソンの公式を使わなくてもいいような誘導が付いている(文字が過剰に与えられている).

【解答】

問(1) (a) 状態方程式より,

$$T_A = \frac{p_{A0} S h_A}{R}.$$

(b) ピストンのつりあい, および状態方程式より,

$$\begin{cases} 0 = p_B S - p_{A0} S - Mg, \\ p_B S h_B = RT_B \end{cases} \quad \therefore p_B = p_{A0} + \frac{Mg}{S}, \quad T_B = \frac{(p_{A0} S + Mg) h_B}{R}.$$

問(2) (a) A 室の気体は準静的な断熱過程ゆえ, その気体の状態はポアソンの公式を満たしながら変化する. ポアソンの公式, 状態方程式(両室), およびピストンのつりあいより,

$$\begin{cases} p_{A1} \{S(h_A - x)\}^{\frac{5}{3}} = p_{A0} (S h_A)^{\frac{5}{3}}, \\ p_{A1} S (h_A - x) = RT_{A1}, \\ p_{B1} S (h_B + x) = RT_{B1}, \\ 0 = p_{B1} S - p_{A1} S - Mg. \end{cases}$$

準静的断熱過程ゆえ, A 室内の気体のする仕事は熱力学第 1 法則より逆算して^{*105},

$$W_A = -\Delta U_A = -\frac{3}{2} R (T_{A1} - T_{A0}) = -\frac{3}{2} \{p_{A1} S (h_A - x) - p_{A0} S h_A\}.$$

よって, A 室の気体のされた仕事 W は,

$$W = -W_A = \frac{3}{2} \{p_{A1} S (h_A - x) - p_{A0} S h_A\}.$$

*105 ポアソンの公式より x が p_{A1} を文字消去できるが, 問題の指示ではしなくてもよいとのこと(文字指定に注目). 次の熱量についても同様. なお, $p_{A1} = p_{A0} \left(\frac{h_A}{h_A - x}\right)^{\frac{5}{3}}$ によって, p_{A1} を消去できる(x を消去する場合はこれを逆に解けばよい).

- (b) B 室の気体の吸収した熱量は、A 室内の気体、B 室内の気体、およびピストン（の質量に関する重力場）からなる系全体のエネルギー収支（熱力学第 1 法則）より、

$$\begin{aligned}
 Q &= \Delta U_A + \Delta U_B + \Delta U_{\text{piston}} \\
 &= \frac{3}{2}R(T_{A1} - T_{A0}) + \frac{3}{2}R(T_{B1} - T_B) + Mgx \\
 &= \frac{3}{2}\{p_{A1}S(h_A - x) - p_{A0}Sh_A\} + \frac{3}{2}\{(p_{A1}S + Mg)(h_B + x) - (p_{A0}S + Mg)h_B\} \\
 &\quad + Mgx \\
 &= \frac{3}{2}(p_{A1} - p_{A0})S(h_A + h_B) + \frac{5}{2}Mgx.
 \end{aligned}$$

- 問(3) (a) 状態 2, 状態 3 におけるピストンのつりあい、および B 室の気体の状態方程式はそれぞれ、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{状態 2} \\ \text{状態 3} \end{array} \right\} \begin{cases} 0 = p_B S - p_0 S - Mg, \\ p_B S(h_A + h_B) = RT_{B2}, \\ 0 = p_B S - p_0 S - Mg, \\ p_B S h_B = RT_{B3}. \end{cases}$$

状態方程式より、この間 B 室内の気体の圧力は一定値を保つことがわかる。B 室内の気体
 する仕事は PV 図の面積より（図略）、

$$W_B = p_B \{Sh_B - S(h_A + h_B)\} = -p_B Sh_A = -(p_0 S + Mg)h_A.$$

よって、B 室内の気体のされた仕事 W' は、

$$W' = -W_B = \underline{\underline{(p_0 S + Mg)h_A}}.$$

- (b) B 室内の気体の熱力学第 1 法則より、B 室内の気体の吸熱量は^{*106}、

$$\begin{aligned}
 Q_B &= \Delta U_B + W_B \\
 &= \frac{3}{2}R(T_{B3} - T_{B2}) - (p_0 S + Mg)h_A \\
 &= -\frac{5}{2}(p_0 S + Mg)h_A.
 \end{aligned}$$

よって、放熱量 Q' は、

$$Q' = -Q_B = \underline{\underline{\frac{5}{2}(p_0 S + Mg)h_A}}.$$

*106 式変形の際、温度を消去するときに状態方程式を利用。

2015 年度 解答

1 等速円運動, 非等速円運動, 衝突

【メモ】

・問(1)は等速円運動に関する問題. 等速円運動は, 以下2式を立式.

$$\begin{cases} \text{運動方程式 (中心成分)} \\ \text{つりあい (←使わないことも)} \end{cases}$$

・問(2)は非等速円運動に関する問題. 非等速円運動は, 以下2式を立式.

$$\begin{cases} \text{運動方程式 (中心成分)} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

・問(1), 問(2)に共通して衝突に関する問題. 衝突は, 以下2式を連立.

$$\begin{cases} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{cases}$$

なお, 衝突に関与する物体が外力によって固定されているとき運動量保存則は成り立たない.

【解答】

問(1) (a) 速さ一定で $2\pi r$ 進む時間を求めて,

$$T = \frac{2\pi r}{\underbrace{v_0}}$$

(b) 衝突ゆえ, 衝突直前・直後の運動量保存則, および条件 (はね返り係数の式) より,

$$\begin{cases} m_A v_A + m_B v_B = m_A v_0 + m_B (-v_0), \\ v_A - v_B = -\{v_0 - (-v_0)\} \\ \therefore v_A = \frac{m_A - 3m_B}{m_A + m_B} v_0, \quad v_B = \frac{3m_A - m_B}{m_A + m_B} v_0. \end{cases}$$

(c) O を原点とし, 円筒の正方向に沿った座標軸として s 軸を定め, 小球 A, B の位置をそれぞれ s_A, s_B とする. 1 回目の衝突時を $t = 0$ とすると,

$$\begin{cases} s_A = v_A t, \\ s_B = v_B t \end{cases}$$

であり, 問(1)(b)より $v_B > v_A$ であるから*107 2 回目の衝突時刻は $s_B - s_A = 2\pi r$ となる時刻を求めて,

$$s_B - s_A = 2\pi r \quad \therefore t = \frac{2\pi r}{(v_B - v_A)r} = \frac{\pi r}{\underbrace{v_0}} (= T_1).$$

*107 運動の状況から明らかである. $m_A - 3m_B \geq 3m_A - m_B$ を判定してもよい.

(d) 問(1)(b)の v_A, v_B に対し $\frac{m_A}{m_B} \doteq 0$ と近似して,

$$v_A = \frac{-3 + m_A/m_B}{1 + m_A/m_B} v_0 \doteq -3v_0, \quad v_B = \frac{-1 + 3m_A/m_B}{1 + m_A/m_B} v_0 \doteq -v_0.$$

よって, (イ), (ウ), (オ)に絞られる.

続いて, 2 回目の衝突から 3 回目の衝突までの時間間隔を考える. 2 回目の衝突直後の小球 A, B の速度をそれぞれ v'_A, v'_B とする. 衝突直前・直後の運動量保存則, および条件 (はね返り係数の式) より,

$$\begin{cases} m_A v'_A + m_B v'_B = m_A(-3v_0) + m_B(-v_0), \\ v'_A - v'_B = -\{-3v_0 - (-v_0)\} \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} 0 + v'_B \doteq -v_0, \\ v'_A - v'_B = -\{-3v_0 - (-v_0)\} \end{cases} \quad \therefore v_A = v_0, \quad v_B = -v_0.$$

よって, $v'_A v'_B$ であるため $s_A - s_B = 2\pi r$ となる時間を求めればよい. よって, 2 回目の衝突から 3 回目の衝突までの時間間隔 T_2 は,

$$T_2 = \frac{2\pi r}{v'_A - v'_B} = \frac{\pi r}{v_0}$$

であり, 1 回目の衝突から 2 回目の衝突までの時間間隔と同じである. よって, (オ)のグラフが適当*108.

問(2) (a) 小球 A のエネルギー収支より,

$$\frac{1}{2} m_A V_0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \\ -2r \end{pmatrix} = 2mgr \quad \therefore V_0 = \underline{\underline{2\sqrt{gr}}}.$$

(b) 円の中心 $(0, r)$ を C, 小球 A のある点を A とする. $\angle OCA = \theta$, 角度 θ にあるときの小球 A の速さを v , 小球 A が受ける垂直抗力の大きさを N とする. 運動方程式 (中心成分), および力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases} m_A \frac{v^2}{r} = N - m_A g \cos \theta, \\ \frac{1}{2} m_A v^2 + m_A g(-r \cos \theta) = m_A g r \end{cases} \quad \therefore N = m_A g(2 + 3 \cos \theta)$$

となり, $N = 0$ となるとき, $\cos \theta = -\frac{2}{3}$ であるから,

$$y_0 = r - r \cos \theta = r - r \left(-\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{5}{3}r}}.$$

*108 もっと簡単に: はね返り係数 1 より, 相対速度の大きさは常に一定である. そのため, 衝突の時間間隔は一定であり, このことから(オ)のグラフが適当とわかる.

- (c) 衝突直後の小球 A, C の速度をそれぞれ V_A, V_C とする (直前の速度はそれぞれ $V_0, -V_0$ である). 衝突直前・直後の運動量保存則, および条件 (はね返り係数の式) より,

$$\begin{cases} m_A V_A + 3m_A V_C = m_A V_0 + 3m_A (-V_0), \\ V_A - V_C = -\{V_0 - (-V_0)\} \end{cases} \quad \therefore V_A = -2V_0, \quad V_C = 0.$$

よって, C はその場で静止し, 2 回目の衝突後の位置は $(x_1, y_1) = (0, 0)$ となる.

- (d) 2 回目の衝突直前・直後の運動量保存則, および条件 (はね返り係数の式) より,

$$\begin{cases} m_A V_{A2} + 3m_A V_{C2} = m_A (-4V_0) + 3m_A \cdot 0, \\ V_A - V_C = -(-4V_0 - 0) \end{cases} \quad \therefore V_{A2} = V_0 = 2\sqrt{gr}, \quad V_{C2} = -V_0 = -2\sqrt{gr}.$$

よって, 両小球はこの直後, 速さ V_0 で円筒面に沿った運動を行う. これは, 問(2)(a), (b)に相当する (小球 C については $m_A \rightarrow 3m_A$ とすればよい). 小球 A は $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}r, \frac{5}{3}r\right)$ で円筒面から離れ投射運動に切り替わり, その瞬間の小球 A の速さは, 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}m_A v^2 + m_A g \cdot \frac{5}{3}r = \frac{1}{2}m_A (2\sqrt{gr})^2 \quad \therefore v = \sqrt{\frac{2}{3}gr}$$

と求まり, 離れる瞬間の速度の x 成分は $v \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ である. 翻って, 同時刻の小球 C の離れる位置は $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}r, \frac{5}{3}r\right)$ であり, この瞬間の速度の x 成分は $-v \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ である. よって, 離れる瞬間の時刻を $t = 0$ としたとき, 小球 A, C の位置 x_A, x_C はそれぞれ*109,

$$\begin{cases} x_A = -\frac{\sqrt{5}}{3}r + v \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)t = -\frac{\sqrt{5}}{3}r - v \cos \theta t, \\ x_B = \frac{\sqrt{5}}{3}r - v \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)t = \frac{\sqrt{5}}{3}r + v \cos \theta t \end{cases}$$

となり, 衝突時刻は*110,

$$-\frac{\sqrt{5}}{3}r - v \cos \theta t = \frac{\sqrt{5}}{3}r + v \cos \theta t \quad \therefore t = -\frac{r \sin \theta}{v \cos \theta} = \sqrt{\frac{15}{8} \frac{r}{g}}.$$

また, このとき両小球の位置 x_3 は*111,

$$x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{3}r - v \cos \theta t = -\frac{\sqrt{5}}{3}r - \sqrt{\frac{2}{3}gr} \left(-\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{15}{8} \frac{r}{g}} = 0.$$

*109 次の恒等式を利用: $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta$

*110 $\cos \theta = -\frac{2}{3}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ を用いた.

*111 小球 A, C の運動が左右対称であることから $x_3 = 0$ は想像できる.

2 中身の見えるコンデンサ, 電気回路 (振動回路)

【メモ】

- ・問(1), 問(2)は中身の見えるタイプのコンデンサに関する出題.
- ・問(3)は電気回路 (振動回路) の問題. 回路の状態決定は定石に従う.

【解答】

問(1) (a) 容量は公式より,

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}.$$

極板 A の帯電量はキルヒホッフ則より,

$$V - \frac{Q}{C} = 0 \quad \therefore Q = CV = \frac{\varepsilon_0 SV}{d}.$$

(b) コンデンサの蓄える静電エネルギーは公式より,

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d}.$$

充電が済むまでに電池のした仕事もまた公式より,

$$W = \Delta QV = (CV - 0)V = \frac{\varepsilon_0 SV^2}{d}.$$

問(2) (a) 極板間隔を半分にすると, コンデンサの容量は $2C$ となる^{*112}. このときの極板 A の帯電量 Q' はキルヒホッフ則より,

$$V - \frac{Q'}{C} = 0 \quad \therefore Q' = 2CV$$

であるから, コンデンサの蓄える静電エネルギー変化は,

$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{(2CV)^2}{2C} - \frac{1}{2} \frac{(CV)^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2.$$

(b) このとき, コンデンサの容量は C であり, 電荷保存則から極板 A の帯電量は $2CV$ である. よって, 公式より,

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{(2CV)^2}{C} = 2CV^2.$$

^{*112} $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ より, $d \rightarrow d/2$ とすればわかる.

問(3) スイッチを閉じた時刻を $t = 0$ とすると、電荷保存則より $t = 0$ で $Q = 2CV$ であり、コイルの性質（電流の連続性）より $I = 0$ である。なお、ここでは電流 I は図の時計回り、すなわち $I = -\frac{dQ}{dt}$ と定める*113。

(a) キルヒホッフ則より、

$$\begin{aligned} -L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} &= 0 \\ -L_1 \frac{d}{dt} \left(-\frac{dQ}{dt} \right) - L_2 \frac{d}{dt} \left(-\frac{dQ}{dt} \right) + \frac{Q}{C} &= 0 \\ \therefore (L_1 + L_2) \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} &= 0 \quad \therefore \frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{Q}{(L_1 + L_2)C} \end{aligned}$$

となり、極板 A の帯電量 Q は角振動数 $\omega = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}$ 、振動中心 $Q = 0$ の単振動を行う。よって、初期条件より、

$$Q = 2CV \cos \left(\frac{t}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} \right)$$

であり*114、

$$I = -\frac{dQ}{dt} = 2V \sqrt{\frac{C}{L_1 + L_2}} \sin \left(\frac{t}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} \right) \quad \therefore I_{\max} = \underbrace{2V \sqrt{\frac{C}{L_1 + L_2}}}$$

また、コイル 1 の電位降下 V_1 は*115、

$$V_1 = L_1 \frac{dI}{dt} = \frac{2L_1}{L_1 + L_2} V \cos \left(\frac{t}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} \right) \quad \therefore V_{\max} = \underbrace{\frac{2L_1}{L_1 + L_2} V}$$

(b) コイルの蓄えるエネルギーは公式より、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} L_1 I^2 = \frac{2L_1}{L_1 + L_2} CV^2 \sin^2 \left(\frac{t}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} \right) \\ &= \frac{L_1}{L_1 + L_2} CV^2 \left\{ 1 - \cos \left(\frac{2t}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} \right) \right\} \end{aligned}$$

であり、グラフは (オ) が適当。また、最大値 U_{\max} 、および周期 τ はそれぞれ、

$$U_{\max} = \underbrace{\frac{2L_1}{L_1 + L_2} CV^2}, \quad \tau = \underbrace{\pi \sqrt{(L_1 + L_2)C}}$$

*113 反時計回りに定めれば $I = \frac{dQ}{dt}$ となるが、この場合、以降の議論においてコイルの電位降下が反転するため結果は一致する。

*114 回路のエネルギー保存則を利用： $\frac{1}{2} \frac{0^2}{C} + \frac{1}{2} L_1 I_{\max}^2 + \frac{1}{2} L_2 I_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{(2CV)^2}{C} + \frac{1}{2} L_1 \cdot 0^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot 0^2$ 。

*115 電流の流れる向きに下がる。抵抗やコンデンサと変わらないことに注意。「逆起電力」などの言葉がちらつて間違わないように。

【補足】問(3)の回路のエネルギー保存則

電流は時計回りを正とする．すなわち，極板 A の帯電量 Q と，回路を流れる電流 I の間には

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

が成り立つ．

さて，キルヒホッフ則より，

$$-L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

であり，この両辺に $-I = \frac{dQ}{dt}$ をかければ，

$$\begin{aligned} L_1 I \frac{dI}{dt} + L_2 I \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} &= 0 \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 I^2 + \frac{1}{2} L_2 I^2 + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) &= 0 \end{aligned}$$

を得る．これがこの回路のエネルギー収支の式であり，括弧の中身（コイル 1，コイル 2，コンデンサの蓄えるエネルギーの総和）の時間変化率が 0 であることから括弧の中身は一定値を取る．すなわち，

$$\therefore \frac{1}{2} L_1 I^2 + \frac{1}{2} L_2 I^2 + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \text{const}$$

となり，回路のエネルギー保存則が導出された．なお，右辺は初期条件から求まり，今の場合 $I = 0$ ， $Q = 2CV$ を代入したものとなる．

3 幾何光学, 干渉

【メモ】

・問(1)は干渉に関する問題。干渉条件は m を整数として,

$$(\text{位相差}) = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強め合い}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱め合い}) \end{cases}$$

と計算するようにする。位相差は $\frac{2\pi}{\lambda}$ (経路差) に反射による位相のずれを加減すればよい*116。

・問(2), 問(3)は幾何光学に関する問題。幾何光学は, 以下の2種類の式を連立する。

$$\begin{cases} \text{スネルの法則} \\ \text{図形の性質} \end{cases}$$

図形の考察は, 何が与えられているかを踏まえ, 次の手順で行うようにする。

$$\begin{cases} \text{角度のみ} & \rightarrow \begin{cases} \text{三角形の内外角に注目 (二等辺三角形に注意)} \\ \text{平行性の性質を利用 (錯角・同位角)} \end{cases} \\ \text{辺のみ} & \rightarrow \text{相似な三角形の相似比を利用} \\ \text{角と辺} & \rightarrow \text{三角比を利用 (正弦定理・余弦定理に注意)} \end{cases}$$

【解答】

問(1) (a) 明線条件は m を整数として*117,

$$\frac{2\pi}{\lambda/n_1} \cdot 2d_1 + \pi - \pi = 2m\pi \quad \therefore d_1 = \frac{\lambda}{2n_1} m.$$

正かつ最初のものと考えて,

$$\min\{d_1\} = \frac{\lambda}{2n_1}.$$

(b) 屈折角を θ_1 とする。スネル則, および明線条件より,

$$\begin{cases} n_1 \sin \theta_1 = \sin \theta_0, \\ \frac{2\pi}{\lambda/n_1} \cdot 2d_1 \cos \theta_1 = 2m\pi \end{cases} \quad \therefore d_1 = \frac{m\lambda}{2n_1 \cos \theta_1} = \frac{m\lambda}{2\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1}} \dots$$

(c) スネル則より,

$$\begin{cases} n_1 \sin \theta_1 = \sin \theta_0, \\ n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad \therefore \underline{\underline{n_2 \sin \theta_2 = \sin \theta_0}}.$$

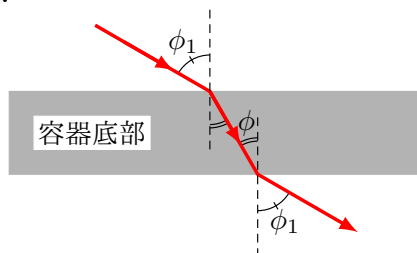
*116 屈折率 n の媒質中では波長 λ を $\frac{\lambda}{n}$ とする。

*117 第2項, 第3項は反射による位相のずれ。2つの境界面での反射光は共に位相が π ずれるため, 位相差には寄与しない。このような場合は以降省略するものとする。

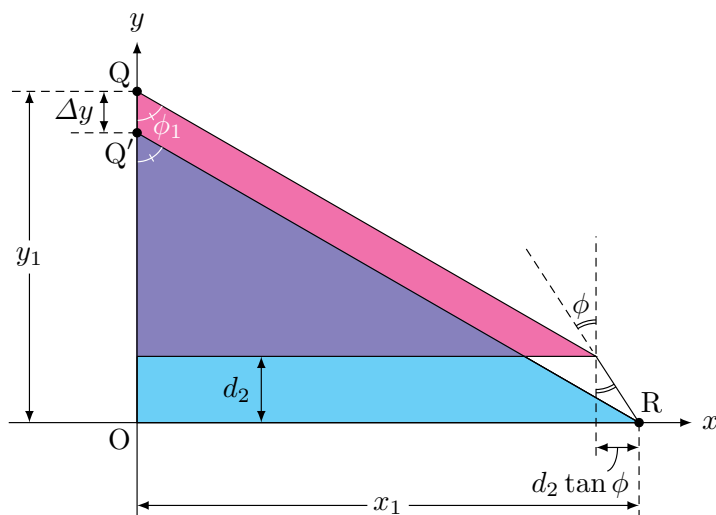
問(2) (a) 屈折角を ϕ とする. スネル則より,

$$\begin{cases} n_2 \sin \phi = \sin \phi_1, \\ \sin \phi_0 = n_2 \sin \phi \end{cases} \quad \therefore \phi_0 = \phi_1.$$

また, $\sin \phi = \frac{1}{n_2} \sin \phi_1 < \sin \phi_1$ より $\phi < \phi_1$ である. 以上を踏まえれば, 容器底部近傍での経路は以下の図のようになる.



(b) 問題文中の図 2 中において, Q, Q' を頂点とし, 一角の大きさが ϕ_1 である直角三角形は以下の図のようになる.



2つの直角三角形の辺の比, およびスネル則より^{*118*119},

$$\begin{cases} x_1 = (y_1 - \Delta y) \tan \phi_1, \\ x_1 - d_2 \tan \phi = (y_1 - d_2) \tan \phi_1, \\ n_2 \sin \phi = \sin \phi_1 \end{cases} \quad \therefore \Delta y = d_2 \left(1 - \frac{\cos \phi}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \phi}} \right).$$

問(3) 外部とガラス板の境界面における屈折角を α , ガラス板と液体の境界面における屈折角を β とする. スネル則より,

$$\begin{cases} 2 \sin \alpha = \sin \theta, \\ \sqrt{2} \sin \beta = 2 \sin \alpha \end{cases} \quad \therefore \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta.$$

^{*118} 辺と角の両方が与えられているので三角比を考える.

^{*119} ϕ に関する三角比: $\sin \phi = \frac{1}{n_2} \sin \phi_1$, $\cos \phi = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \phi_1}{n_2}\right)^2}$, $\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\sin \phi_1}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \phi_1}}$.

このとき、液面と外部の境界面における入射角は $90^\circ - (15^\circ + \beta)$ である。液体と外部の境界面における屈折角を γ とすれば、スネル則より、

$$\sin \gamma = \sqrt{2} \sin\{90^\circ - (15^\circ + \beta)\} = \sqrt{2} \sin(75^\circ - \beta)$$

であり、液面において全反射したことから屈折角 γ が存在しない条件 $\sin \gamma > 1$ を考えて、

$$\begin{aligned} \sin \gamma = \sqrt{2} \sin(75^\circ - \beta) &> 1 \\ \sin(75^\circ - \beta) &> \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \beta < 30^\circ. \end{aligned}$$

よって、スネル則より、

$$\begin{aligned} \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta &< \sin 30^\circ \\ \sin \theta &< \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \theta < \underline{\underline{45^\circ}}. \end{aligned}$$

