

問題編



1. 図のように水平と角度  $\theta (> 0)$  をなす斜面上の原点  $O$  から、斜面と角度  $\alpha$  をなす方向に初速  $v_0$  で質量  $m$  の小球を投射した。原点から斜面に沿って上向きに  $x$  軸を、斜面から垂直上向きに  $y$  軸をとる。斜面はなめらかで十分に長く、小球と斜面とのはね返り係数は  $e (0 < e < 1)$  とする。重力加速度の大きさを  $g$  とし、空気抵抗は無視する。また、角度  $\theta$  と  $\alpha$  は  $0 < \theta + \alpha < \frac{\pi}{2}$  の関係を満たすものとする。

小球を投射した時刻を  $t = 0$  とし、小球が斜面に衝突するまでの運動について考える。

- (1) 小球にはたらく重力の  $x$  成分,  $y$  成分を示せ。
- (2) 時刻  $t$  における小球の速度の  $x$  成分,  $y$  成分を示せ。
- (3) 時刻  $t$  における小球の位置の  $x$  座標,  $y$  座標を示せ。
- (4) 小球と斜面が衝突する時刻を求めよ。
- (5) 小球と斜面が衝突する点の原点  $O$  からの距離  $\ell$  を求めよ。
- (6) 距離  $\ell$  が最大となる角度  $\alpha$  と, そのときの距離  $\ell_{\max}$  を求めよ。

小球が斜面に対して垂直に衝突した場合について考える。

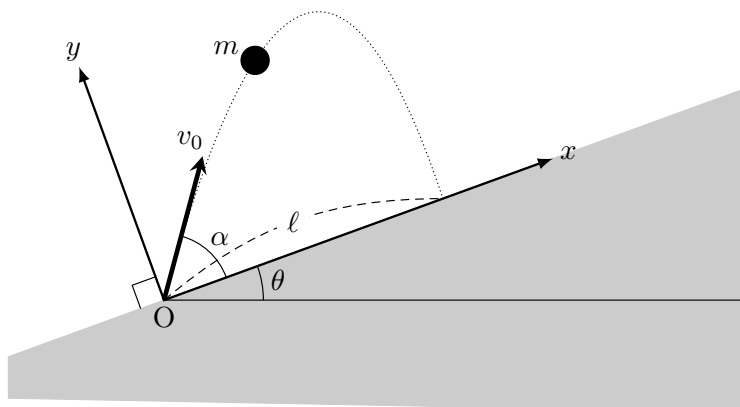
- (7) 角度  $\alpha$  と  $\theta$  の関係式を求めよ。
- (8) 小球が衝突する直前の速さ  $v_1$  を  $\theta$  を用いて表せ。

原点から投射した小球が斜面と垂直に 1 回目の衝突をしたあと、斜面上をバウンドしながら運動を続けた。

以下では解答に  $v_1$  を用いてよい。

- (9) 1 回目の衝突から 2 回目に衝突するまでの時間を求めよ。
- (10) 1 回目の衝突からバウンドが収まるまでの時間を求めよ。

[2018 年横浜市立大学, 重問 6 対応]



2. 長さ  $l$ , 面積  $S$ , 密度  $\rho$  の一様な細長い円柱状の棒が密度  $\rho_0 (> \rho)$  の液体に浮かべてある. この棒の一端の面の中心 A に糸をつけ, 鉛直上向きに糸をゆっくり引き上げていく. 重力加速度の大きさを  $g$  とし, 糸の質量は無視できるものとして, 以下の問に答えよ.

(1) 棒にはたらく重力の大きさはいくらか.

(2) 図のように液面から点 A までの高さが  $h$  になったとき, 棒は液面と  $\theta$  の角度をなしていた. このとき,

ア 棒にはたらく重力の作用線と点 A との水平距離はいくらか.

イ 棒の中心線が液体中にある部分の長さを  $l_0$  とすると, 液体から受ける浮力の大きさはいくらか.  $S, \rho_0, l_0, g$  で表せ.

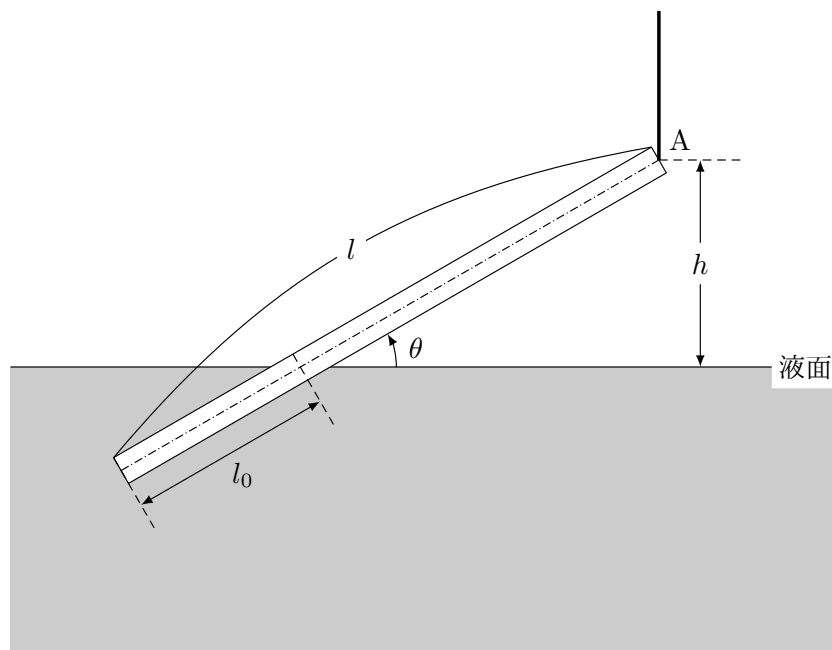
ウ 長さ  $l_0$  を  $l, h, \theta$  で表せ.

エ 点 A まわりの力のモーメントのつり合いの式を書け.

オ 前問ウ, エの式から  $\sin \theta$  を求め,  $l, h, \rho, \rho_0$  で表せ.

(3) さらに糸をゆっくり引き上げると,  $\theta$  が  $90^\circ$  になった. その瞬間の液面から点 A までの高さを  $l, \rho, \rho_0$  で表せ.

[2010 年名城大学, 重問 17 対応]



## ■略解

### 1. 等加速度運動の時間追跡

$$(1) (m\vec{g})_x = -mg \sin \theta, \quad (m\vec{g})_y = -mg \cos \theta$$

$$(2) \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha - g \sin \theta t, \\ v_y = v_0 \sin \alpha - g \cos \theta t \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2} g \sin \theta t, \\ y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g \cos \theta t \end{cases}$$

$$(4) \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}$$

$$(5) \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos (\theta + \alpha)}{g \cos^2 \theta}$$

$$(6) \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}, \quad \ell_{\max} = \frac{v_0^2}{g(1 + \sin \theta)}$$

$$(7) 2 \tan \theta \tan \alpha = 1$$

$$(8) \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \tan^2 \theta}} v_0$$

$$(9) e \frac{2v_1}{g \cos \theta}$$

$$(10) \frac{e}{1 - e} \frac{2v_1}{g \cos \theta}$$

### 2. 剛体のつりあい

$$(1) \rho S l g$$

$$(2) \begin{aligned} \mathcal{T} &: \frac{1}{2} l \cos \theta & \mathcal{I} &: \rho_0 S l_0 g & \mathcal{U} &: l - \frac{h}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}: 0 = \frac{l}{2} \rho S l g \cos \theta - \left( l - \frac{l_0}{2} \right) \rho_0 S l_0 g \cos \theta$$

$$\mathcal{O}: \frac{h}{l} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}}$$

$$(3) l \sqrt{1 - \frac{\rho_0}{\rho}}$$

## 解答編

---

## 1. 等加速度運動の時間追跡

【メモ】

・ほとんどが等加速度運動の時間追跡．等加速度運動はエネルギーで論じることができるが，今回は時刻  $t$  を問われているため時間追跡的解法を選択する．等加速度運動の公式は以下 2 式を押さえれば十分<sup>\*1</sup>．

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2, \\ v(t) = v(0) + at. \end{cases}$$

・後半 2 問は衝突の要素を含む．

【解答】

(1) 重力を  $x$  軸,  $y$  軸に沿って分解すれば,

$$m\vec{g} = \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ -mg \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(2) 運動方程式より物体の加速度の  $x$  成分  $a_x$ , および  $y$  成分  $a_y$  はそれぞれ,

$$\begin{cases} ma_x = -mg \sin \theta, \\ ma_y = -mg \cos \theta \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a_x = -g \sin \theta, \\ a_y = -g \cos \theta \end{cases}$$

と定数値を取るのので, 「等加速度運動の公式」より,

$$\begin{cases} v_x = \underline{v_0 \cos \alpha - g \sin \theta t}, \\ v_y = \underline{v_0 \sin \alpha - g \cos \theta t}. \end{cases}$$

(3) 前問同様に公式より,

$$\begin{cases} x = \underline{v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2}g \sin \theta t}, \\ y = \underline{v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}g \cos \theta t}. \end{cases}$$

(4)  $y = 0$  を解いて<sup>\*2</sup>,

$$v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}g \cos \theta t = 0 \quad \therefore t = 0, \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}.$$

$t > 0$  より,

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{\underline{g \cos \theta}}.$$

<sup>\*1</sup> 加速度  $a$  が  $t$  のべき乗で書ける場合, 単純に積分すれば (これもれっきとした微分方程式を解く操作である) その場合の速度  $v$  と位置  $x$  の公式を導出できる.

<sup>\*2</sup>  $x = \ell$  は考えてはいけない.  $\ell$  は次の設問の解答である.

(5)  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}$  を  $x$  へ代入して,

$$\begin{aligned}\ell &= v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta} - \frac{1}{2} g \sin \theta \left( \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta} \right)^2 \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \frac{\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \frac{\sin \alpha \cos (\theta + \alpha)}{\cos^2 \theta}.\end{aligned}$$

(6) 分子の  $\alpha$  を含む因子は

$$\sin \alpha \cos (\theta + \alpha) = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + (\theta + \alpha)) + \sin(\alpha - (\theta + \alpha)) \} = \frac{1}{2} \{ \sin(2\alpha + \theta) - \sin \theta \}$$

と変形できるので  $\ell$  は

$$\ell = \frac{v_0^2}{g} \frac{\sin(2\alpha + \theta) - \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

と書き直せる. よって,  $\sin(2\alpha + \theta) = 1$  となるとき最大で,

$$\ell_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \frac{1 - \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{v_0^2}{g} \frac{1 - \sin \theta}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = \frac{v_0^2}{g(1 + \sin \theta)}.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha + \theta) &= 1 \\ 2\alpha + \theta &= \frac{\pi}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

(7)  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}$  で  $v_x = 0$  であればよいので,

$$v_0 \cos \alpha - g \sin \theta \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta} = 0 \quad \therefore \underline{2 \tan \theta \tan \alpha = 1}.$$

(8)  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}$  での速さは,

$$\begin{aligned}v_1 &= \sqrt{0^2 + \left( v_0 \sin \alpha - g \cos \theta \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta} \right)^2} = v_0 \sin \alpha = v_0 \sqrt{\frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4 \tan^2 \theta + 1}} v_0.\end{aligned}$$

(9) はね返り係数の式から衝突直後の小球の速度の  $y$  成分  $v'_1$  は,

$$v'_1 - 0 = -e(-v_1 - 0) = ev_1$$

である．よって，この時刻を  $\tau = 0$  とするような時刻を改めて定義すれば次の衝突までの小球の位置は，

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}g \sin \theta \tau^2, \\ y = ev_1 \tau - \frac{1}{2}g \cos \theta \tau^2 \end{cases}$$

と書ける．1 回目の衝突から 2 回目の衝突までの時間間隔は  $y = 0$  を解いて，

$$ev_1 \tau - \frac{1}{2}g \cos \theta \tau^2 = 0 \quad \therefore \tau = \frac{ev_1}{\underbrace{g \cos \theta}}.$$

なお， $\tau > 0$  より  $\tau = 0$  は不適である．

- (10)  $n$  回目の衝突から  $n + 1$  回目の衝突までの間を考える． $n$  回目の衝突直前の小球の速度の  $y$  成分を  $-v_n (< 0)$  とすると，衝突直後の速度の  $y$  成分は，

$$v'_n - 0 = -e(-v_n - 0) = ev_n$$

となり， $n$  回目の衝突時刻を  $\tau = 0$  とするような時刻を改めて定義すれば次の衝突までの小球の位置，速度の  $y$  成分はそれぞれ，

$$\begin{cases} y = ev_n \tau - \frac{1}{2}g \cos \theta \tau^2, \\ v_y = ev_n - g \cos \theta \tau \end{cases}$$

と書ける．すると， $n + 1$  回目の衝突時刻は  $y = 0$  を解けば  $\tau = \frac{2ev_n}{g \cos \theta}$  と求まり，このときの速度の  $y$  成分が  $v_y = -ev_n$  とわかる．すなわち， $n + 1$  回目の衝突直前の速度の  $y$  成分  $-v_{n+1}$  は  $-v_{n+1} = -ev_n$  は漸化式を満たすので，

$$v_n = ev_{n-1} = e^2 v_{n-2} = \cdots = e^{n-1} v_1$$

を得る．よって， $n$  回目の衝突から  $n + 1$  回目の衝突までの小球の  $y$  座標は，

$$y = e^n v_1 \tau - \frac{1}{2}g \cos \theta \tau^2$$

となり， $n$  回目の衝突から  $n + 1$  回目の衝突の時間間隔は  $y = 0$  を解いて  $\tau = \frac{2e^n v_1}{g \cos \theta}$  と求まる．

以上から，1 回目の衝突から  $n$  回目までの衝突までの時間  $T_n$  は，

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{2e^k v_1}{g \cos \theta} = \frac{e(1 - e^n)}{1 - e} \frac{2v_1}{g \cos \theta}$$

と表され， $n \rightarrow \infty$  では  $0 < e < 1$  に留意して，

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e(1 - e^n)}{1 - e} \frac{2v_1}{g \cos \theta} = \frac{e}{1 - e} \frac{2v_1}{\underbrace{g \cos \theta}}.$$



## 2. 剛体のつりあい

【メモ】

・ 剛体のつりあいの定石は以下 2 式連立.

$$\begin{cases} \text{力のつりあい} \\ \text{任意の点まわりの力のモーメントのつりあい} \end{cases}$$

・ 以上の立式に加え、問題の条件としてつりあいが敗れる瞬間を考えることがしばしば.

【解答】

(1) 密度の定義より質量は  $\rho Sl$  と表せるから、重力の大きさ（重さ）は、

$$W = mg = \rho Slg.$$

(2) ア 図より  $\frac{1}{2}l \cos \theta$ .

イ 公式より  $\rho_0 Sl_0 g$ .

ウ 図の水面からはみ出ている棒と液面で形成される三角形に注目して、

$$\frac{h}{l-l_0} = \sin \theta \quad \therefore l_0 = l - \frac{h}{\sin \theta}.$$

エ 点 A まわりの力のモーメントのつりあいは浮力の作用点が元あった流体の質量中心であることに留意して、

$$0 = \frac{l}{2} \rho Slg \cos \theta - \left( l - \frac{l_0}{2} \right) \rho_0 Sl_0 g \cos \theta.$$

オ 力のモーメントのつりあいより\*3,

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} \rho Slg \cos \theta - \left( l - \frac{l_0}{2} \right) \rho_0 Sl_0 g \cos \theta &= 0 \\ l_0^2 - 2ll_0 + \frac{\rho}{\rho_0} l^2 &= 0 \quad \therefore l_0 = l \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right) \end{aligned}$$

を得て、 $l_0 < l$  より、

$$l_0 = l \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right)$$

と求まる。ここで、エの結果を用いて、

$$l \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right) = l - \frac{h}{\sin \theta} \quad \therefore \sin \theta = \frac{h}{l \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}}}.$$

\*3 力のつりあいからは張力の大きさが求まる。今回は問われていない。

- (3) 前問の結果に  $\theta = \frac{\pi}{2}$  を代入して,

$$h = l \underbrace{\sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}}_{\text{~~~~~}}.$$