

1 単振動，等加速度運動，非等速円運動，衝突

【メモ】

・問(1)は単振動，等加速度運動，非等速円運動に関する問題．

単振動，等加速度運動は，時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動であり，(b)，(c)はエネルギーでの計算が楽（時間追跡も可），(e)は時間追跡での計算が必要．エネルギーでの計算はいずれも小球のみの系で計算をしたので，時間追跡，力学的エネルギー保存則を用いた計算は【補足】に示した．

非等速円運動については，以下の立式が定石．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{array} \right.$$

・問(2)は衝突，等加速度運動，非等速円運動に関する問題．等加速度運動に関してはエネルギーで方針を立てるのが楽（解答は小物体のみの系で計算をしたので，時間追跡，力学的エネルギー保存則を用いた計算は【補足】に示した）．衝突は以下の立式が定石^{*1}．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{衝突の直前・直後での運動量保存則} \\ \text{問題文の条件} \end{array} \right.$$

【解答】

問(1) 左側の斜面に沿って上向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長の位置に定める．

(a) つりあいより，

$$m \cdot 0 = kd - mg \sin \theta \quad \therefore d = \underbrace{\frac{mg}{k} \sin \theta}.$$

(b) 位置 $x (< 0)$ にあるとき，物体にはたらく力は $-kx - mg \sin \theta$ である^{*2}．よって，小球のエネルギー収支より^{*3}，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = \int_{-3d}^0 (-kx - mg \sin \theta) dx = \frac{3}{2}kd^2 \quad \therefore v_0 = \underbrace{d\sqrt{\frac{3k}{m}}}.$$

(c) 小球のエネルギー収支より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= mg \frac{R}{\tan \theta} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -mgR \cos \theta \\ \therefore v_1 &= \underbrace{\sqrt{v_0^2 - 2gR \cos \theta}}. \end{aligned}$$

^{*1} 固定面など外力制御のある面との衝突の場合，運動量は保存しない．

^{*2} $x < 0$ のときばねは縮んであり，その縮みは $|x| = -x$ である．よって，弾性力は $+k|x| = -kx$ となる．

^{*3} $d = \frac{mg}{k} \sin \theta$ を用いて θ を消去した．

- (d) 点 C での垂直抗力の大きさを N_C とする．運動方程式（中心成分）より，

$$m \frac{v_1^2}{R} = -N_C + mg \cos \theta \quad \therefore N_C = mg \cos \theta - m \frac{v_1^2}{R}.$$

面から離れるとき $N_C < 0$ を考えて，

$$N_C = mg \cos \theta - m \frac{v_1^2}{R} < 0 \quad \therefore v_1 > \sqrt{gR \cos \theta} (= v_c).$$

- (e) 点 C を原点とし，水平方向に X 軸，鉛直方向に Y 軸を定める．飛び出した時刻を $t = 0$ とし，飛び出して台と接触するまでの物体の位置 (X, Y) は，

$$\begin{cases} X = v_1 \cos \theta t, \\ Y = v_1 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

である．点 E で台に接触することから $X = 2R \sin \theta$ かつ $Y = 0$ を満たす場合を考えればよいので，

$$\begin{cases} 2R \sin \theta = v_1 \cos \theta t, \\ 0 = v_1 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \therefore v_0 = \sqrt{\left(2 \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta}\right) gR}.$$

- 問(2) (a) 衝突後の小球の速度を u ，台の小物体の速度を U とする．衝突ゆえ，運動量保存則，および衝突の条件（はね返り係数の式）より，

$$\begin{cases} mu + MU = mv_0, \\ u - U = -1 \cdot (v_0 - 0) \end{cases} \quad \therefore u = -\frac{M-m}{M+m}v_0, \quad U = \frac{2m}{M+m}v_0.$$

よって，衝突後の速さはそれぞれ

$$v_2 = |u| = \frac{M-m}{M+m}v_0, \quad V_2 = |U| = \frac{2m}{M+m}v_0.$$

- (b) 小物体のエネルギー収支より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M \cdot 0^2 - \frac{1}{2}MV_2^2 &= MgL \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \mu' MgL \cos \theta \cos \pi \\ \therefore L &= \frac{V_2^2}{2g(\mu' \cos \theta - \sin \theta)}. \end{aligned}$$

- (c) 小球の台の面上での位置を点 P とし，点 D から反時計回りに ϕ $\left(-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\right)$ を定める．円弧面上にあるとき小球は非等速円運動を行うので，運動方程式（中心成分），および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{R} = -N + mg \cos \phi, \\ \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \phi = \frac{1}{2}mv_2^2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} v = \sqrt{v_2^2 - 2gR \cos \phi}, \\ N = 3mg \cos \phi - m \frac{v_2^2}{R}. \end{cases}$$

この表式より N は $\phi = \pm \frac{\pi}{4}$ で最小値を取る.

さて, 台から離れず点 D を通過するためには, $-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ の ϕ で $N > 0$ (面から離れない条件) かつ点 D での運動エネルギーが正 (点 D に到達する条件) であればよい. よって*4,

$$\begin{cases} N = 3mg \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - m \frac{v_2^2}{R} > 0, \\ v_2^2 - 2gR > 0 \end{cases} \quad \therefore \underbrace{\sqrt{2gR}}_{=v_a} < v_2 \leq \underbrace{\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}gR}}_{=v_b}.$$

- (d) 起こり得る運動は① DF 間で折り返す, ②台から離れず点 D を通過, ③点 E で台の面上から離れるの 3 つに分類される. また, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき v_2 は,

$$v_2 = \frac{M-m}{M+m} \sqrt{\left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1/\sqrt{2}}\right) gR} = \frac{M-m}{M+m} \sqrt{2\sqrt{2}gR}$$

である.

① DF 間で折り返すとき

このとき, v_2 は $\sqrt{2gR} < v_2 \leq \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}gR}$ の範囲を取る. すなわち, 取り得る M の範囲は

$$\sqrt{2gR} < \frac{M-m}{M+m} \sqrt{2\sqrt{2}gR} \leq \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}gR} \quad \therefore \frac{2^{\frac{1}{4}}+1}{2^{\frac{1}{4}}-1}m < M \leq \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}m$$

となる*5. $\angle \text{POF} = \alpha$ とすると, 小球のエネルギー収支より折り返す位置 (最高点) の高さ h は,

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = Mg \frac{h}{\sin \alpha} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = Mgh \quad \therefore h = \sqrt{2}R \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2.$$

②台から離れず点 D を通過

このときもまた, v_2 は $\sqrt{2gR} < v_2 \leq \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}gR}$ の範囲を取る. 点 D が高さの最大値のため $h = R$ である.

③点 E で台の面上から離れるとき

このとき, v_2 は $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}gR} < v_2$ の範囲を取る. すなわち, 取り得る M の範囲は

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}m < M$$

となる. 点 E で台の面上から離れることから台と接触したまま到達する最高点は点 E であり, $h = \frac{1}{\sqrt{2}}R$ である.

以上①, ②, ③を踏まえれば (お) のグラフが適当である.

*4 N の条件は N の最小値, すなわち点 F での $\phi = -\frac{\pi}{4}$ を考えれば十分.

*5 それぞれの近似値は $\frac{2^{\frac{1}{4}}+1}{2^{\frac{1}{4}}-1} \doteq 11.6$, $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \doteq 13.9$ である.

【補足 1】問(1)(b)を運動方程式（時間追跡）、力学的エネルギー保存則で解く

小球の運動方程式より*6,

$$m\ddot{x} = +k|x| - mg \sin \theta = -kx - mg \sin \theta \quad \therefore \ddot{x} = -\frac{k}{m} \left(x + \frac{mg}{k} \sin \theta \right) = -\frac{k}{m}(x + d)$$

小球は振動中心 $x_0 = -d$, 角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ の単振動を行うことわかる. $x = -3d$ で静かに手を放した時刻を $t = 0$ とすると小球の位置 x , および速度 v はそれぞれ,

$$\begin{cases} x = -d - 2d \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = 2d \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

と表される. 板と小球の間の垂直抗力の大きさ N は $N = -kx$ と表されるため*7, 小球が板から離れる位置は $x = 0$ とわかる. よって, $x = 0$ を解いて,

$$-d - 2d \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) = 0 \quad \therefore \sqrt{\frac{k}{m}} t = \frac{2}{3}\pi.$$

この t を v へ代入すれば,

$$v_0 = 2d \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\frac{2}{3}\pi \right) = d \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

続いて, 小球, 重力場, バネからなる系の力学的エネルギー保存則でも同様に*8,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}k(3d)^2 + mg(-3d \sin \theta) \quad \therefore v_0 = d \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

【補足 2】問(1)(c)を運動方程式（時間追跡）、力学的エネルギー保存則で解く

小球の運動方程式より x 軸方向の加速度 a は,

$$ma = -mg \sin \theta \quad \therefore a = -g \sin \theta$$

*6 厳密には小球に弾性力がはたらくわけではない. 板から受ける垂直抗力の大きさを N とすると, 板（質量無視）, および小球の運動方程式は,

$$\begin{cases} 0 \cdot \ddot{x} = -N + k|x|, \\ m\ddot{x} = N - mg \sin \theta \end{cases}$$

であり, $N = k|x| = -kx$ からこの運動方程式を得る.

*7 少し前の脚注参照.

*8 $d = \frac{mg}{k} \sin \theta$ を利用.

と求まり、離れた瞬間を再度 $t = 0$ とすると、物体の位置 x 、および速度 v はそれぞれ、

$$\begin{cases} x = v_0 t - \frac{1}{2} g \sin \theta t^2, \\ v = v_0 - g \sin \theta t \end{cases}$$

と表される。 $\overline{BC} = \frac{R}{\tan \theta}$ ゆえ、 $x = \frac{R}{\tan \theta}$ となる時刻 t を求めて*9、

$$v_0 t - \frac{1}{2} g \sin \theta t^2 = \frac{R}{\tan \theta} \quad \therefore t = \frac{v_0}{g \sin \theta} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gR \cos \theta}{v_0^2}} \right).$$

よって、この t を速度 v へ代入すれば、

$$v_1 = v_0 - g \sin \theta \cdot \frac{v_0}{g \sin \theta} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gR \cos \theta}{v_0^2}} \right) = \sqrt{v_0^2 - 2gR \cos \theta}.$$

続いて、小球、重力場からなる系の力学的エネルギー保存則でも同様に、

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + mgR \cos \theta = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \therefore v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gR \cos \theta}.$$

【補足3】問(2)(b)を運動方程式（時間追跡）、力学的エネルギー保存則で解く

台の右側斜面の斜面に沿って下向きに x' 軸を定め、その原点を小物体の始状態の位置に定める。小物体の運動方程式より x' 軸方向の加速度 a は*10、

$$Ma = Mg \sin \theta - \mu' N = Mg \sin \theta - \mu' Mg \cos \theta \quad \therefore a = g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)$$

と求まる。小物体が運動を始めた時刻を $t = 0$ とすると、時刻 t における小物体の位置 x' 、および速度 v' はそれぞれ、

$$\begin{cases} x' = V_2 t - \frac{1}{2} g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) t^2, \\ v' = V_2 - g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) t \end{cases}$$

と表される。 $V = 0$ となる時刻 t は $t = \frac{V_2}{g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)}$ であるから、このときの $x' = L$ は、

$$L = \frac{V_2^2}{g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)} - \frac{1}{2} g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) \left\{ \frac{V_2}{g(\sin \theta - \mu' \cos \theta)} \right\}^2 = \frac{V_2^2}{2g(\mu' \cos \theta - \sin \theta)}.$$

*9 t の符号は次のように決定する。 $x = \frac{R}{\tan \theta}$ を通過し得るのは（この斜面が無限に続くとは仮定したとき）行きと帰りの2通り存在する。 t の負符号の解は行きで通過する時刻を表し、正符号の解は帰りで通過する時刻を表すため、負符号を選択する。

*10 斜面垂直方向の運動方程式より小物体と台の間にはたらく垂直抗力の大きさは $Mg \cos \theta$ である。

続いて，小球，重力場からなる系の力学的エネルギー収支でも同様に，

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}M \cdot 0^2 - \frac{1}{2}MV_2^2\right) + \{Mg(-L \sin \theta) - Mg \cdot 0\} &= \mu' Mg \cos \theta L \cos \pi \\ &= -\mu' Mg L \cos \theta \\ \therefore L &= \frac{V_2^2}{2g(\mu' \cos \theta - \sin \theta)}.\end{aligned}$$

2 vBl 公式の電磁誘導

【メモ】

- ・回路の一部が動く電磁誘導は，誘導起電力の決定では vBl の公式が基本となる．
- ・電磁誘導の問題は，①誘導起電力の決定，②回路の議論，③運動の議論，④エネルギーの議論，という作りが基本．
- ・ジュール熱 J の計算は以下のように行う．

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I \text{ 一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I \text{ 一定でないとき}). \end{cases}$$

今回，ジュール熱の計算はしないが，問(1)(c)ではエネルギー収支の式を利用する（ある意味で，この考え方を利用しているとも言える）．

【解答】

問(1) (a) 回路の（力学的な）エネルギー収支より，

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mgh \cos 0 = mgh \quad \therefore v_1 = \sqrt{2gh}.$$

また，この直後回路の下側の辺には右向きに v_1Bw の誘導起電力が生じる．回路に流れる電流はキルヒホッフ則より，

$$v_1Bw - RI_1 = 0 \quad \therefore I_1 = \frac{Bw\sqrt{2gh}}{R}.$$

(b) 回路の速度が v のときの回路の加速度を a ，回路に流れる電流を I （反時計回りを正）とする．回路の運動方程式，およびキルヒホッフ則より加速度 a は，

$$\begin{cases} ma = mg - IBw, \\ vBw - RI = 0 \end{cases} \quad \therefore a = g - \frac{B^2w^2}{mR}v$$

と求まる．減速のためには $v = v_1 = \sqrt{2gh}$ で $a < 0$ であればよいので，

$$a = g - \frac{(Bw)^2}{mR}\sqrt{2gh} < 0 \quad \therefore h > \frac{g}{2} \left(\frac{mR}{B^2w^2} \right)^2.$$

(c) 回路と力学系全体のエネルギー収支より，

$$\Delta \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) + \Delta(-mgy) + Q = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}m \left(\sqrt{2gh} \right)^2 - mg\ell + Q = 0 \quad \therefore v_2 = \sqrt{2g(h + \ell) - \frac{2Q}{m}}.$$

- (d) $t > t_2$ では、運動方程式より加速度 a は $a = g$ となる。よって、時刻 t における速度 v は、

$$v = v_2 + g(t - t_2)$$

と表され、題意より、

$$\sqrt{2gh} = v_2 + g\Delta t \quad \therefore \Delta t = \underbrace{\frac{\sqrt{2gh} - v_2}{g}}.$$

- (e) ① $0 \leq t < t_1$, ② $t_1 \leq t < t_2$, ③ $t_2 \leq t$ の3つに場合分けして考える.

① $0 \leq t < t_1$ のとき

回路に生じる誘導起電力は0ゆえ、キルヒホッフ則は $RI = 0$ となり $I = 0$ が求まる.

② $t_1 \leq t < t_2$ のとき

回路に生じる誘導起電力は vBw ゆえ、回路に流れる電流 I はキルヒホッフ則より、

$$vBw - RI = 0 \quad \therefore I = \frac{Bw}{R}v$$

となり、 v に比例する。(b)より v は減少するため^{*11}, I も減少することがわかる.

③ $t_2 \leq t$ のとき

回路の上辺、下辺それぞれに vBw の誘導起電力が生じるので、回路に流れる電流 I はキルヒホッフ則より、

$$vBw - RI - vBw = 0 \quad \therefore I = 0$$

となる.

以上①, ②, ③を踏まえれば(あ)のグラフが適当である.

- 問(2) コンデンサの左側の極板の帯電量を q , 回路に流れる電流を反時計回りに I とする. 運動方程式, およびキルヒホッフ則は、

$$\begin{cases} Ma = Mg - IBw, \\ vBw - \frac{q}{C} = 0. \end{cases}$$

- (a) キルヒホッフ則より、

$$q = CBwv.$$

- (b) 今の場合、電流 I は電荷 q と $I = +\frac{dq}{dt}$ の関係があり、加速度 a が $a = \frac{dv}{dt}$ であることから、

$$I = \frac{dq}{dt} = CBw \frac{dv}{dt} = CBwa$$

*11 v の表式は【補足】に示した

と表される．よって，運動方程式より，

$$Ma = Mg - IBw = Mg - C(Bw)^2 a \quad \therefore a = \frac{M}{\underbrace{M + C(Bw)^2}} g.$$

(c) 加速度 a は定数のため，時刻 t における位置 y ，および速度 v はそれぞれ

$$\begin{cases} y = h + \frac{1}{2}at^2, \\ v = at \end{cases}$$

と表される． $y = h + \frac{\ell}{2}$ を満たす時刻は $t = \sqrt{\frac{\ell}{a}}$ であり，このときの速度は $v = \sqrt{a\ell}$ である．
キルヒホッフ則よりコンデンサの帯電量は $q = CBw\sqrt{a\ell}$ であるから，コンデンサの蓄える静電エネルギー U は，公式より，

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C(Bw)^2 a \ell = \frac{MC(Bw)^2 g \ell}{\underbrace{2\{M + C(Bw)^2\}}}.$$

【補足 1】問(1)のエネルギー収支の式の導出

回路の運動方程式，およびキルヒホッフ則は，

$$\begin{cases} ma = mg - IBw, \\ RI = vBw. \end{cases}$$

運動方程式に速度 v ，キルヒホッフ則に電流 I をかけ 2 式足し合わせると，

$$mv \frac{dv}{dt} + RI^2 = mgv \quad \therefore \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)}_{\text{運動エネルギーの時間変化率}} + \underbrace{\frac{d}{dt} (-mgy)}_{\text{位置エネルギーの時間変化率}} + \underbrace{RI^2}_{\text{消費電力}} = 0$$

となりエネルギー収支の式を得る．

【補足 2】問(1)(e)における速度 v ，および電流 I の表式

運動方程式，およびキルヒホッフ則より，

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{(Bw)^2}{R} v + mg \quad \therefore \frac{dv}{dt} = -\frac{(Bw)^2}{mR} \left\{ v - \frac{mgR}{(Bw)^2} \right\}.$$

すなわち， v は終端速度 $v_f = \frac{mgR}{(Bw)^2}$ の指数関数型の解を取ることが分かる^{*12}．

^{*12} なお，指数関数型の解の導出は以下のような計算によってもわかる（ $\heartsuit = e^\heartsuit$ は積分定数）．

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{v - \frac{mgR}{(Bw)^2}} \frac{dv}{dt} dt &= - \int \frac{(Bw)^2}{mR} dt \\ \log \left| v - \frac{mgR}{(Bw)^2} \right| &= -\frac{(Bw)^2}{mR} t + \heartsuit \quad \therefore v = \frac{mgR}{(Bw)^2} + \heartsuit e^{-\frac{(Bw)^2}{mR} t}. \end{aligned}$$

$t = t_1$ で $v = v_1$ であることから,

$$v = \frac{mgR}{(Bw)^2} + \left\{ v_1 - \frac{mgR}{(Bw)^2} \right\} e^{-\frac{(Bw)^2}{R}(t-t_1)}$$

を得る. また, $I = \frac{Bw}{R}v$ より $t_1 \leq t \leq t_2$ では,

$$I = \frac{mg}{Bw} + \left(\frac{v_1 Bw}{R} - \frac{mg}{Bw} \right) e^{-\frac{(Bw)^2}{R}(t-t_1)}$$

となる.

【補足 3】問(2)のエネルギー収支の式の導出

回路の運動方程式, およびキルヒホッフ則は,

$$\begin{cases} Ma = Mg - IBw, \\ \frac{q}{C} = vBw. \end{cases}$$

運動方程式に速度 v , キルヒホッフ則に電流 $I = \frac{dq}{dt}$ をかけ 2 式足し合わせると,

$$Mv \frac{dv}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = Mgv \quad \therefore \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Mv^2 \right)}_{\text{運動エネルギーの時間変化率}} + \underbrace{\frac{d}{dt} (-mgy)}_{\text{位置エネルギーの時間変化率}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right)}_{\text{静電エネルギーの時間変化率}} = 0$$

となりエネルギー収支の式を得る. ここで, キルヒホッフ則より $q = CBwv$ であるから v を消去し, 両辺 t で積分すれば,

$$\Delta \left\{ \frac{1}{2} M \left(\frac{q}{CBw} \right)^2 \right\} + \Delta \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) + \Delta (-Mgy) = 0$$

を得る.

3 熱力学（複数系，熱あり過程，断熱過程）

【メモ】

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題．定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算．

・問(2)の(c)以降は，B 室に限り準静的な断熱過程に関する問題．準静的な断熱過程では，ポアソンの公式から圧力か体積の決定，状態方程式から温度の決定．熱力学第 1 法則は仕事の決定方程式となる．

【解答】

問(1) ピストンのつりあい，および各室の状態方程式は，

$$\begin{cases} 0 = p_A S - kx - p_B S, \\ \begin{cases} A : p_A S(L+x) = RT_A, \\ B : p_B S(L-x) = RT_B. \end{cases} \end{cases}$$

(a) A 室の状態方程式より，

$$p_A = \frac{RT_A}{S(L+x)}.$$

(b) つりあいの式は $0 = p_A S - kx - p_B S$.

(c) B 室の状態方程式より， $x = \frac{L}{2}$ として，

$$T_{B1} = \frac{1}{3}T_A - \frac{kL^2}{4R}.$$

問(2) 状態 2 におけるピストンのつりあい，および各室の状態方程式と，状態 3 におけるピストンのつりあい，各室の状態方程式，および状態 2 → 3 でのポアソンの公式はそれぞれ，

$$\text{状態 2 : } \begin{cases} 0 = p_{A2}S - k\left(\frac{1}{2}L - D\right) - p_{B2}S, \\ \begin{cases} A : p_A \cdot \frac{3}{2}SL = RT_A, \\ B : p_B \cdot \frac{1}{2}SL = RT_{B2}. \end{cases} \end{cases} \quad \text{状態 3 : } \begin{cases} 0 = p_{A3}S - p_{B3}S, \\ \begin{cases} A : p_{A3}SL = RT_A, \\ B : p_{B3}SL = RT_{B3}, \end{cases} \\ p_{B3}(SL)^\gamma = p_{B2}\left(\frac{1}{2}SL\right)^\gamma. \end{cases}$$

(a) 状態 1 から状態 2 では体積一定ゆえ，両室の内部気体のする仕事はともに 0 である．B 室の熱力学第 1 法則より，

$$Q = \frac{3}{2}R(T_{B2} - T_{B1}) \quad \therefore T_{B2} = \frac{1}{3}T_A - \frac{kL^2}{4R} + \frac{2Q}{3R}.$$

(b) B 室の状態方程式より,

$$\begin{cases} p_{B1} \cdot \frac{1}{2}SL = RT_{B1}, \\ p_{B2} \cdot \frac{1}{2}SL = RT_{B2} \end{cases} \quad \therefore \Delta p = p_{B2} - p_{B1} = \frac{4Q}{3SL}.$$

(c) A 室内は温度 T_A で一定ゆえ, 内部エネルギー変化は

$$\Delta U_A = \frac{3}{2}R(T_A - T_A) = 0.$$

(d) ポアソンの公式より,

$$p_{B3} = \frac{1}{2^\gamma} p_{B2}.$$

(e) ポアソンの公式の結果に状態 2 における B 室の状態方程式を代入して,

$$p_{B3} = \frac{1}{2^\gamma} p_{B2} = \frac{1}{2^{\gamma-1}} \frac{R}{SL} \left(\frac{1}{2}T_A - \frac{kL^2}{4R} + \frac{2Q}{3R} \right).$$

ここで, つりあいの式 $p_{A3} = p_{B3}$, および A 室の状態方程式より^{*13},

$$\underbrace{\frac{RT_A}{SL}}_{=p_{A3}} = \underbrace{\frac{1}{2^{\gamma-1}} \frac{R}{SL} \left(\frac{1}{2}T_A - \frac{kL^2}{4R} + \frac{2Q}{3R} \right)}_{=p_{B3}} \quad \therefore Q = \frac{1}{2} (3 \cdot 2^{\gamma-1} - 1) RT_A + \frac{3}{8} kL^2.$$

(f) 支柱の始状態 X_0 からの移動量が d のとき, ばねの伸びは $x - d$ と表される. このとき, 状態 2 からこの途中の状態におけるピストンのつりあい, 各室の状態方程式, およびポアソンの公式より^{*14},

$$\begin{cases} 0 = p_A S - p_B S - k(x - d), \\ \begin{cases} A : p_A S(L + x) = RT_A, \\ B : p_B S(L - x) = RT_B, \end{cases} \\ p_B \{S(L - x)\}^\gamma = p_{B2} \left(\frac{1}{2}SL \right)^\gamma \end{cases} \quad \therefore d = x + \frac{RT_A}{kL} \left\{ \left(\frac{L}{L - x} \right)^\gamma - \frac{L}{L + x} \right\}.$$

^{*13} 状態 2 の各種方程式とこの Q の表式から D を求めることができる: $D = \left(2^\gamma - \frac{2}{3} \right) \frac{RT_A}{kL} + \frac{1}{2}L$.

^{*14} 途中計算で $p_{B2} = \frac{2R}{SL} \left(\frac{1}{3}T_A - \frac{kL^2}{4R} + \frac{2Q}{3R} \right)$, $Q = \frac{3}{2} (2^{\gamma-1} - 1) RT_A + \frac{3}{8} kL^2$ を用いた. 方針はまず p_{B2} に Q を代入する. その p_{B2} をポアソンの公式へ代入し p_B を求める. この p_B と, A 室の状態方程式から求めた p_A をつりあいの式へ代入する.