

2025年夏の補講教材

物理



 高校

重要問題集に対応した2次試験対策！

知識の引き出し方を学ぶ夏に！



目次

Day1 問題	4
Day2 問題	6
Day3 問題	12
Day4 問題	16
Day5 問題	20
Day6 問題	24
Day7 問題	28
Day8 問題	32
Day9 問題	38
Day10 問題	40
Day11 問題	44
略解	49
Day1 解答	58
Day2 解答	63
Day3 解答	72
Day4 解答	79
Day5 解答	83
Day6 解答	94
Day7 解答	106
Day8 解答	110
Day8 解答	124
Day10 解答	134
Day11 解答	138

問題編



1. 図のように水平と角度 $\theta (> 0)$ をなす斜面上の原点 O から、斜面と角度 α をなす方向に初速 v_0 で質量 m の小球を投射した。原点から斜面に沿って上向きに x 軸を、斜面から垂直上向きに y 軸をとる。斜面はなめらかで十分に長く、小球と斜面とのはね返り係数は e ($0 < e < 1$) とする。重力加速度の大きさを g とし、空気抵抗は無視する。また、角度 θ と α は $0 < \theta + \alpha < \frac{\pi}{2}$ の関係を満たすものとする。

小球を投射した時刻を $t = 0$ とし、小球が斜面に衝突するまでの運動について考える。

- (1) 小球にはたらく重力の x 成分, y 成分を示せ。
- (2) 時刻 t における小球の速度の x 成分, y 成分を示せ。
- (3) 時刻 t における小球の位置の x 座標, y 座標を示せ。
- (4) 小球と斜面が衝突する時刻を求めよ。
- (5) 小球と斜面が衝突する点の原点 O からの距離 ℓ を求めよ。
- (6) 距離 ℓ が最大となる角度 α と, そのときの距離 $\ell_{\max}$ を求めよ。

小球が斜面に対して垂直に衝突した場合について考える。

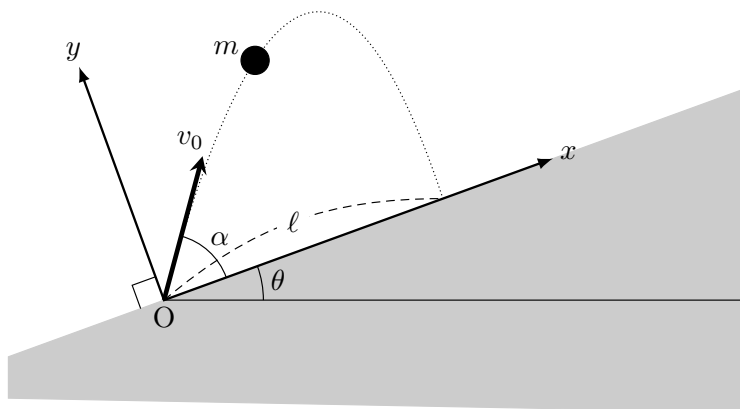
- (7) 角度 α と θ の関係式を求めよ。
- (8) 小球が衝突する直前の速さ v_1 を θ を用いて表せ。

原点から投射した小球が斜面と垂直に 1 回目の衝突をしたあと、斜面上をバウンドしながら運動を続けた。

以下では解答に v_1 を用いてよい。

- (9) 1 回目の衝突から 2 回目に衝突するまでの時間を求めよ。
- (10) 1 回目の衝突からバウンドが収まるまでの時間を求めよ。

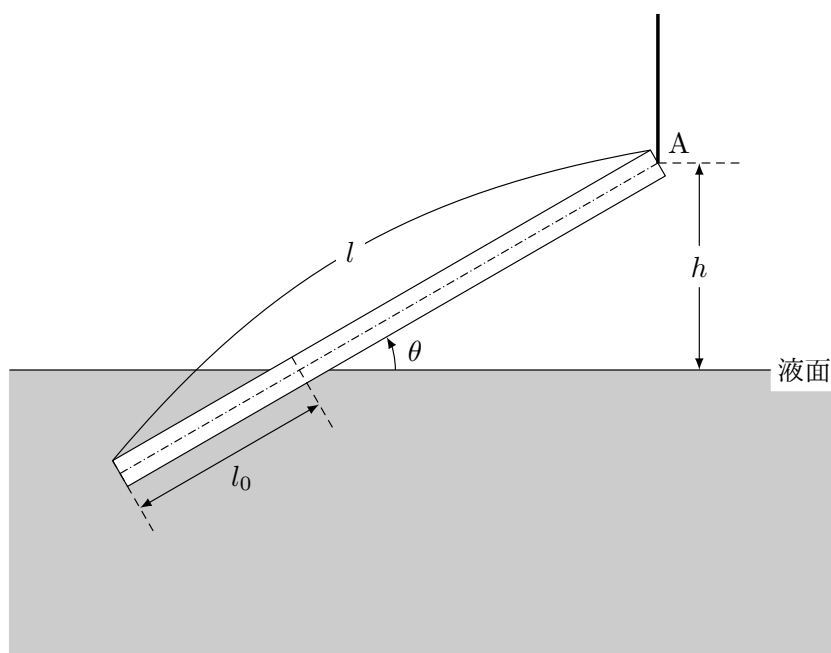
[2018 年横浜市立大学, 重問 6 対応]



2. 長さ l , 面積 S , 密度 ρ の一様な細長い円柱状の棒が密度 $\rho_0 (> \rho)$ の液体に浮かべてある. この棒の一端の面の中心 A に糸をつけ, 鉛直上向きに糸をゆっくり引き上げていく. 重力加速度の大きさを g とし, 糸の質量は無視できるものとして, 以下の問に答えよ.

- (1) 棒にはたらく重力の大きさはいくらか.
- (2) 図のように液面から点 A までの高さが h になったとき, 棒は液面と θ の角度をなしていた. このとき,
 - ア 棒にはたらく重力の作用線と点 A との水平距離はいくらか.
 - イ 棒の中心線が液体中にある部分の長さを l_0 とすると, 液体から受ける浮力の大きさはいくらか. S, ρ_0, l_0, g で表せ.
 - ウ 長さ l_0 を l, h, θ で表せ.
 - エ 点 A まわりの力のモーメントのつり合いの式を書け.
 - オ 前問ウ, エの式から $\sin \theta$ を求め, l, h, ρ, ρ_0 で表せ.
- (3) さらに糸をゆっくり引き上げると, θ が 90° になった. その瞬間の液面から点 A までの高さを l, ρ, ρ_0 で表せ.

[2010 年名城大学, 重問 17 対応]



3. 図のように、質量 m の物体が、表面のあらい水平な台の上に置いており、水平伸びた 2 本の糸につながれている。それぞれの糸には、なめらかに回る軽い滑車の先に質量 M の物体と質量 M' の物体が下り下げられている。ただし、 $M > M'$ とする。各物体と糸は静止している。物体にはたらく空気抵抗と糸の質量を無視できるものとし、重力加速度の大きさを g 、物体と台との静止摩擦係数を μ として、次の問いに答えよ。

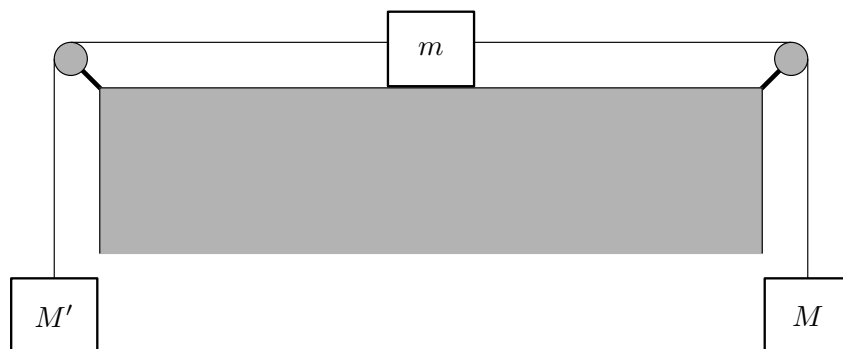
- (1) 質量 m の物体にはたらく摩擦力の大きさを F として、この物体の水平方向のつりあいの式を書け。
- (2) 各物体と糸が静止しているために必要な、以下の条件式の空欄を埋めよ。

$$\mu \geq \boxed{}$$

質量 m の物体と質量 M' の物体の間の糸を切り離すと、質量 m の物体と質量 M の物体は、ともに加速度の大きさ a で運動をはじめた。このときの、質量 m の物体と台との動摩擦係数を μ' とし、糸の張力の大きさを T とする。質量 m の物体が台の上にあるとして、以下の問いに答えよ。

- (3) 質量 M の物体の鉛直方向の運動方程式を書け。
- (4) 質量 m の物体の水平方向の運動方程式を書け。
- (5) 加速度の大きさ a を m , M , g , μ' で表せ。
- (6) 質量 m の物体が、動き始めてから時間 t が経過するまでに動いた距離を m , M , g , μ' , t で表せ。
- (7) 質量 m の物体と質量 M の物体の力学的エネルギーの総和の、動き始めてから時間 t が経過するまでの変化量を、 m , M , g , μ' , t を用いて表せ。

[2024 年佐賀大学, 重問 29 対応]



4. 図のように、なめらかで水平な床の上に質量 M の直方体の物体 C が置かれている。 C の上には質量 m_A の物体 A があり、 A から軽い糸を水平に張って滑車を通し、その糸の先端に質量 m_B の物体 B を取りつけ、鉛直につり下げる。 B の側面は C と接しており、 A と C 、 B と C の間には摩擦力ははたらないものとする。重力加速度の大きさを g として、次の問いに答えよ。

[A] A 、 B 、 C を静止させるために、 A には水平方向左向きに、 C には水平方向右向きに手で押して力を加える。

(1) A を押す力の大きさはいくらか。

(2) C を押す力はいくらか。

[B] C が動かないように手で水平方向右向きに力を加え、 A から静かに手をはなすと、 A と B は運動を始めた。

(3) 糸の張力の大きさを T 、 B の落下の加速度の大きさを a として、 A の水平方向の運動方程式を書け。

(4) B の鉛直方向の運動方程式を書け。

(5) a を m_A 、 m_B 、 g を用いて表せ。

(6) T を m_A 、 m_B 、 g を用いて表せ。

(7) A と B が運動しているとき、手が C に加えている力の大きさを m_A 、 m_B 、 g を用いて表せ。

(8) C にはたらく床からの垂直抗力の大きさを、 M 、 m_A 、 m_B 、 g を用いて表せ。

[C] C を押す水平方向右向きの力を大きくすると、 A 、 B 、 C は同じ加速度で等加速度運動をするようになった。

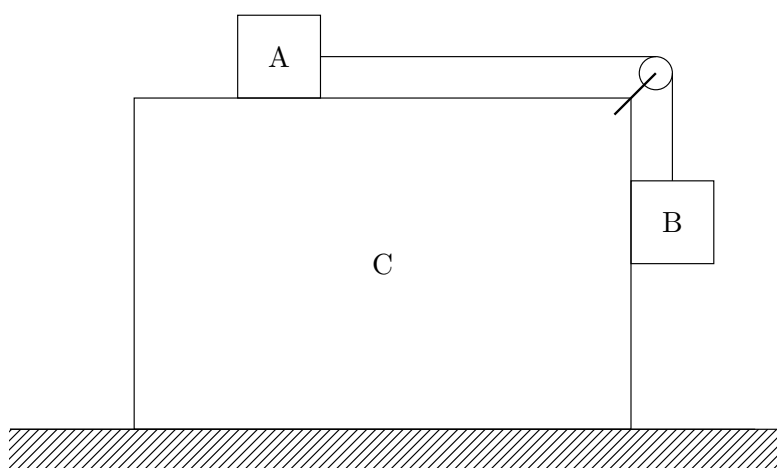
(9) 加速度の大きさを m_A 、 m_B 、 g を用いて表せ。

[2009 年福岡大学，重問 21 対応]

以下，追加問題（出典：1997 年横浜国立大学）。

[D] $m_A = 3m$ ， $m_B = 2m$ ， $M = 10m$ とする。 C を押す水平方向右向きの力を調整すると、 C は力と同じ向きに $\frac{1}{10}g$ の加速度で運動した。

(10) このとき C を押している力の大きさを求めよ。



5. 図のように、水平でなめらかな床に、質量 M の三角台 P を置き、ブロックで両側を固定した。 P は床と角度 θ をなすなめらかな斜面を持つ。斜面上の点 B に質量 m の小物体 Q を置き、静かに放したところ、 Q は斜面上を滑り落ちた。重力加速度の大きさを g として、次の問いに答えよ。

- (1) Q が斜面をすべっているとき、 Q の加速度の大きさはいくらか。
- (2) 点 B から斜面に沿って距離 d だけすべったときの Q の速さはいくらか。

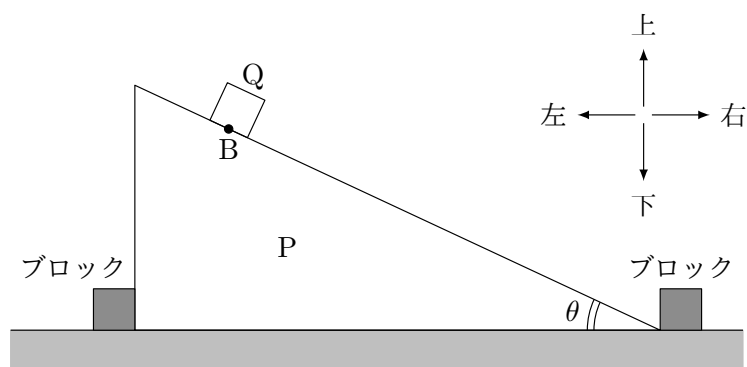
次に、両側のブロックを取り除いて、すべり落ちた Q を再び点 B に置いた状態で、 P と Q を保持した。そして、 P と Q を同時に静かに放したところ、 Q は斜面をすべり、 P は加速度の大きさ A の等加速度運動をした。 Q が P から受ける垂直抗力の大きさを N とする。

- (3) P の加速度の向きは、図中の上下左右のいずれか。
- (4) P の水平方向の運動方程式を記せ。
- (5) Q の運動を、等加速度運動する P から見たとき、
 - ア Q にはたらく慣性力の向きは、図中の上下左右のいずれか。
 - イ Q にはたらく慣性力の大きさはいくらか。
 - ウ 斜面に垂直な方向についての Q の運動方程式を記せ。
- (6) 前問の (4) と (5) ウで得られた式から A , N を求め、それぞれを M , m , g , θ で表せ。
- (7) Q が点 B から斜面に沿って距離 ℓ だけすべる間に P が移動した距離 L を M , m , g , ℓ , θ の中から必要なものを用いて表せ。

[2011 年名城大学, 重問 25 対応]

以下、追加問題。水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸を定め、 P の加速度を A_x , Q の加速度の x 成分, y 成分をそれぞれ a_x , a_y とする。

- (8) 地面固定系における各物体の運動方程式を記せ。
- (9) P に対する Q の相対運動の方向が斜面と平行であることを示せ。
- (10) 以上 (8), (9) より N を求めよ。
- (11) 運動量保存則を導け。また、この初期条件の下では重心速度が恒等的に 0 であることを示せ。



6. 図1のように、なめらかな水平面に壁があり、その壁にばね定数 k のばねが取り付けられている。水平面上に置かれた質量 $2m$ の小物体 A をばねに接触させてばねを自然長から長さ x だけ縮め、静かに手を離した。すると小物体 A はばねから離れ、その後、水平面上を右向きに一定速度 v_a で運動し、静止していた質量 m の小物体 B と衝突した。ただし、右向きを正、重力加速度の大きさを g とする。

- (1) 自然長から x 縮められたばねに蓄えられた弾性エネルギーを求めなさい。
- (2) 小物体 A の速度 v_a を求めなさい。
- (3) 小物体 A と B の反発係数が e ($0 < e < 1$) のとき、衝突後の小物体 B の速度 v_b' を v_a を用いて表しなさい。
- (4) 衝突後の小物体 A の運動の向きを答えなさい。

図2のように、衝突後、右向きに速度 v_b' で運動していた小物体 B が上面で水平面と同じ高さの台車に乗り移ると、台車は右向きに動き出した。小物体 B は台車上で ℓ だけすべり、その後は台車と一体になって水平面を右向きに速度 V で運動した。台車の質量は M で、台車と床の間には摩擦ははたらかず、小物体 B と台車の間の動摩擦係数は μ' である。また右向きを正、重力加速度の大きさを g とする。

- (5) 小物体 B が台車の上をすべっているときの小物体 B および台車の床に対する加速度をそれぞれ求めなさい。
- (6) 速度 V を M , m , v_b' を用いて表しなさい。
- (7) 小物体 B が台車の上をすべっていた時間 t を g , μ' , V , M , m を用いて表しなさい。
- (8) 小物体 B が台車の上ですべる間に失われた全力学エネルギー ΔE を M , m , v_b' を用いて表しなさい。
- (9) 小物体 B が台車の上をすべった距離 ℓ を g , μ' , ΔE , m を用いて表しなさい。
- (10) 小物体 B が台車に乗ってからの台車の速度と時間の関係の概略図をグラフ上に描きなさい。ただし、小物体 B が台車に乗った瞬間の時刻を 0、小物体 B が台車の上で停止した時刻を t とする。

[2020 年大分大学, 重問 37 対応]

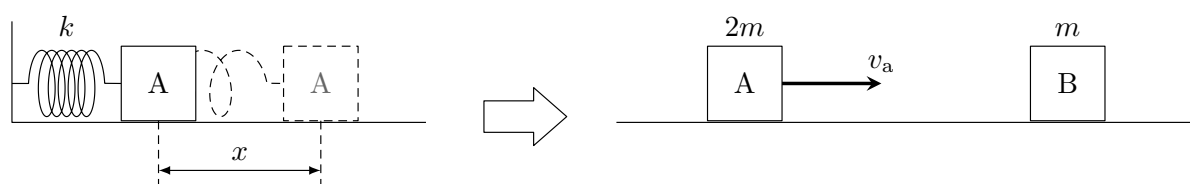


図 1

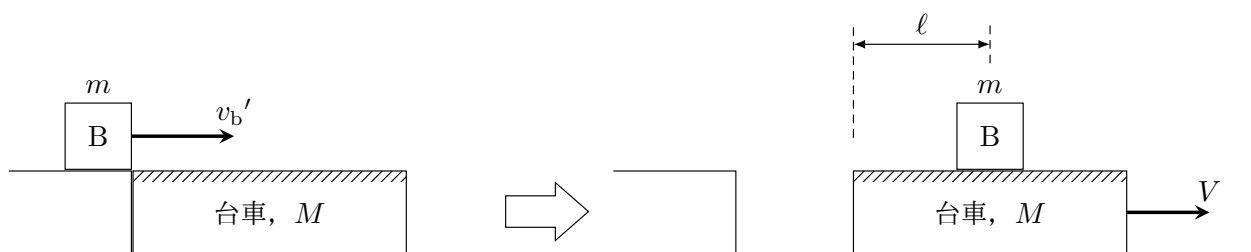


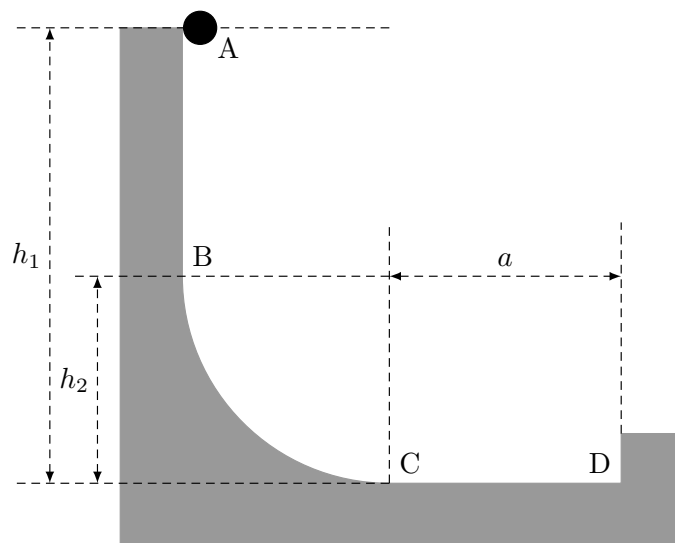
図 2

7. なめらかで水平な床の上に、図のような質量 M [kg] の台が静止している．台上の点 A～D は鉛直な同一平面内にあり，点 A から点 B にかけて鉛直，点 B から点 C にかけてなめらかな曲面が続き，点 C から点 D にかけて水平となっている．点 A, B はそれぞれ曲面の最下点 C より h_1, h_2 [m] の高さであり，CD 間の距離は a [m] である．

点 A で質量 m [kg] の小球を静かにはなした．小球は点 B と点 C を通過して点 D にある鉛直な壁に衝突してはね返り，点 C と点 B を再び通過してある高さの最高点まで到達した．この間，小球は台から離れることなく点 A～D を含む鉛直な同一平面内のみを運動した．小球と台，および台と床の間には摩擦はないものとし，重力加速度の大きさを g [m/s²]，点 D にある壁と小球のはね返り係数を e とする．また，以下で求める小球と台の速さは，床に対する速さとする．

- (1) 小球が最初に点 B を通過するときの小球の速さ v_B [m/s] を g, h_1, h_2 を用いて表せ．
- (2) 小球が最初に点 C を通過するときの小球の速さ v_C [m/s] と台の速さ V_C [m/s] を g, h_1, M, m を用いて表せ．
- (3) 小球が点 C を通過してから点 D に到達するまでの時間 t [s] を g, h_1, M, m, a を用いて表せ．
- (4) 小球が点 D にある壁と衝突した直後の小球の速さ v'_D [m/s] と台の速さ V'_D [m/s] をそれぞれ g, h_1, M, m, e を用いて表せ．
- (5) 小球が曲面を上がり点 B を超えて最高点に達したときの，小球の点 C からの高さ h_3 [m] を g, h_1, M, m, e のうち必要なものを用いて表せ．

[2023 年京都府立大学，重問 41 対応]



没

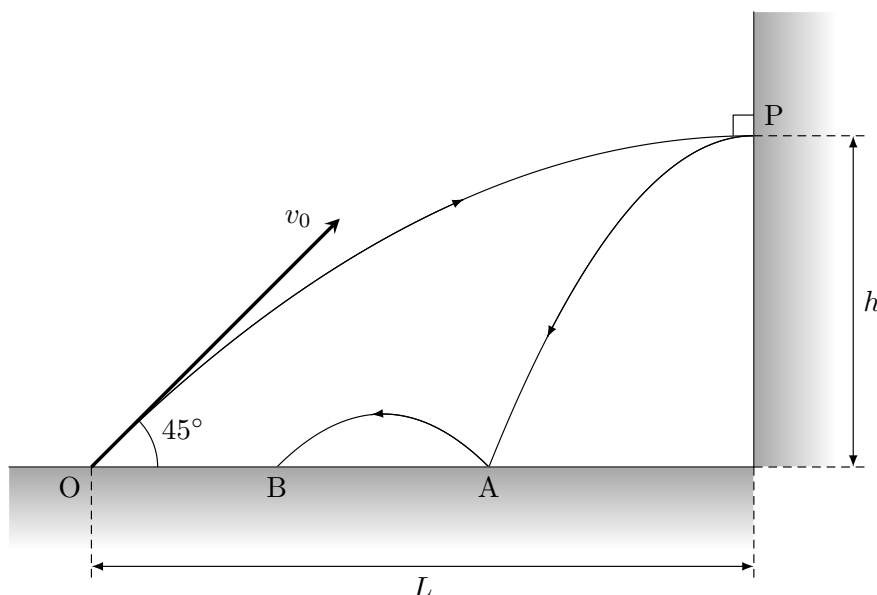
*1 図に示すように、水平な床と、鉛直方向に置かれた壁がある。壁から距離 L 離れた床上の点 O から 45° をなす向きに、小球を大きさ v_0 の初速度で投げた。小球は壁上の点 P (床からの高さ h) で、壁に対して垂直に衝突し、はね返った小球は床上の点 A に落ち、はね返って上昇し、床上の点 B に衝突した。小球の質量は m 、小球の床や壁との間の反発係数は e ($0 < e < 1$)、重力加速度の大きさは g である。なお、床と壁は、なめらかでかたいものとする。

- (1) 床から点 P までの高さ h を、 v_0 , m , g のうち、必要なものを用いて表せ。
- (2) 壁から点 O までの距離 L を、 v_0 , m , g のうち、必要なものを用いて表せ。
- (3) 点 P における衝突前後で小球が失った力学的エネルギーの大きさ E を、 v_0 , m , e , g のうち、必要なものを用いて表せ。
- (4) 点 O と点 B が一致するとき、 e の数値を求めよ。

[2024 年長崎大学, 重問 39 対応]

以下、追加問題。

- (5) (4) のとき、打ち出してから小球のはね返りが収まるまでの時間 T を求めよ。



*1 補講問題 1 と被りすぎていたし、こっちの方が簡単で.... まだ間に合うのなら問題 1 をこちらに差し替えたい気持ちです。

8. 水平面で回転できる回転台があって、回転台水平面上の回転中心を点 O とする。質量 m [kg] で大きさの無視できる物体 A を、回転台上で点 O から ℓ_0 [m] の点 P に置く。

物体と回転台の間の静止摩擦係数を μ 、重力加速度の大きさを g [m/s²] とし、次の問いに答えよ。

- (1) 回転台が回転していないとき、 A にはたらいている力を図によって示せ。
- (2) 回転台を角速度 ω_0 [rad/s] で回転させる。 A が点 P ですべらないで回転台とともに回転しているとき、 A にはたらいている力を、回転台上でともに回転しながら観測するときと、回転台の外で観測するときとで、それぞれどういう力が観測されるか、図によって示せ。
- (3) 前問 (2) の状態から ω を徐々に上げていったら、 $\omega = \omega$ [rad/s] で A が点 P からすべり出した。 μ を ℓ_0 , g , ω_0 を使って表せ。
- (4) 長さ ℓ_0 [m] のつる巻き状のばねがあって、これに A をつるすと長さ ℓ [m] に伸びる。ばねの一端を点 O につけ、他端に A をつけて回転台に置いた。ばねの長さが ℓ [m] に伸びているとき、 A が回転台上をすべらないで回転できる ω の大きさの範囲を答えよ。 μ は 1 より小さく、ばねと回転台の摩擦はないものとし、また、ばねの質量は無視できるものとする。

[年度不明福島県立医科大学，重問 45 対応]

9. 図1のような途中がループしているレールがある。レールの太さは無視できるものとし、ループ BCDE は鉛直面をなす半径 r の円軌道になっている。点 A から初速 0 で出発した質量 m の小球 P の運動を考える。点 A の水平面 GB からの高さを h として、以下の問 1～問 9 に答えなさい。ただし、重力加速度の大きさを g とし、摩擦や空気の抵抗は無視できるものとする。

問 1 最初に点 B を通過するときの小球 P の速さ v_B を g, h を用いて表しなさい。

その後、小球 P はレールに沿って点 C, D, E を通過して運動し、再び、点 B に到達した。以下の問 2～問 4 について、 m, g, h, r のうち必要な記号を用いて答えなさい。

問 2 ループ最高点 D における小球 P の速さ v_D を求めなさい。

問 3 点 D において、小球 P がレールから受ける垂直抗力の大きさ N_D を求めなさい。

問 4 小球 P がレールから離れずループを一周するための h の最小値 h_1 を求めなさい。

次に $h < h_1$ の場合の小球 P の運動を考える。そのとき、図 2 のように小球 P は点 F において、レールから離れ、放物運動を行ったとする。そのとき、FOC のなす角を θ とする ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)。小球 P がレールから離れた後はレールとは衝突せず、そのまま放物運動を続けるものとする。以下の問 5～問 7 について、 g, r, θ のうち必要な記号を用いて答えなさい。

問 5 小球 P が点 C に到達するための h の最小値 h_2 を求めなさい。

問 6 レールから離れる点 F における小球 P の速さ v_F を求めなさい。

問 7 このとき、点 A の高さは $h = h_F$ であった。高さ h_F を求めなさい。ただし、 $h_2 < h_F < h_1$ である。

図 2 において、 $\theta = 30^\circ$ であった。小球 P が点 F を離れた瞬間を時刻 $t = 0$ とし、その後の時刻 t における小球 P の運動について考える。以下の問 8～9 について、 g, r, t のうち必要な記号を用いて答えなさい。

問 8 図 3 のように点 B を原点とし、水平方向を x 軸 (図 3 の右方向を正とする)、鉛直方向を y 軸 (図 3 の上方向を正とする) とする。小球 P が点 F を離れた後の時刻 t における小球 P の x 座標と y 座標を求めなさい。

問 9 $t = T$ において $x = 0$ になった。このときの時刻 T と小球 P の y 座標を求めなさい。

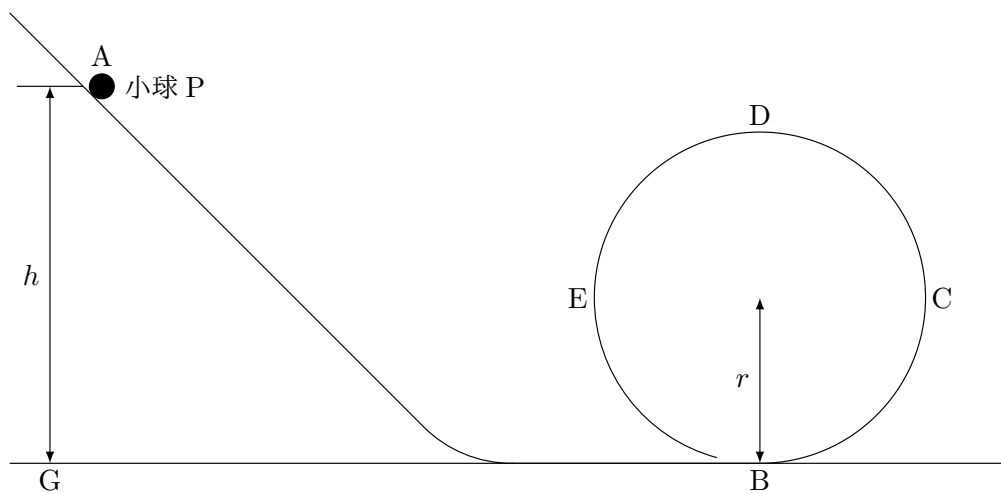


図 1

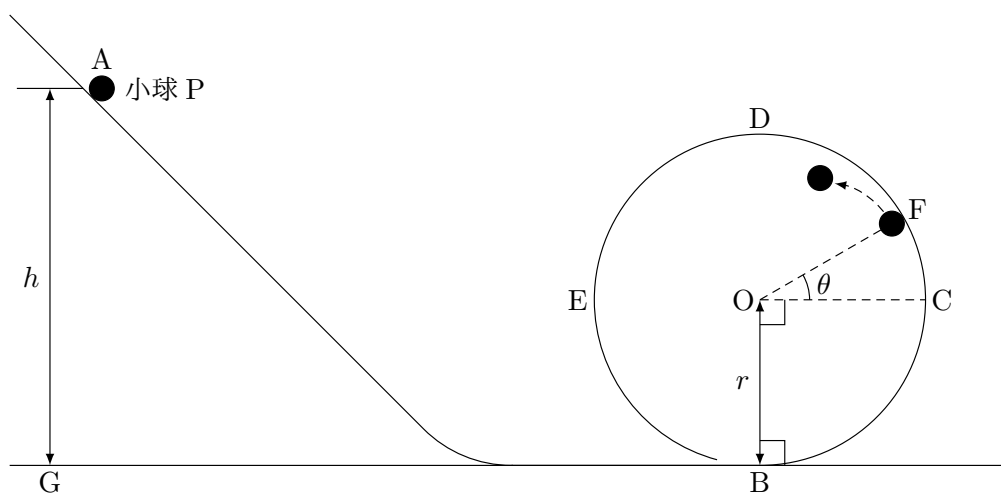


図 2

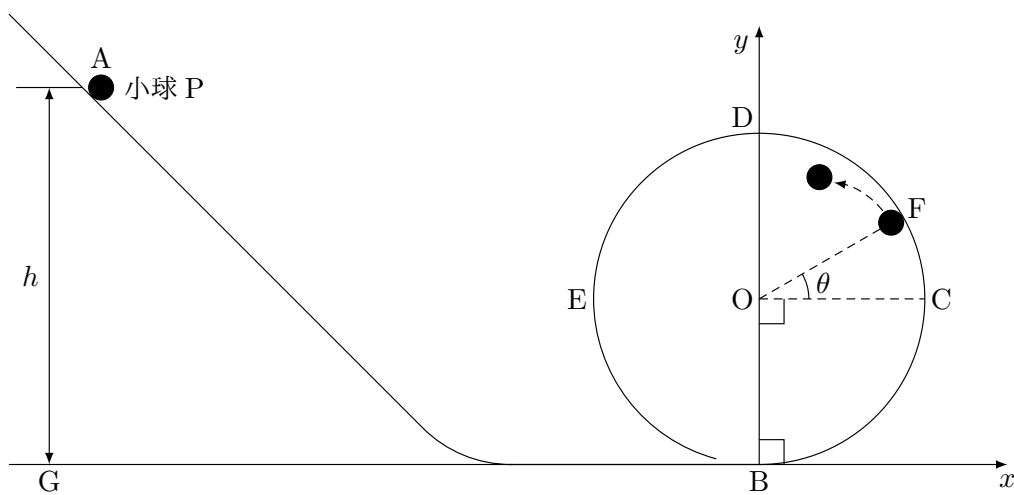


図 3

10. 地上の 1 点から鉛直上方へ質量 m [kg] の小物体を打ち上げる．地球は半径 R [m]，質量 M [kg] の一様な球で，物体は地球から万有引力の法則に従う力を受けるものとする．図を参照して，次の問いに答えよ．ただし，地上での重力加速度の大きさ g [m/s²]，万有引力定数を G [N·m²/kg²] とする．また，地球の自転および公転は無視するものとする．

問 1 地上での重力加速度の大きさ g を R ， M ， G を用いて表せ．

問 2 物体の速度が地球の中心 O から $2R$ の距離にある点 A で 0 になるためには，初速度の大きさ v_0 [m/s] をどれだけにすればよいか， g ， R を用いて表せ．

物体の速度が点 A で 0 になった瞬間，物体に大きさが v [m/s] で OA に垂直な方向の速度を与える．

問 3 物体が地球の中心 O を中心とする等速円運動をするためには， v をどれだけにすればよいか， g ， R を用いて表せ．また，この円運動の周期を g ， R を用いて表せ．

点 A で物体に与える速さ v が問 3 で求めた値からずれると，物体の軌道は，地球の中心を 1 つの焦点とするだ円となる．だ円軌道は v が大きくなるほど大きくなり， v がある値以上になると，物体は無限遠方に飛び去ってしまう．

問 4 物体が AB を長軸とするだ円を描くとき，次の問いに答えよ．ただし，点 B の地球の中心からの距離は $6R$ である．

(1) 点 A における面積速度と点 B における面積速度が等しいことから，点 B における物体の速さ V [m/s] を v を用いて表せ．

(2) 速さ v を g ， R を用いて表せ．

問 5 物体が地球に衝突もせずかつ無限遠方に飛び去ることもなくだ円軌道を描き続けるためには，速さ v はどのような範囲になければならないか，不等式で表せ．

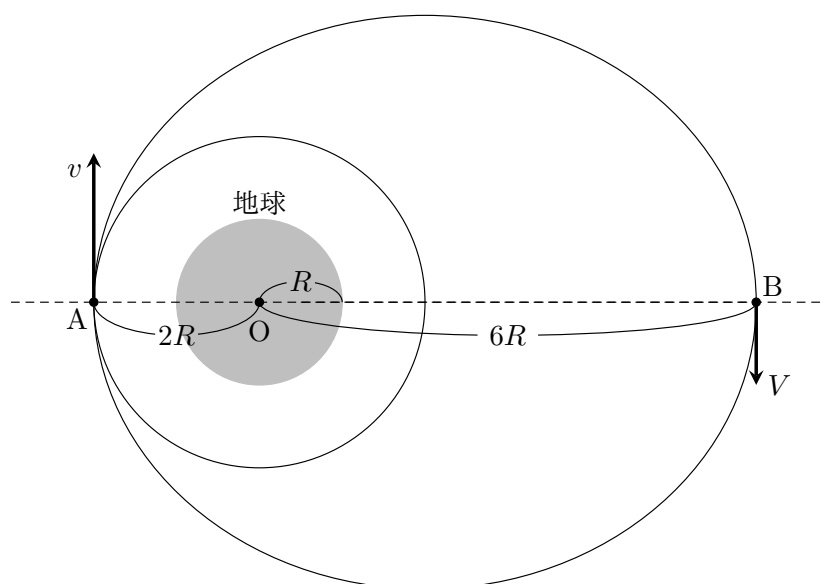
[2002 年大阪市立大学，重問 51 対応]

以下，追加問題．

問 6 問 4 の楕円軌道の周期を，

(1) ケプラー第 3 法則を用いて計算せよ．

(2) 面積速度保存則を用いて計算せよ．



11. 地球（質量 M ）と月（質量 m ）の運動を考える．地球と月との距離を r_0 ，万有引力定数を G とし、次の問いに答えよ．なお、地球と月は、それら以外の天体から力を受けない都市、それぞれの大きさは無視できるものとする．

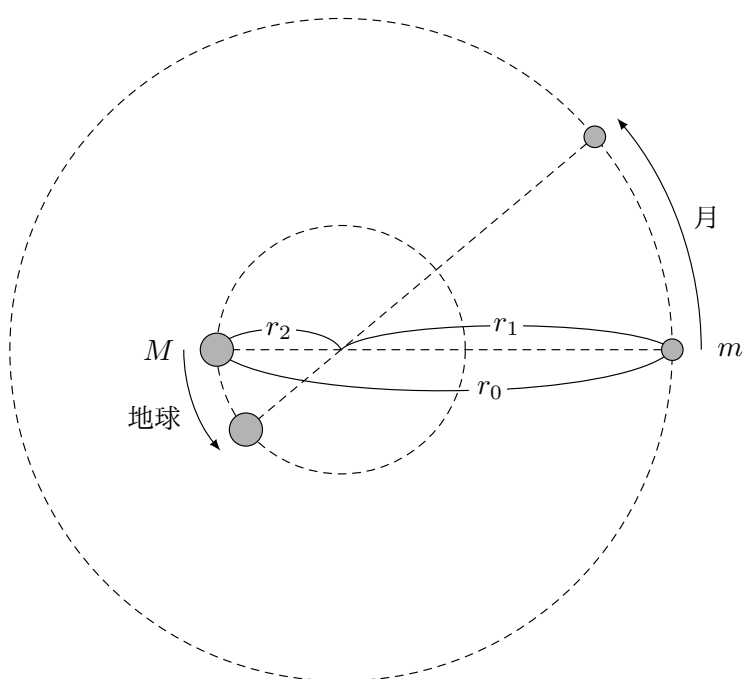
〔A〕 地球は静止しており、月は地球の周りを等速円運動するとして次の問いに答えよ．

- (1) 月が地球から受ける万有引力の大きさを記せ．
- (2) 月の運動の周期を m, M, G, r_0 のうち必要なものを用いて表せ．
- (3) 月の運動エネルギーを m, M, G, r_0 のうち必要なものを用いて表せ．
- (4) 月の力学的エネルギーを m, M, G, r_0 のうち必要なものを用いて表せ．なお、地球の万有引力による月の位置エネルギーの基準を無限遠に選ぶ．
- (5) 何らかの原因で月の力学的エネルギーが減少したとする．月は、依然として等速円運動を行っているとした場合、地球と月の距離について、次の選択肢から正しいものを選び．
 ①大きくなる． ②小さくなる． ③変わらない．
- (6) その場合、月の速さはどのようなになるか、次の選択肢から正しいものを選び．
 ①速くなる． ②遅くなる． ③変わらない．

〔B〕 実際には、図のように地球と月は、地球と月を結ぶ線上のある点 O を中心として、同じ角速度で等速円運動を行っているといなせる．この場合の、 O から月までの距離を r_1 、 O から地球までの距離を r_2 （ただし $r_0 = r_1 + r_2$ ）として以下の問いに答えよ．

- (1) 月の円運動の角速度を ω とし、月の向心力の大きさを m, r_1, r_0, ω のうちから必要なものを用いて表せ．
- (2) 月の受ける万有引力は〔A〕(1)の万有引力と同じであることに注意し、月の角速度を G, M, r_1, r_0 を用いて表せ．
- (3) 地球と月は O を中心にして同じ角速度で等速円運動を行っていることに注意して、 r_1 を M, m, r_0 を用いて表せ．
- (4) 円運動の周期を G, M, m, r_0 を用いて表せ．

〔2012 年関西学院大学，重問 52 対応〕



12. 図のように、水平な粗い床の上に質量 m の物体が置かれている。物体はばね定数 k のばねで壁とつながっている。右向きに x 軸をとり、ばねが自然長のときの物体の位置を原点とする。この物体の運動に関する以下の問いに答えなさい。ただし、重力加速度の大きさを g とする。

物体を原点より右側で静かにはなす実験を行った。物体を位置 $d (> 0)$ より左側ではなすとそのまま静止していたが、右側ではなすと動き出した。

- (1) 物体と床の間の静止摩擦係数 μ を求めなさい。

物体を位置 $x_0 (> d)$ から静かにはなすと、物体は左向きに動き出した。その後、物体の速さは位置 $x_1 (< -d)$ で初めて 0 となった。

- (2) 物体と床の間の動摩擦係数 μ' を求めなさい。
(3) 物体の加速度を a として、左向きに運動している物体の運動方程式を示しなさい。
(4) 物体が x_0 から x_1 に移動するまでにかかった時間 t_1 を求めなさい。
(5) 物体が x_0 から x_1 に移動する間で、物体の速さが最大となるときの位置と速さを求めなさい。

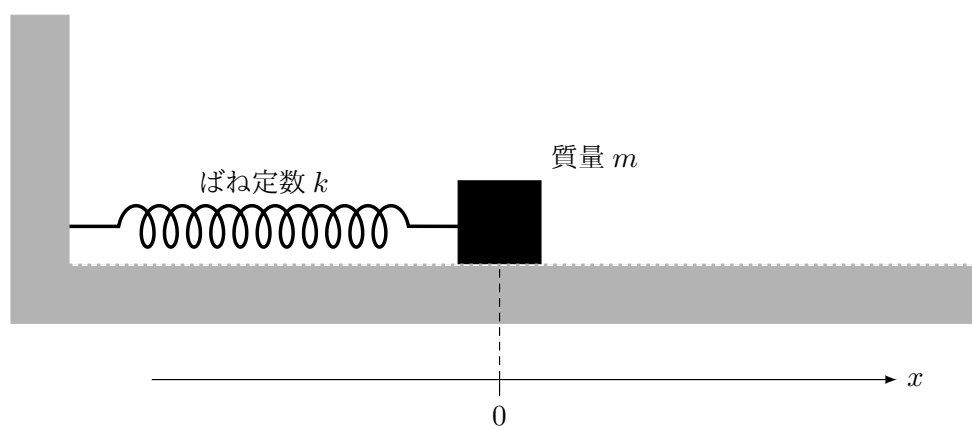
その後、物体は右向きに動き出し、ある位置 ($> d$) で再び速さが 0 となった。

- (6) x_1 から再び速さが 0 となった位置に移動する間で、物体の速さが最大となるときの位置を求めなさい。
(7) 物体の速さが再び 0 となった位置 x_2 を x_0 と x_1 を用いて表しなさい。

ある実験では $x_0 = \frac{7}{2}d$, $x_1 = -\frac{5}{2}d$ だった。この場合、物体は 3 回目に速さが 0 になった位置 x_3 で、そのまま静止し続けた。

- (8) x_3 を求めなさい。
(9) 物体が動きだしてから最終的に静止するまでの物体の位置 x と、時間 t の関係を、横軸に t 、縦軸に x をとったグラフに示しなさい。

[2023 年横浜市立大学, 重問 56 対応]



13. 図 1 のように、なめらかな水平面上に一端が固定されたばね定数 k のばねが置かれている。ばねの他端には質量 m の物体 A がつけられている。はじめ、ばねは自然長になっており、物体 A は静止している。図のように水平方向に x 軸をとり、紙面に向かって右向きを正とする。物体 A のはじめの位置を $x = 0$ とする。

質量 M ($M > m$) の物体 B を、速度 v_0 ($v_0 > 0$) で物体 A に衝突させた。物体 A と物体 B は弾性衝突し、衝突直後、両物体は右方向へ進み、その後、物体 A と物体 B はばねが最も縮んだ後に再衝突を起こした。ばねは弾性力がフックの法則に従う範囲で伸縮し、また、ばねの質量、および物体の大きさは無視できるものとする。

はじめの衝突の瞬間を時刻 $t = 0$ とし、再衝突の起きる時刻を t_1 とする。はじめの衝突から再衝突が起きるまでの間、物体 A は単振動を行った。以下の問いに答えよ。必要であれば、円周率 π を用いよ。

問 1 はじめの衝突直後の物体 A、物体 B の速度をそれぞれ v_A , v_B とする。

(ア) はじめの衝突前後で成り立つ運動量保存の法則を表す式を書け。

(イ) v_A , v_B を、 m , M , v_0 を用いて表せ。また導き方も示せ。

(ウ) はじめの衝突直後の物体 A と物体 B の速度の比 $\frac{v_B}{v_A}$ を、物体 A と物体 B の質量比 $p = \frac{M}{m}$ を用いて表せ。

問 2 ばねが最も縮んだとき、物体 A は、 $x = L$ の位置にあった。 L を v_A , k , m を用いて表せ。また導き方も示せ。

問 3 はじめの衝突から再衝突までの間の任意の時刻 t ($0 \leq t \leq t_1$) における物体 A、物体 B の位置を x_A , x_B とする。

(ア) x_A を v_A , m , M , k , t のうち必要なものを用いて表せ。

(イ) x_B を v_B , m , M , k , t のうち必要なものを用いて表せ。

問 4 ばねが最も縮んだ後、物体 A と物体 B は、 $x = \frac{L}{2}$ の位置で再衝突した。

(ア) この場合の再衝突が起こる時刻 t_1 を、 m , k を用いて表せ。また導き方も示せ。

(イ) この場合の物体 A と物体 B の質量比 $p = \frac{M}{m}$ の値を求めよ。また導き方も示せ。

問 5 問 4 の場合の物体 A、物体 B の速度の時間変化を表すグラフとして正しいものを図 2 の解答群の中から選び、記号で答えよ。ただし、物体 A の速度を実線、物体 B の速度を破線を用いて $0 < t < t_1$ の範囲で示してある。

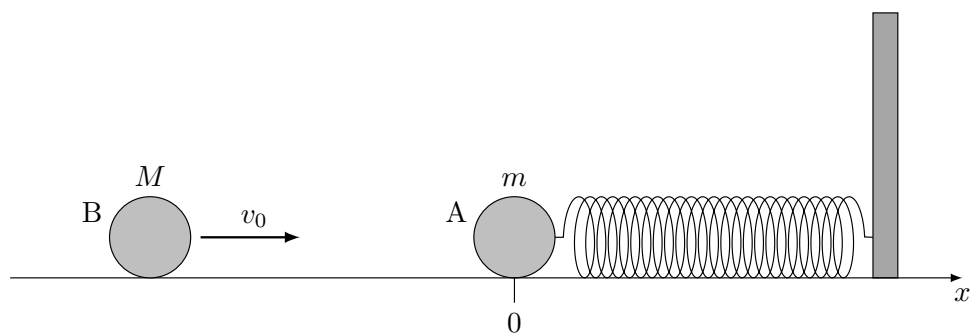
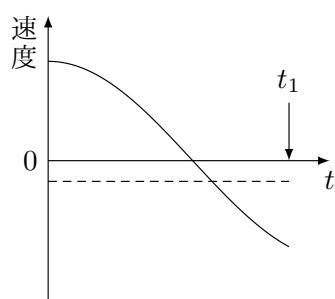
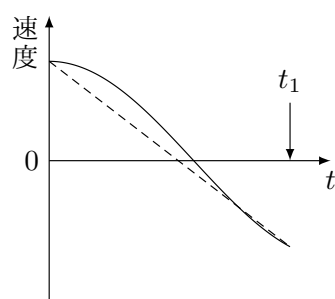


図 1

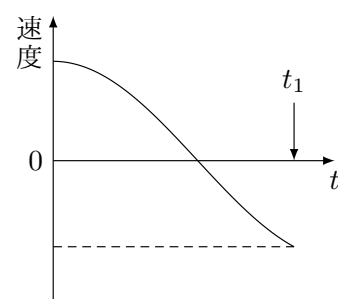
(ア)



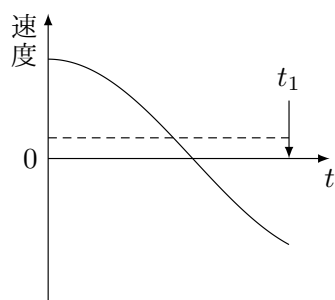
(イ)



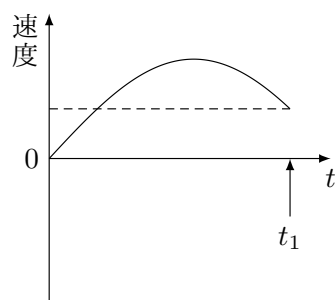
(ウ)



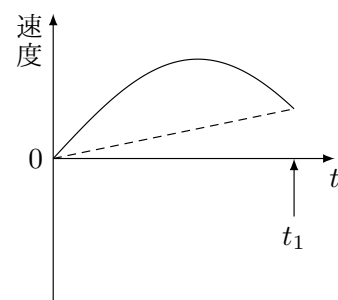
(エ)



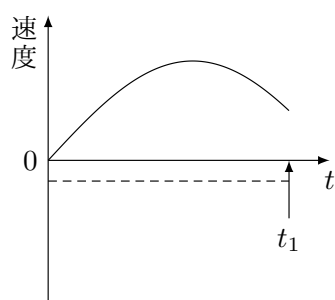
(オ)



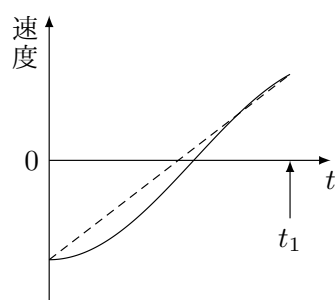
(カ)



(キ)



(ク)



(ケ)

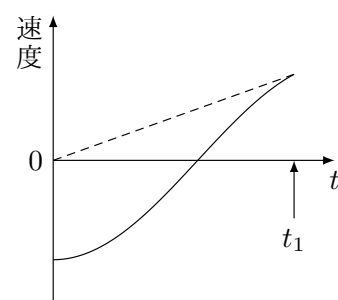


図 2

14. 真空中で、鉛直上向きに直交座標系の z 軸をとる。 x 軸の正の向きに強さ E [N/C] の一様な電場^{*2}がかけられている。この電場中において、質量が m [kg] で正の電荷 q [C] をもつ荷電粒子を考える。重力加速度の大きさを g [m/s²] として、以下の問いに答えよ。

問1 図1のように、 x 軸と y 軸上の原点 O から d [m] の距離にある点を、それぞれ P , Q とする。原点 O の電位を 0 V として、点 P と点 Q の電位をそれぞれ求めよ。

問2 図1に示された円弧 PQ 上にある点を R とする。 OR が x 軸となす角は θ [rad] である。直線 OR に沿って荷電粒子を点 O から点 R まで移動したとき、静電気力がした仕事を求めよ。

問3 荷電粒子を、図1のように円周に沿って点 R から点 P まで移動した。このとき、静電気力がした仕事を求めよ。

問4 z 軸上の高さ h [m] の点 A から、荷電粒子を静かに離した。図2のように、粒子は静電気力と重力を受けて xz 平面内を直線運動し、 x 軸上の点 B を通過した。

- (1) 粒子を離してから点 B に達するまでに要する時間を求めよ。
- (2) OB 間の距離はいくらか。
- (3) 粒子が点 B を通過したときの運動エネルギーを求めよ。

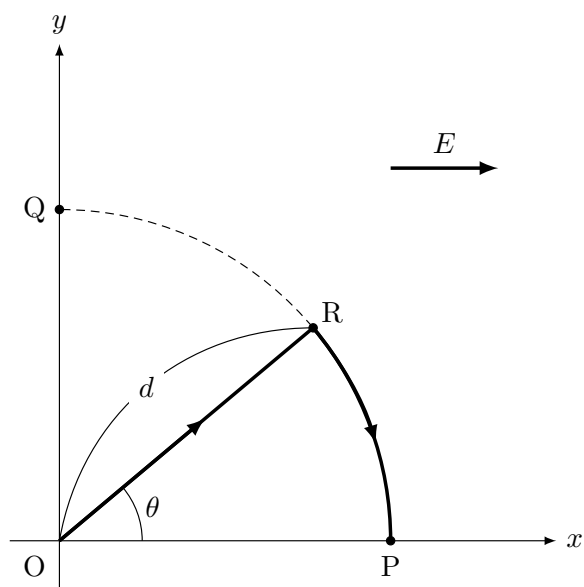
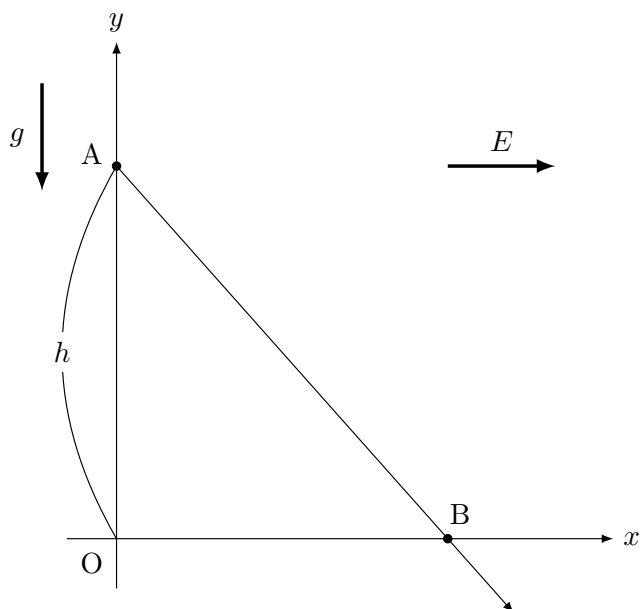
[2008 年静岡大学, 重問 102 対応]

以下、追加問題。

問5 荷電粒子が点 A から点 B へ移動する間にされた仕事 W を求めよ。

問6 荷電粒子が点 O にある場合の系の位置エネルギーを 0 とする。荷電粒子が点 A , 点 B それぞれの点にあるときの位置エネルギー U_A , U_B をそれぞれ求めよ。

^{*2} 原文は「電界」と表現されていましたが、宗教上の都合により「電場」としました。

図1 xy 平面図2 xz 平面

15. 図 1 に示すように、水平面上に直行した x, y 軸をとり、原点を O とする。正電荷 Q の 2 つの点電荷をそれぞれ点 $A(a, 0)$, 点 $B(-a, 0)$ に固定する ($a > 0$)。以下の問いに答えよ。ただし、クーロンの法則の比例定数を k , 無限遠における電位を 0 とする。解答はすべて解答用紙の所定の欄に記入し、問 3 以外は考え方や計算の要点も記入すること

問 1 点 $C(0, b)$ における電場の大きさを a, b, Q, k のうち必要なものを用いて表せ。また、この電場の向きを答えよ。ただし、 $b > 0$ とする。

問 2 点 A と点 B の点電荷による、 x 軸上の電位 $V(x)$ を、 $|x| < a$, $|x| > a$ の場合に分けて x, a, Q, k を用いて表せ。また、 $V(x)$ のグラフの概略を描け。グラフには、原点 O における電位 $V(0)$ の値を記入せよ。

次に、図 1 の水平面内に質量 m , 正電荷 q を持つ質点 P を加える。ただし、質点 P には静電気力のみはたらくものとする。

問 3 問 1 の点 C に質点 P を置いた。質点 P が受ける静電気力の大きさを m, a, b, q, Q, k のうち必要なものを用いて表せ。また、この静電気力の向きを答えよ。

問 4 $b = \frac{3}{4}a$ とする。外力を加えて質点 P を点 $C\left(0, \frac{3}{4}a\right)$ から点 $D\left(-\frac{a}{3}, 0\right)$ まで静かにゆっくり運んだ^{*3}。このときの外力が質点 P にした仕事を m, a, q, Q, k のうち必要なものを用いて表せ。

問 5 点 $D\left(-\frac{a}{3}, 0\right)$ にある質点 P を静かに放したところ、質点 P は x 軸上を動いた。質点 P の速さが最大になる x 軸上の点の座標を求めよ。また、このときの速さを m, a, q, Q, k のうち必要なものを用いて表せ。

[2022 年筑波大学, 重問 103 対応]

^{*3} 「静かに」、「ゆっくり」はともに「力のつりあいを保ちながら」を表す表現。

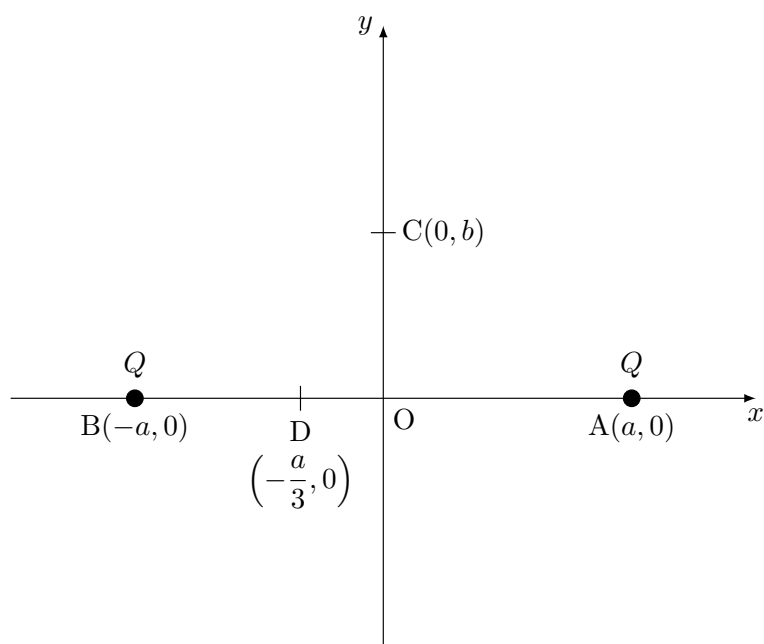


図 1

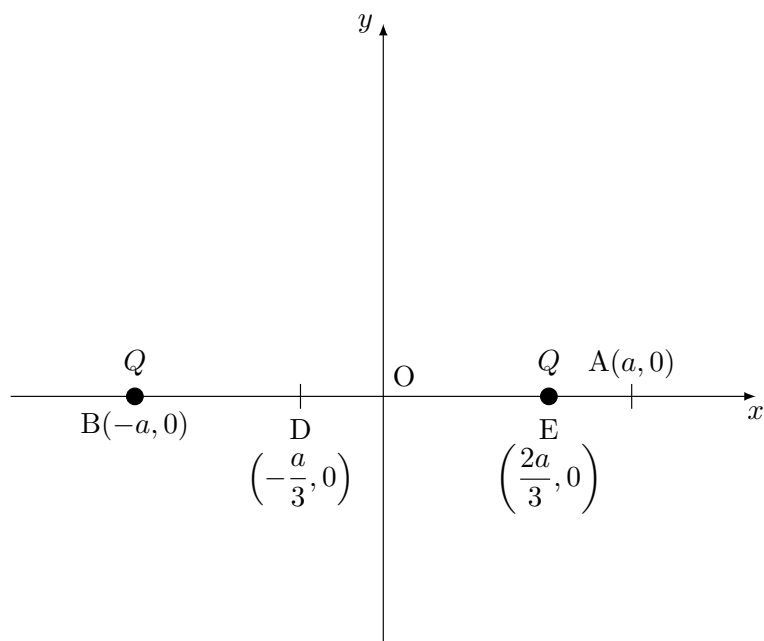


図 2

16. 次の文中の $\boxed{(1)}$ ～ $\boxed{(8)}$ に入れるのに最も適当なものを各問の文末の解答群から選び、その記号をマークしなさい。ただし、同じものを 2 回以上用いてもよい。

ガウスの法則によると、任意の閉曲面を貫く電気力線の密度は電場の強さに等しい。例えば、真空中で点電荷を中心とする半径 r の球面を仮定して考えれば、点電荷から出る電気力線の本数を球の表面積でわった値が球面における電場の強さとなる。そのため、電気量 q ($q > 0$) の点電荷から出る電気力線の本数 n は、真空中でのクーロンの法則の比例定数 k_0 を用いて、 $n = \boxed{(1)}$ とかける。

図 1 のように、真空中に半径 r の金属球 M があり、 Q ($Q > 0$) の電気量を持つように帯電させた。金属球 M の中心 O から距離 x だけ離れた点における電場の強さ E 、電位 V について考える。ただし、電位 V は無限遠方を基準とする。

$x \geq a$ のときは、金属球 M から出る電気力線は金属球 M の中心 O から放射状に広がると考えられるため、電場の強さ E は、 $E = \boxed{(2)}$ とわかる。また、その点の電位 V は、 $V = \boxed{(3)}$ である。

また、 $x < a$ のときは、導体内部の電位は導体表面と等しく、導体内部に電気力線が生じないことから、 $E = \boxed{(4)}$ 、 $V = \boxed{(5)}$ となる。

図 2 のように、内半径 b 、外半径 c の金属球殻 N があり、 $-Q$ の電気量をもつように帯電させた。このとき、金属球殻 N が球殻内部の真空の空間につくる電場は、内部に発生する電気力線の様子を考えると 0 である。

次に、図 3 のように、真空中で、金属球殻 N で金属球 M を囲い、金属球殻 N の中心 O' が金属球 M の中心 O に一致するように配置した。ただし、 $a < b < c$ であり、金属球 M の電気量は Q 、金属球殻 N の電気量は $-Q$ のままであるとする。このとき、中心 O から距離 x ($a < x < b$) だけ離れた点における電場の強さ E' は、金属球 M、金属球殻 N がそれぞれ単独でつくる電場を足しあわせた合成電場の強さであるので、 $E' = \boxed{(6)}$ である。また、金属球殻 N に対する金属球 M の電位 V_{NM} は、金属球殻 N の内部には電気力線は生じないので $V_{NM} = \boxed{(7)}$ である。

金属球 M と金属球殻 N は、電位差 V_{NM} を与えれば Q の電気量が蓄えられるコンデンサーとみなすことができる。このコンデンサーの電気容量 C は、 $C = \boxed{(8)}$ である。

[2020 年関西大学後期日程、重問 105 対応]

以下、追加問題。 $\boxed{(9)}$ ～ $\boxed{(11)}$ に適切な数式または数値を入れよ。ただし、数式は k_0 , a , b , c , Q のうち必要なものを用いて答えよ。

適当な操作によって金属球 M の帯電量を Q から $2Q$ としたとき、金属球殻 N の内側表面には $\boxed{(9)}$ の電気量が、外側表面には $\boxed{(10)}$ の電気量が分布する。

また、金属球 M 単体でもコンデンサーとみなすことができる。この場合、金属球 M と無限遠の導体で対をなしてコンデンサーを形成し、このコンデンサーの電気容量 C は、 $C = \boxed{(11)}$ となる。

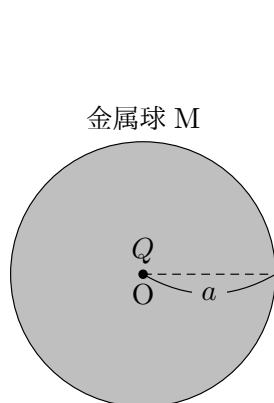


図 1

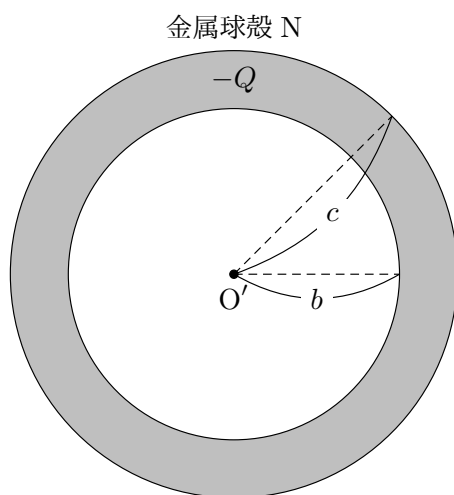


図 2

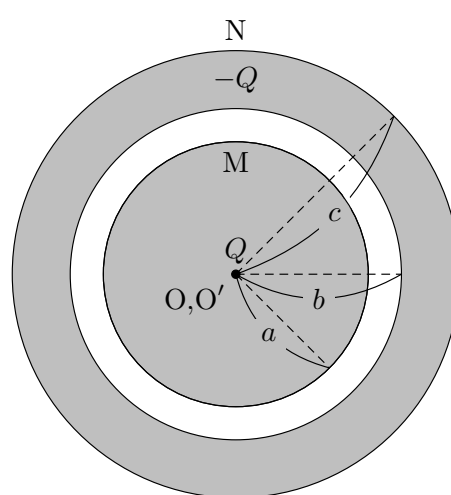


図 3

〔解答群〕

(ア) 0

(イ) $4\pi^2 k_0 q$

(ウ) $\frac{k_0 Q}{a}$

(エ) $\frac{k_0 Q}{(a-x)^2}$

(オ) $k_0 Q \left(\frac{1}{b^2 - a^2} \right)$

(カ) $\frac{ab}{k_0(a-b)}$

(キ) $\frac{b^2 - a^2}{k_0 a^2 b^2}$

(ク) $k_0 q$

(ケ) $\frac{k_0 Q}{x}$

(コ) $\frac{k_0 Q}{a^2}$

(サ) $k_0 Q \left(\frac{1}{b-a} \right)$

(シ) $k_0 Q \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$

(ス) $\frac{k_0(b-a)}{ab}$

(セ) $\frac{a^2 b^2}{k_0(b^2 - a^2)}$

(ソ) $4\pi k_0 q$

(タ) $\frac{k_0 Q}{x^2}$

(チ) $\frac{k_0 Q}{a-x}$

(ツ) $k_0 Q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

(テ) $\frac{b-a}{k_0 ab}$

(ト) $\frac{k_0 ab}{b-a}$

(ナ) $\frac{k_0 a^2 b^2}{b^2 - a^2}$

17. 真空中で図 1 のように、2 枚の薄い金属板 A, B を間隔 d [m] はなして配置した平行平板コンデンサーの炉油単に起電力 V [V] の電池とスイッチ S がつないである。 d は金属板の大きさに対して十分に小さく、金属板の周辺部分の電場の不均一さは無視できるとする。金属板 A は接地しており、その電位は 0 V に保たれている。図 1 のように金属板 A の位置を原点 O として金属板に垂直な方向に x 軸をとる。このコンデンサーの電気容量は C [F] である。次の問いに答えよ。

スイッチ S を閉じて十分に時間をおいた。

- (1) このコンデンサーに蓄えられている静電エネルギーを答えよ。
- (2) 金属板 A, B 間の座標 x における電位を図 2 に描け。
- (3) 金属板 A, B 間の座標 x における電場の強さを図 3 に描け。

次にコンデンサーを完全に放電した。そして、スイッチ S を開いた状態で図 4 のように金属板 A, B の間に厚さ $\frac{d}{2}$ [m] の金属板を A, B それぞれからの距離が等しくなるように挿入した。その後、スイッチ S を閉じて十分に時間をおいた。

- (4) このコンデンサーに蓄えられている電気量を答えよ。
- (5) 金属板 A, B 間の座標 x における電位を図 2 に描け。
- (6) 金属板 A, B 間の座標 x における電場の強さを図 3 に描け。

再びコンデンサーを完全に放電した。そして、スイッチ S を開いた状態で図 5 のように金属板 A, B の間に比誘電率が 2 で、厚さが $\frac{d}{2}$ [m] の誘電体を A, B それぞれからの距離が等しくなるように挿入した。その後、スイッチ S を閉じて十分に時間をおいた。

- (7) このコンデンサーに蓄えられている電気量を答えよ。
- (8) 金属板 A, B 間の座標 x における電位を図 2 に描け。
- (9) 金属板 A, B 間の座標 x における電場の強さを図 3 に描け。

続いてスイッチ S を開いた後に、金属板 A, B 間の距離を保ったまま誘電体を取り除いた。

- (10) 誘電体を取り除くために要した仕事を求めよ。

その後、図 6 のように金属板 A, B の間隔を $\frac{3}{2}d$ [m] に広げて十分に時間をおいた。

- (11) このときの金属板 A, B 間の電位差を答えよ。

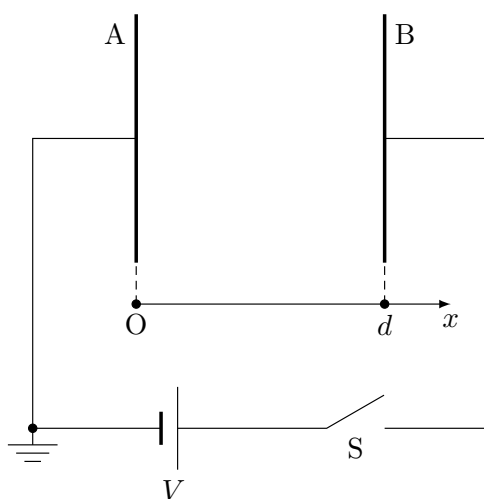


図 1

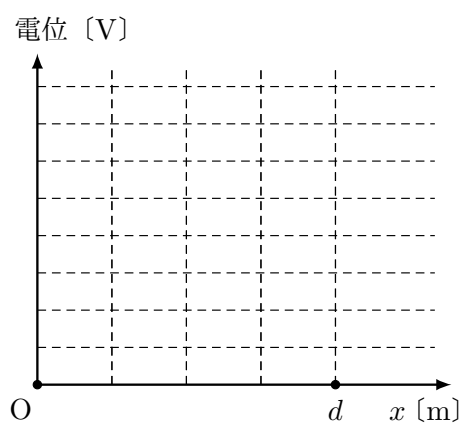


図 2

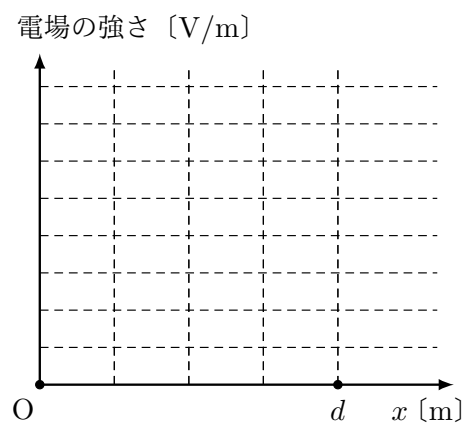


図 3

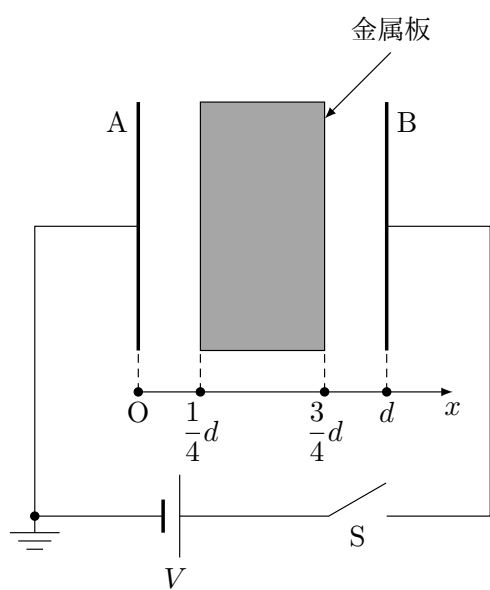


図 4

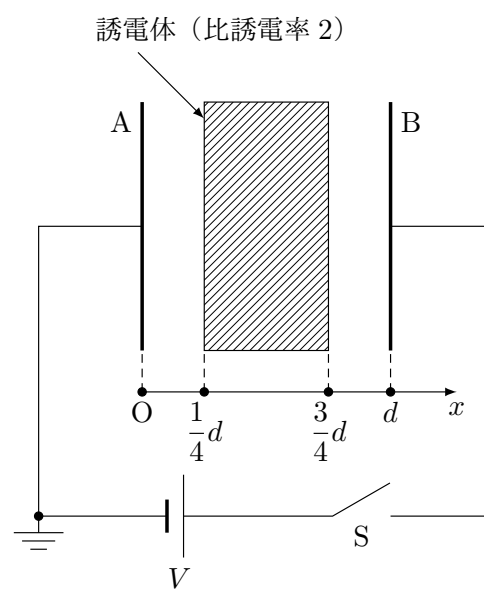


図 5

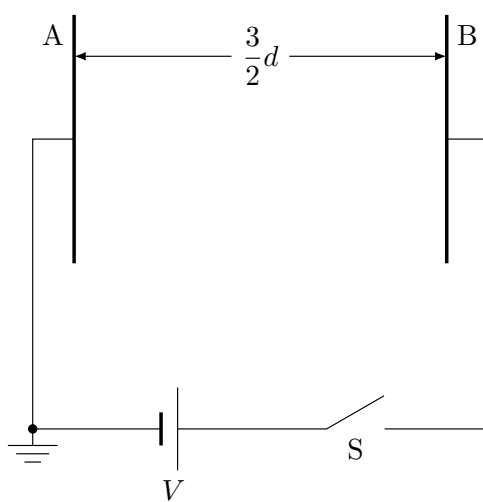


図 6

18. 図のように、電圧 V_0 [V], $2V_0$ [V] の電池 E_1 , E_2 , 電気容量がいずれも C [F] のコンデンサー C_1 , C_2 , 抵抗値 R [Ω] の抵抗 R , スイッチ S_1 , S_2 が接続されている．最初、スイッチ S_1 , S_2 は開いていて、 C_1 , C_2 には電荷は蓄えられていないものとする．また、電池の内部抵抗は無視できるものとする．次の問いに答えよ．

問 1 まず、 S_1 を閉じた．その直後、 R に流れる電流を求めよ．

問 2 S_1 を閉じてから十分に時間が経過した．この簡易電池 E_1 がした仕事を求めよ．

問 3 次に、 S_1 を開き S_2 を閉じた．十分に時間が経過した後の C_2 の両端の電位差を求めよ．また、この間に電池 E_2 がした仕事を求めよ．

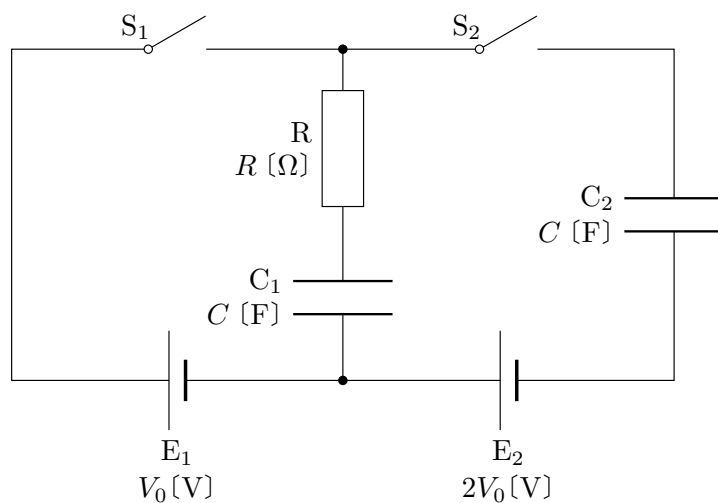
問 4 続いて、 S_2 を開き、 S_1 を閉じた．十分に時間が経過した後、 S_1 を開き S_2 を閉じた．さらに十分時間が経過した後の C_2 の両端の電位差を求めよ．

問 5 この後、問 4 の操作を繰り返すと、 C_2 の両端の電位差はある有限な値に近づく．その値を求めよ．

[2017 年大阪市立大学後期日程，重問 112 対応]

以下，追加問題．

問 6 1 回目に S_1 を閉じた瞬間を $t = 0$ とする． R に流れる電流 I を時刻 t の関数として表せ．



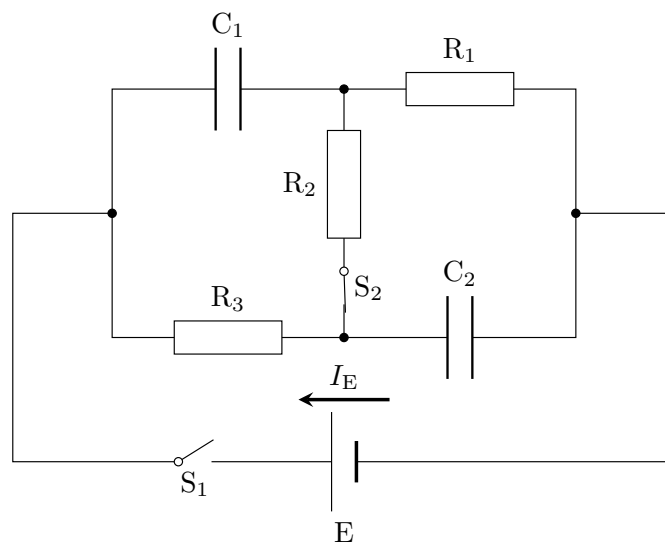
19. 図において、 R_1 , R_2 , R_3 はそれぞれ抵抗値が 3.0Ω , 2.0Ω , 1.0Ω の抵抗, C_1 , C_2 は静電容量がともに $1.0 \times 10^{-6}\text{F}$ のコンデンサー, E は起電力が 1.2V の直流電源である. はじめ, スイッチ S_1 は開いており, スイッチ S_2 は閉じている. 導線の抵抗, 直流電源の内部抵抗は無視できるとして, 以下の問いに答えよ.

- (問 1) S_1 を閉じた瞬間に直流電源 E に流れる電流 I_E [A] を求めよ.
 (問 2) S_1 を閉じて十分に時間が経過した後の I_E を求めよ.
 (問 3) このとき, C_1 , C_2 に蓄えられるそれぞれの電気量 Q_1 [C], Q_2 [C] を求めよ.
 (問 4) S_1 を閉じた瞬間から, 十分時間が経過するまで I_E の時間変化を表すグラフを解答用紙に描け.

次に, S_1 と S_2 を同時に開く.

- (問 5) 十分に時間が経過した後, C_1 , C_2 に蓄えられるそれぞれの電気量 Q'_1 [C], Q'_2 [C] を求めよ.
 (問 6) 抵抗で失われた全ジュール熱 J [J] を求めよ.

[2022 年熊本大学, 重問 119 対応]



20. 図1のように中空で半円状の電極を、距離 d の間隔をあけて2つ並べて水平面上に設置する。距離 d に比べて電極の半径は十分に大きいとする。図1を真上から見た図2において、左側の電極 D_L の電位は常に0に保ち、右側の電極 D_R の電位は一定値に保つ。電極 D_L と電極 D_R それぞれに磁束密度 B (B は正の値) の一様な磁場が図2の紙面の裏から表の向きにかかっている。電極以外の場所の磁束密度は0である。電極の内部は空洞になっており、電極の周囲および電極の空洞内は真空に保たれている。電極 D_L と D_R の空洞内の電位はそれぞれの電極の電位と同じ一定値になっているとする。また、重力は無視できるとし、以下の問いに答えよ。円周率は π を使うこと。

- [1] 電極 D_R の電位が $-V$ (V は正の値) のとき、電極 D_L の空洞の右端に正の電荷 q をもつ粒子 P を静かに置くと、粒子 P は電極 D_R に向かって加速され、電極 D_R の空洞入口の面に対して垂直に入って円運動する。粒子 P の質量は m とし、大きさは無視できるとする。

問1 粒子 P が電極 D_R の左端入口に到達したとき、粒子 P の速さ v を、 d, q, V, B, m のうちから必要なものを用いて表せ。

問2 粒子 P が電極 D_R の空洞中を運動しているときに、粒子 P にはたらく力の名称を答えよ。

問3 粒子 P が電極 D_R の空洞中を運動しているときに、粒子 P にはたらく力の大きさ F を、 v, q, B を用いて表せ。

問4 粒子 P が電極 D_R の空洞中を円運動するときの半径 r を、 v, q, B, m を用いて表せ。

問5 粒子 P が電極 D_R の空洞に入ったあと、半周して電極 D_R の空洞から出るまでの時間 t を、 q, B, m を用いて表せ。

- [2] 粒子 P は電極 D_R の空洞中を図2のように半円状の軌道を描いて運動する。粒子 P が電極 D_R の空洞内を進んで空洞から出たときに電極 D_R の電位を $-V$ から $+V$ に変化させる。その後、粒子 P は電極電極 D_L に入って電極 D_L の空洞中を円運動する。粒子 P が電極電極 D_L の空洞を出たときに電極 D_R の電位をふたたび $-V$ にする。

問6 粒子 P がこのようにして1周して電極 D_R の空洞にふたたび入ったとき、粒子 P の速さ v_1 を、 q, V, m を用いて表せ。

問7 このふたたび入った粒子 P が D_R の空洞内を円運動するときの半径 r_1 を、 v_1, q, B, m を用いて表せ。

問8 上記の操作を繰り返すことで、粒子 P は2つの電極空洞内をそれぞれ半円状に運動することを繰り返す。これまでの問題解答からわかることについて述べた次の①～⑤の文章のうち、正しいものをすべて選んで番号で答えよ。

- ① 粒子 P は、電極 D_R と D_L の間を通過するときに加速されて運動エネルギーが大きくなる。

- ② 粒子 P が電極 D_R の空洞中を通過するのにかかる時間は、粒子 P が速くなるに従って短くなる。
- ③ 粒子 P は、電極 D_R の空洞中を通過する間に運動エネルギーが大きくなる。
- ④ D_R の空洞中を通過する粒子 P の円運動の半径は 1 周するごとに大きくなる。
- ⑤ 上記①～④に正しいものはない。

[2024 年徳島大学, 重問 129 対応]

以下, 追加問題.

- [3] 粒子 P が n 回目に電極 D_R を半周しているときの粒子 P の速さを u_n , 粒子 P が空洞内から飛び出し n 回目に電極 D_L を半周しているとき速さを u_{n+1} と記す. $u_1 = v$ である (v は問 1 の v の値).

問 9 u_n の一般項を, q, V, m, n を用いて表せ.

- 問 10 粒子 P をこのように加速させるためには, 粒子 P が電極 D_R の空洞内を進んで空洞から出たときに電極 D_R の電位が $-V$ から $+V$ に, 粒子 P が電極 D_L の空洞内を進んで空洞から出たときに電極 D_R の電位が $+V$ から $-V$ に変化すればよい. この一連の電位変化の周期 T として許される値を, q, B, V, m , および 1 以上の自然数 N を用いて表せ.

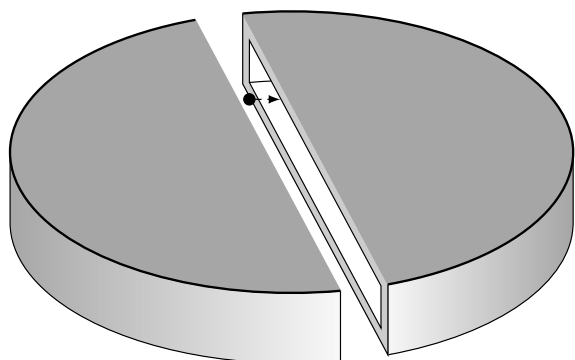


図 1

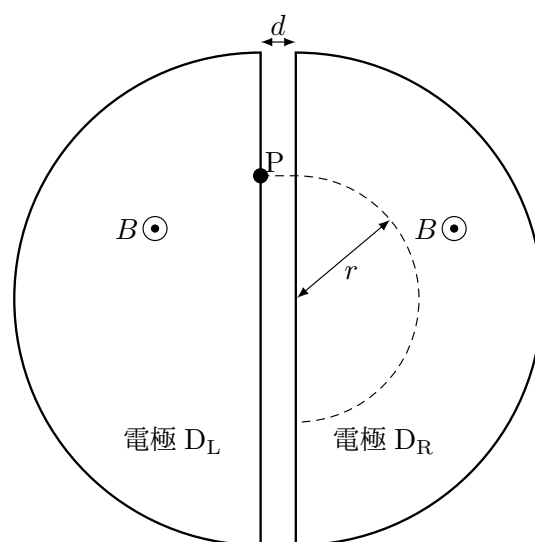


図 2

21. 図 1 のように、交流電源、コイル、コンデンサー、抵抗からなる回路について考える．交流電源の交流電圧の最大値を V_0 [V]，角振動数を ω [rad/s]，コンデンサーの電気容量を C [F]，コイルの自己インダクタンスを L [H]，抵抗を R [Ω]，円周率を π とする．電流は図 1 の矢印向きを正とする．また時刻 t [s] において交流電源の電圧 V [V] は $V = V_0 \sin \omega t$ ，交流電源から流れる電流は I [A] であるとする．コイル，コンデンサー，抵抗に流れる電流をそれぞれ I_L [A]， I_C [A]， I_R [A] とし，その最大値をそれぞれ I_{L0} [A]， I_{C0} [A]， I_{R0} [A] とする．十分な時間が経過しているとして，以下の問いに答えよ．なお，「角振動数」は「角周波数」と同じ意味である．「交流インピーダンス」とは「交流回路のインピーダンス」のことである．

問 1 電流の最大値 I_{L0} ， I_{C0} ， I_{R0} をそれぞれ V_0 ， ω ， C ， L ， R の中から必要なものを用いて表せ．

問 2 時刻 t において，流れる電流 I_L ， I_C ， I_R をそれぞれ I_{L0} ， I_{C0} ， I_{R0} ， ω ， t の中から必要なものを用いて表せ．

問 3 電流 I を I_L ， I_C ， I_R を用いて表せ．

問 4 θ [rad] を電圧 V の位相に対する電流の位相の遅れとして， I を V_0 ， ω ， C ， L ， R ， t ， θ を用いて表せ．また， $\tan \theta$ を ω ， C ， L ， R を用いて表せ．以下の三角関数の公式を用いてもよい．

$$a \sin x - b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x - \theta)$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

問 5 図 1 の回路内の，コイル，コンデンサー，抵抗からなる並列回路の交流インピーダンス Z [Ω] を ω ， C ， L ， R を用いて表せ．

以上の結果から，図 1 の回路における交流インピーダンス Z は， $\frac{1}{\omega_0 L} - \omega_0 C = 0$ を満たす角振動数 ω_0 [rad/s] のとき，最大値となる．このときの周波数 f_0 [Hz] = $\frac{\omega_0}{2\pi}$ を共振周波数と呼び，ラジオの回路の一部として用いて，特定の放送局の周波数と回路の共振周波数を一致させることにより，その放送局からの電波を選択して受信できるようになる．

[2020 年福井大学（問 6 以降削除），重問 144 対応]

以下追加問題．

問 6 交流電源，コイル，コンデンサー，抵抗を直列に繋いだ図 2 のような回路を考える．回路を流れる電流 I は， $I = I_0 \sin(\omega t - \theta)$ のように書ける． I_0 を， V_0 ， ω ， C ， L ， R を用いて表せ．また， $\tan \theta$ を ω ， C ， L ， R を用いて表せ．

問 7 図 2 の回路における平均消費電力 P を， I_0 ， V_0 ， θ を用いて表せ．

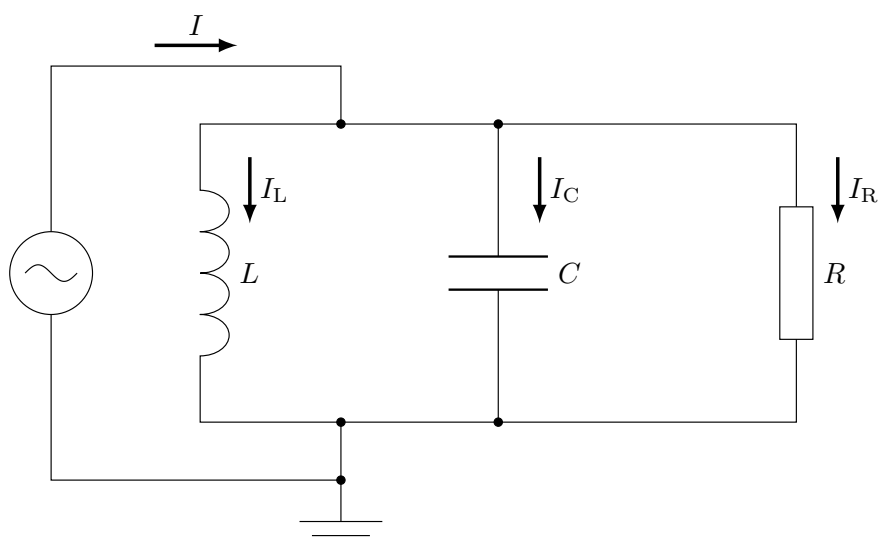


図 1

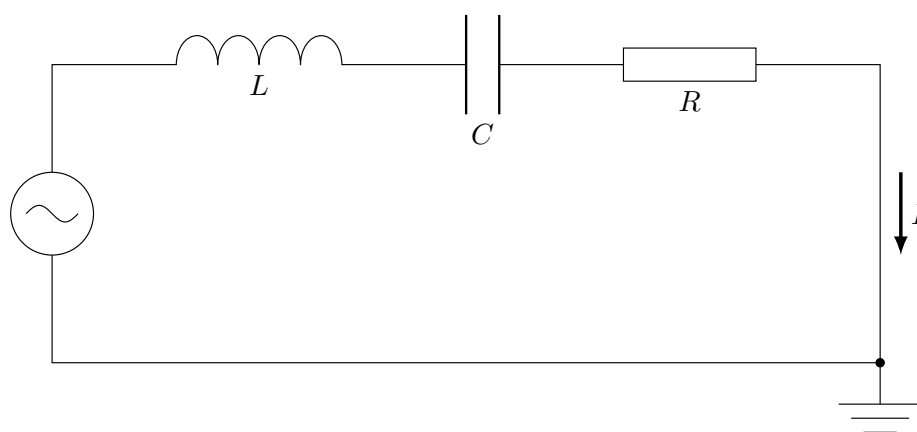


図 2

22. 図のように、鉛直下向き（紙面の表から裏向き）に一様な大きさ B の磁束密度の磁場（磁界）の中に、十分に長く抵抗の無視できる 2 本の導体レール C, D が水平面上に間隔 L で平行に配置されている。導体レール C, D は、抵抗値 r の内部抵抗をもつ起電力 E の電池とスイッチ S を通じて接続されている。2 本の導体レールには、抵抗値 R_1 、質量 M の棒 1 と、抵抗値 R_2 、質量 M の棒 2 が置かれている。棒 1 と棒 2 は、2 本の導体レールと垂直に保ちながら導体レールから外れることなく、なめらかに動くことができる。図のように導体レールと平行に x 軸をとる。また、回路に流れる電流が作る磁場は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。

[A] スイッチ S を開いた状態を考える。棒 2 を固定し、棒 1 に外力を加えて、 x 軸の正の向きに一定の速さ u で動かすものとする。

- (1) 時間 Δt の間に棒 1 が横切る磁束を答えよ。
- (2) 棒 1 に生じる誘導起電力の大きさ V を答えよ。
- (3) 棒 1 を流れる電流の大きさを、 B, L, R_1, R_2, V のうち必要なものを用いて答えよ。
- (4) 棒 1 に加えた外力の大きさと、その外力が単位時間当たりに行う仕事 W を、 B, L, R_1, R_2, V, M の中から必要なものを用いてそれぞれ答えよ。
- (5) 棒 1 と棒 2 のそれぞれで消費される電力を、 P_1, P_2 とする。 P_2 を、 B, L, R_1, R_2, V, M のうち必要なものを用いて答えよ。また、問 (4) で求めた W を、 B, L, M, P_1, P_2 のうち必要なものを用いて答えよ。

[B] スイッチ S を閉じた状態を考える。ただし、各棒の抵抗値 R_1, R_2 と電池の内部抵抗値 r の間には、 $R_1 = R_2 = 2r$ の関係があるものとする。

- (1) 棒 1 と棒 2 をともに固定するとき、棒 1 に流れる電流の大きさを、 B, L, E, r のうち必要なものを用いて答えよ。

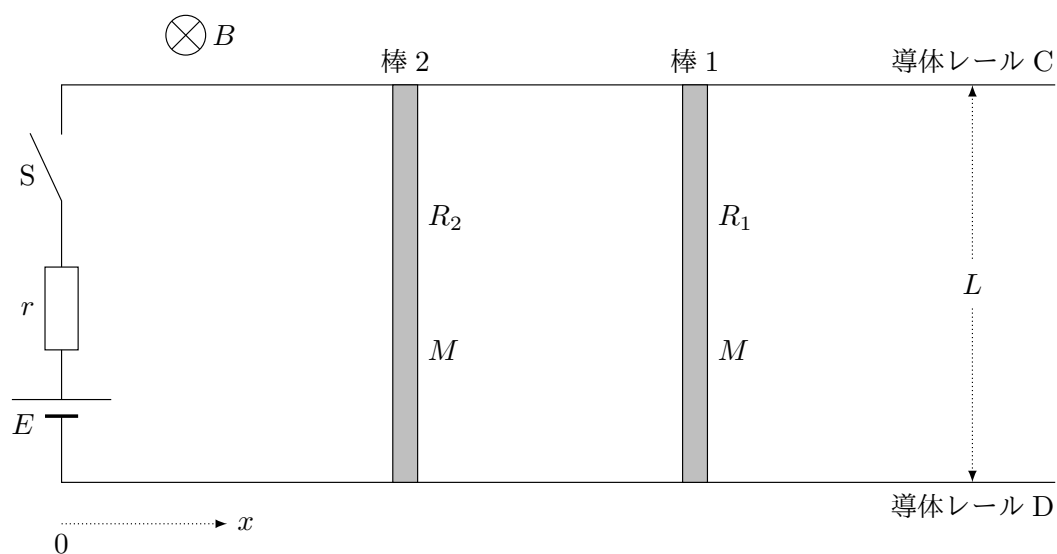
次に、スイッチ S を一旦開いてから、棒 1 と棒 2 を静止させた後、棒 2 のみを固定し、棒 1 を自由に動けるようにした。その後、再びスイッチ S を閉じると、棒 1 は動き出し、徐々に加速しながら、十分時間が経過した後、一定の速さに達した。

- (2) スイッチ S を閉じた直後、棒 1 に生じる加速度を、 B, L, E, r, M のうち必要なものを用いて答えよ。
- (3) 棒 1 が徐々に加速し、速さが v になった瞬間に棒 1 と棒 2 に流れる電流の大きさを、 B, L, E, r, M, v のうち必要なものを用いてそれぞれ答えよ。
- (4) 棒 1 が一定に速さが達したとき、この速さを、 B, L, E, r, M のうち必要なものを用いて答えよ。

再びスイッチ S を開き，棒 1 と棒 2 を静止させた後，ともに自由に動けるようにした．その後，スイッチ S を閉じて，十分に時間が経過すると，棒 1，棒 2 はそれぞれ一定の速さ v_1, v_2 に達した．

(5) 一定の速さ v_1, v_2 を， B, L, E, r, M のうち必要なものを用いてそれぞれ答えよ．

[2024 年関西学院大学，重問 132 対応]



23. 以下の文章中の空欄 1～6 にあてはまる最も適当な文字式や語句を解答群から 1 つずつ選び解答用紙にマークせよ.

図のように、水平な台の上に半径 r の金属円筒の管を置き、質量が M で円柱型のネオジム磁石 A を、 N 極側の面（円柱の底面）を下にして管内で水平に保ち、静かに放した。管の中心軸を z にとり、鉛直下向きを z 軸正の向きとする。以下では A は面を水平に保ったまま落下するものとする。その間、空気による抵抗は無視でき、 A は管の側面に当たることはないとする。また、重力加速度の大きさを g とする。

A が落下しているとき、管を z 軸を中心軸にもつコイルの集まりとみなし、 A の下方にある 1 つのコイル C （図の斜線部分）を貫く A に依る磁束の時間変化を考える。レンツの法則より、 C には図中の上から見て 1 に誘導電流が流れる。その誘導電流の大きさを I とする。図のように、 A から出る磁束線が、管の C の部分（金属円筒の側面の一部）を貫く位置での磁束密度の大きさを B 、向きを z 軸の正の向きとなす角 θ で表すと、コイル C の各部分が A による磁場（磁界）から受ける力の合力の向きは z 軸の 2 の向きである。また、その合力の大きさ f は、 C の演習に沿った 1 周りの長さを流れる大きさ I の電流が磁場から受ける力の大きさに等しく、円周率を π として、 $f = \text{3} \cdot 2\pi r$ である。同様に、管の A より上方にある部分が A による磁場から受ける力の向きは、 z 軸の 4 の向きである。一方 A は、管全体が A による磁場から受ける力の反作用として、管全体から力を受ける。その大きさを F ($F \geq 0$) とすると、 A の z 軸方向の運動方程式は、加速度を a として、

$$Ma = \text{5} \quad \text{①}$$

で与えられる。

F は、 A が落下し始めた直後は 0 であるが、 A の落下の速さ v によって変化する。やがて v が一定になったところで F も一定になる。このときの F の一定値 F_0 は①より、 $F_0 = \text{6}$ である。

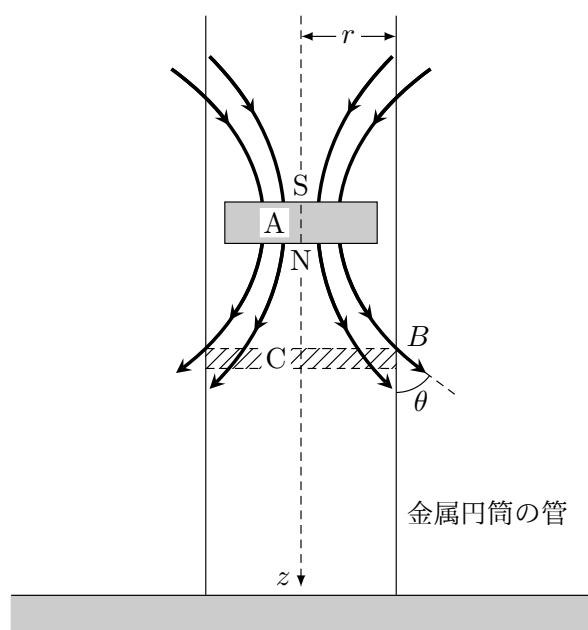
[2018 年千葉工業大学（第 3 問 b）、重問 131 対応]

以下追加問題。以下の文章中の空欄にあてはまる数式を解答せよ。ただし、 F_0 を用いてはならない。

A の落下する速さ v が一定になったとき、金属パイプで生じる単位時間当たりのジュール熱は 7 である。

解答群

- | | | | |
|---|---------------------------------|---|--------------------------|
| 1 | ア 時計回り | イ 反時計回り | |
| 2 | ア 正 | イ 負 | |
| 3 | ア IB
エ $IB^2 \tan \theta$ | イ $IB \sin \theta$
オ $IB^2(1 - \cos \theta)$ | ウ $IB \cos \theta$ |
| 4 | ア 正 | イ 負 | |
| 5 | ア Mg
エ $Mg + \frac{1}{2}F$ | イ $Mg - \frac{1}{2}F$
オ $Mg + F$ | ウ $Mg - F$ |
| 6 | ア 0
エ Mg | イ $\frac{1}{2}Mg$
オ $2Mg$ | ウ $\frac{\sqrt{2}}{2}Mg$ |



略解



1. 等加速度運動の時間追跡

- (1) $(m\vec{g})_x = -mg \sin \theta, (m\vec{g})_y = -mg \cos \theta$
- (2)
$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha - g \sin \theta t, \\ v_y = v_0 \sin \alpha - g \cos \theta t \end{cases}$$
- (3)
$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2} g \sin \theta t, \\ y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g \cos \theta t \end{cases}$$
- (4) $\frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}$
- (5) $\frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos(\theta + \alpha)}{g \cos^2 \theta}$
- (6) $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}, \ell_{\max} = \frac{v_0^2}{g(1 + \sin \theta)}$
- (7) $2 \tan \theta \tan \alpha = 1$
- (8) $\frac{1}{\sqrt{1 + 4 \tan^2 \theta}} v_0$
- (9) $e \frac{2v_1}{g \cos \theta}$
- (10) $\frac{e}{1 - e} \frac{2v_1}{g \cos \theta}$

2. 剛体のつりあい

- (1) $\rho S l g$
- (2) $\begin{aligned} \text{ア} : \frac{1}{2} l \cos \theta \quad \text{イ} : \rho_0 S l_0 g \quad \text{ウ} : l - \frac{h}{\sin \theta} \\ \text{エ} : 0 = \frac{l}{2} \rho S l g \cos \theta - \left(l - \frac{l_0}{2} \right) \rho_0 S l_0 g \cos \theta \\ \text{オ} : \frac{h}{l} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}} \end{aligned}$
- (3) $l \sqrt{1 - \frac{\rho_0}{\rho}}$

3. 糸の拘束条件

- (1) $0 = Mg - F - M'g$
- (2) $\frac{M - M'}{m}$
- (3) $M(-a) = T - Mg$
- (4) $ma = T - \mu' mg$
- (5) $\frac{M - \mu' m}{M + m} g$
- (6) $\frac{1}{2} \frac{M - \mu' m}{M + m} g t^2$

$$(7) -\frac{1}{2} \frac{\mu' m (M - \mu' m)}{M + m} g^2 t^2$$

4. 糸と面の拘束条件

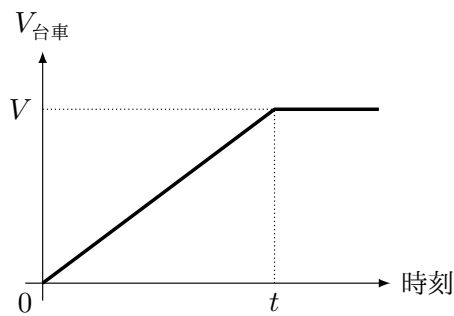
- [A] (1) $m_B g$ (2) $m_B g$
- [B] (3) $m_A a = T$ (4) $m_B(-a) = T - m_B g$
- (5) $\frac{m_B}{m_A + m_B} g$ (6) $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g$
- (7) $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g$
- (8) $\left(M + m_A + \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \right) g$
- [C] (9) $\frac{m_B}{m_A} g$
- [D] (10) $\frac{63}{25} m g$

5. 面の拘束条件

- (1) $g \sin \theta$
- (2) $\sqrt{2gd \sin \theta}$
- (3) 左
- (4) $M(-A) = -N \sin \theta$
- (5) $\begin{aligned} \text{ア} : \text{右} \quad \text{イ} : mA \\ \text{ウ} : 0 = N + mA \sin \theta - mg \cos \theta \end{aligned}$
- (6) $N = \frac{Mm \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} g$
 $A = \frac{m \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} g$
- (7) $\frac{m}{M + m} \ell \cos \theta$
- (8)
$$\begin{cases} ma_x = N \sin \theta, \\ ma_y = N \cos \theta - mg, \\ MA_x = -N \sin \theta \end{cases}$$
- (9) 略
- (10) 略
- (11) 略

6. 衝突, 摩擦を介する 2 物体

- (1) $\frac{1}{2}kx^2$
 (2) $x\sqrt{\frac{k}{2m}}$
 (3) $\frac{2(1+e)}{3}v_a$
 (4) 右方向
 (5) B: $-\mu'g$ 台車: $\mu'\frac{m}{M}g$
 (6) $\frac{m}{M+m}v_b'$
 (7) $\frac{MV}{\mu'mg}$
 (8) $\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v_b'^2$
 (9) $\frac{\Delta E}{\mu'mg}$
 (10)



7. 多体系，衝突

- (1) $\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$
 (2) $v_C = \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}$
 $V_C = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}$
 (3) $a\sqrt{\frac{M}{2(M+m)gh_1}}$
 (4) $v'_D = e\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}$
 $V'_D = e\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}$
 (5) e^2h_1

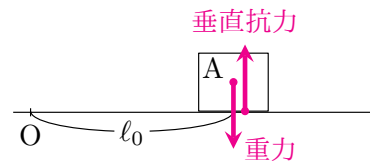
没 衝突と等加速度運動の時間追跡

- (1) $\frac{v_0^2}{4g}$

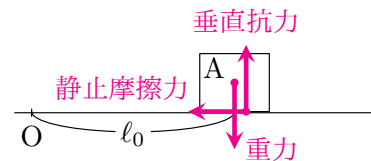
- (2) $\frac{v_0^2}{2g}$
 (3) $\frac{1-e^2}{4}mv_0^2$
 (4) $\frac{1}{2}$
 (5) $\frac{\sqrt{2}}{1-e}\frac{v_0}{g}$

8. 等速円運動

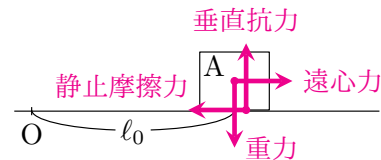
- (1)



- (2) 地面固定系：



回転座標系：



- (3) $\frac{\ell_0\omega_0^2}{g}$
 (4) $\sqrt{(1-\mu)\frac{g}{\ell}} \leq \omega \leq \sqrt{(1+\mu)\frac{g}{\ell}}$

9. 非等速円運動

問 1 $\sqrt{2gh}$

問 2 $\sqrt{2g(h-2r)}$

問 3 $\left(\frac{2h}{r} - 5\right)mg$

問 4 $\frac{5}{2}r$

問 5 r

問 6 $\sqrt{gr \sin \theta}$

問 7 $r + \frac{3}{2}r \sin \theta$

問 8 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}r - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gr}{2}}t, \\ x = \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3gr}{2}}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

問 9 $T = \sqrt{\frac{6r}{g}}, \quad y = 0$

10. 天体の運動—楕円軌道

問 1 $\frac{GM}{R^2}$

問 2 $\sqrt{gR}$

問 3 $\sqrt{\frac{gR}{2}} \quad 4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

問 4 (1) $\frac{1}{3}v$ (2) $\frac{\sqrt{3gR}}{2}$

問 5 $\sqrt{\frac{gR}{3}} < v < \sqrt{gR}$

問 6 (1)(2) $16\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

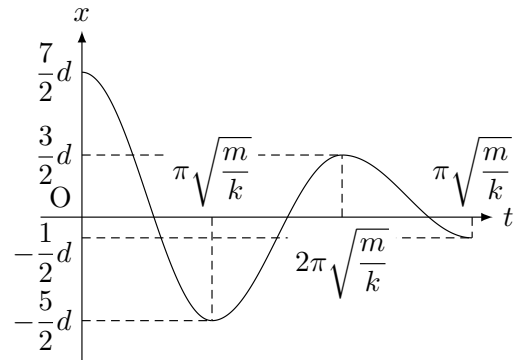
11. 天体の運動—等速円運動

[A] (1) $G\frac{Mm}{r_0^2}$ (2) $2\pi G\sqrt{\frac{r_0}{GM}}$ (3) $\frac{GMm}{2r_0}$
(4) $-\frac{GMm}{2r_0}$ (5) ② (6) ①

[B] (1) $mr_1\omega^2$ (2) $\frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$ (3) $\frac{M}{M+m}r_0$
(4) $2\pi r_0\sqrt{\frac{r_0}{G(M+m)}}$

12. 単振動

(1) $\frac{kd}{mg}$ (2) $\frac{k(x_0 + x_1)}{2mg}$
(3) $ma = -k\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right)$
(4) $\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (5) $\frac{x_0 - x_1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ (6) $-\frac{x_0 + x_1}{2}$
(7) $-x_0 - 2x_1$ (8) $-\frac{d}{2}$
(9)



13. 単振動の時間追跡, 衝突

問 1 ア: $mv_A + Mv_B = Mv_0$

イ: $v_A = \frac{2M}{M+m}v_0, \quad v_B = \frac{M-m}{M+m}v_0$

ウ: $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

問 2 $v_A\sqrt{\frac{m}{k}}$

$V_C = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}$

問 3 ア: $v_A\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ イ: $x_B = v_B t$

問 4 ア: $\frac{5}{6}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ イ: $\frac{5\pi}{5\pi - 6}$

問 5 (エ)

14. 荷電粒子の運動 (静電場)

問 1 P: $-Ed$ Q: 0

問 2 $qEd \cos \theta$

問 3 $qEd(1 - \cos \theta)$

問 4 (1) $\sqrt{\frac{3h}{g}}$ (2) $\frac{qE}{mg}h$
(3) $\left\{1 + \left(\frac{qE}{mg}\right)^2\right\}mgh$

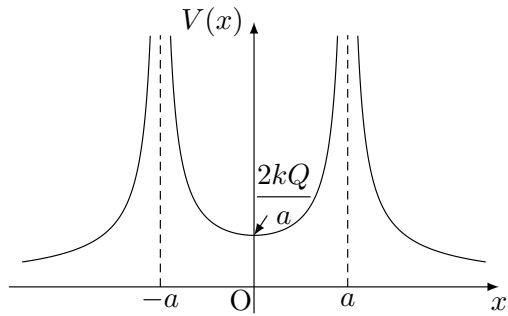
問 5 $\left\{1 + \left(\frac{qE}{mg}\right)^2\right\}mgh$

問 6 $U_A = mgh, \quad U_B = -qEd$

15. 荷電粒子の運動 (静電場)

問1 大きさ: $\frac{2kQb}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$ 向き: y 軸正方向

問2 $V(x) = \begin{cases} \frac{2kQ|x|}{x^2-a^2} & (|x| > a), \\ -\frac{2kQa}{x^2-a^2} & (|x| < a). \end{cases}$



問3 大きさ: $\frac{2kQqb}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$ 向き: y 軸正方向

問4 $\frac{13kQq}{20a}$

問5 $\sqrt{\frac{kQq}{2ma}}$

問6 $x = -\frac{a}{6} \quad v = \sqrt{\frac{kQq}{5ma}}$

16. 球殻コンデンサ, ガウスの法則

(a) $U: 4\pi k_0 q$

(b) $カ: k_0 \frac{Q}{x^2}$

(c) $オ: k_0 \frac{Q}{x}$

(d) $ア: 0$

(e) $キ: k_0 \frac{Q}{a}$

(f) $カ: k_0 \frac{Q}{x^2}$

(g) $シ: k_0 Q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

(h) $タ: \frac{ab}{k_0(b-a)}$

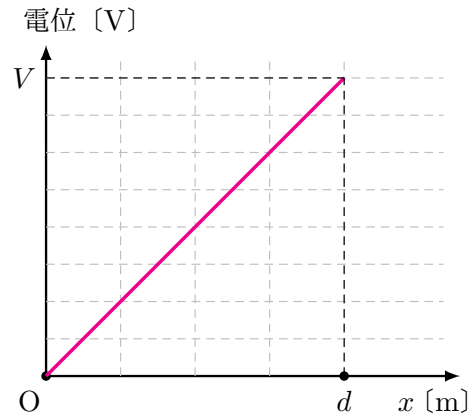
(i) $-2Q$

(j) Q

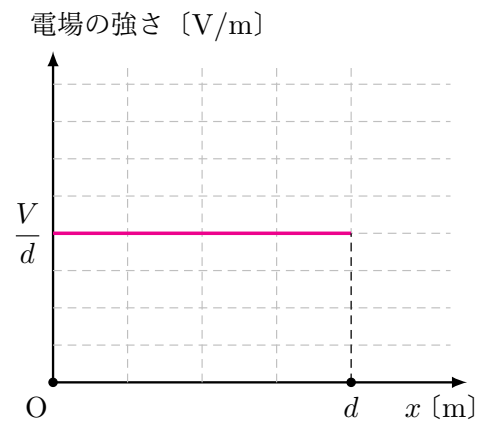
(k) $\frac{a}{k_0}$

(1) $\frac{1}{2}CV^2$

(2)

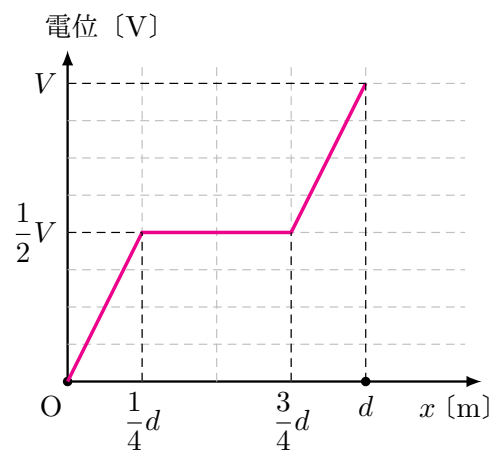


(3)



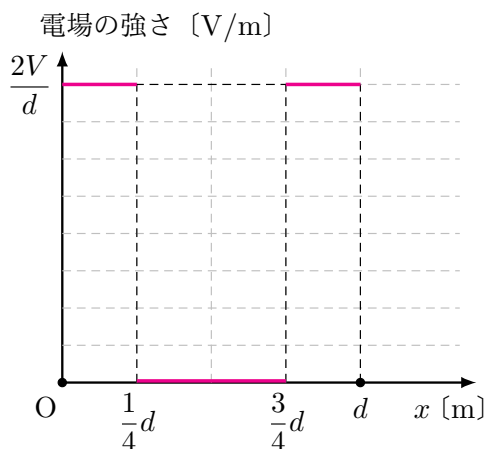
(4) $2CV$

(5)



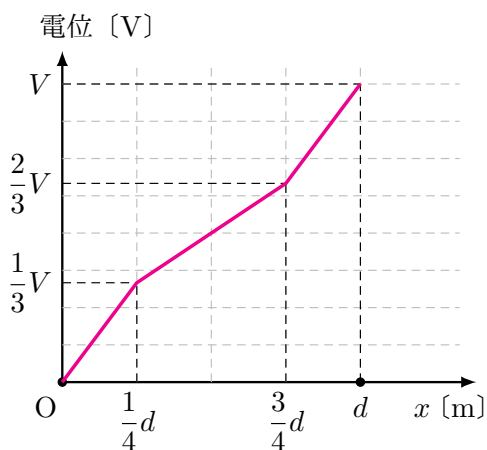
(6)

17. コンデンサの内部構造

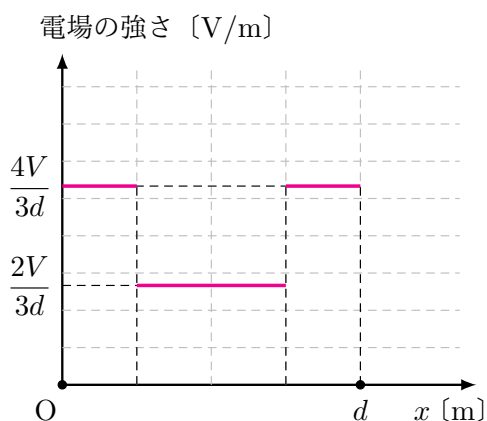


(7) $\frac{4}{3}CV$

(8)



(9)



(10) $\frac{2}{9}CV^2$

(11) $2V$

18. 電気回路

問 1 $\frac{V_0}{R}$

問 2 CV_0^2

問 3 電位差: $\frac{3}{2}V_0$ 仕事: $3CV_0^2$

問 4 $\frac{9}{4}V_0$

問 5 $3V_0$

問 6 $I = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

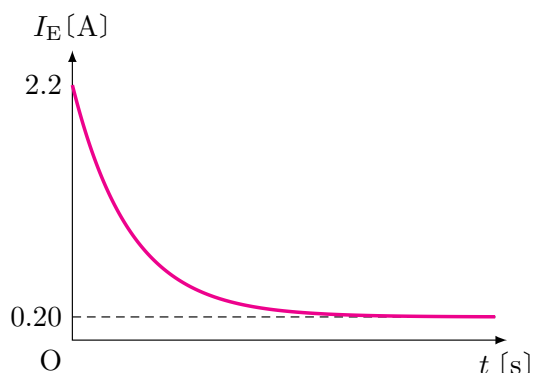
19. 電気回路

問 1 2.2 A

問 2 0.20 A

問 3 $Q_1 = 6.0 \times 10^{-7} \text{ C}$, $Q_2 = 1.0 \times 10^{-6} \text{ C}$

問 4



問 5 $Q'_1 = 8.0 \times 10^{-7} \text{ C}$, $Q'_2 = 8.0 \times 10^{-7} \text{ C}$

問 6 $4.0 \times 10^{-8} \text{ J}$

20. 荷電粒子の運動 (静磁場)

問 1 $\sqrt{\frac{2qV}{m}}$

問 2 ローレンツ力

問 3 qvB

問 4 $\frac{mv}{qB}$

問 5 $\frac{\pi m}{qB}$

問 6 $\sqrt{\frac{6qV}{m}}$

問 7 $\frac{mv_1}{qB}$

問8 ①, ④

問9 $\sqrt{\frac{2qV}{m}}n$

問10 $\frac{2}{(2N-1)B}\sqrt{\frac{2mV}{q}}$

21. 交流回路

問1 $I_{L0} = \frac{V_0}{L\omega}, I_{C0} = C\omega V_0, I_{R0} = \frac{V_0}{R}$

問2 $I_L = -I_{L0} \cos \omega t, I_C = I_{C0} \cos \omega t,$
 $I_R = I_{R0} \sin \omega t$

問3 $I_L + I_C + I_R$

問4 $I = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} \sin(\omega t - \theta),$
 $\tan \theta = R \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$

問5 $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}}$

問6 $I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}},$
 $\tan \theta = \frac{1}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

問7 $\frac{1}{2}I_0 V_0 \cos \theta$

22. vBl 公式の電磁誘導

〔A〕 (1) $BLu\Delta t$

(2) uBL

(3) $F_{\text{ex}} = \frac{V}{R_1 + R_2}, W = \frac{VBL}{R_1 + R_2}$

(4) $\frac{V^2}{R_1 + R_2}$

(5) $P_2 = \frac{R_2 V^2}{(R_1 + R_2)^2}, W = P_1 + P_2$

〔B〕 (1) $\frac{E}{4r}$

(2) $\frac{EBL}{4rM}$

(3) $I_1 = \frac{2E - 3vBL}{8r}, I_2 = \frac{2E + vBL}{8r}$

(4) $\frac{2}{3} \frac{E}{BL}$

(5) $\frac{E}{BL}$

23. ファラデーの法則の電磁誘導

1 イ：反時計回り

2 ア：正

3 イ： $IB \sin \theta$

4 ア：正

5 ウ： $Mg - F$ 6 エ： Mg 7 Mgv

解答編

1. 等加速度運動の時間追跡

【メモ】

・ほとんどが等加速度運動の時間追跡。等加速度運動はエネルギーで論じることがもできるが、今回は時刻 t を問われているため時間追跡的解法を選択する。等加速度運動の公式は以下 2 式を押さえれば十分*4。

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2, \\ v(t) = v(0) + at. \end{cases}$$

・後半 2 問は衝突の要素を含む。

【解答】

問 1 重力を x 軸, y 軸に沿って分解すれば,

$$m\vec{g} = \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ -mg \cos \theta \end{pmatrix}.$$

問 2 運動方程式より物体の加速度の x 成分 a_x , および y 成分 a_y はそれぞれ,

$$\begin{cases} ma_x = -mg \sin \theta, \\ ma_y = -mg \cos \theta \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a_x = -g \sin \theta, \\ a_y = -g \cos \theta \end{cases}$$

と定数値を取るの、[「等加速度運動の公式」より,

$$\begin{cases} v_x = \underline{v_0 \cos \alpha - g \sin \theta t}, \\ v_y = \underline{v_0 \sin \alpha - g \cos \theta t}. \end{cases}$$

問 3 前問同様に公式より,

$$\begin{cases} x = \underline{v_0 \cos \alpha t - \frac{1}{2}g \sin \theta t}, \\ y = \underline{v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}g \cos \theta t}. \end{cases}$$

問 4 $y = 0$ を解いて*5,

$$v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}g \cos \theta t = 0 \quad \therefore t = 0, \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}.$$

$t > 0$ より,

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{\underline{g \cos \theta}}.$$

*4 加速度 a が t のべき乗で書ける場合、単純に積分すれば（これもれっきとした微分方程式を解く操作である）その場合の速度 v と位置 x の公式を導出できる。

*5 $x = \ell$ は考えてはいけない。 ℓ は次の設問の解答である。

問5 $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}$ を x へ代入して,

$$\begin{aligned}\ell &= v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta} - \frac{1}{2} g \sin \theta \left(\frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta} \right)^2 \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \frac{\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \frac{\sin \alpha \cos (\theta + \alpha)}{\cos^2 \theta}.\end{aligned}$$

問6 分子の α を含む因子は

$$\sin \alpha \cos (\theta + \alpha) = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + (\theta + \alpha)) + \sin(\alpha - (\theta + \alpha)) \} = \frac{1}{2} \{ \sin(2\alpha + \theta) - \sin \theta \}$$

と変形できるので ℓ は

$$\ell = \frac{v_0^2}{g} \frac{\sin(2\alpha + \theta) - \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

と書き直せる. よって, $\sin(2\alpha + \theta) = 1$ となるとき最大で,

$$\ell_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \frac{1 - \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{v_0^2}{g} \frac{1 - \sin \theta}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = \frac{v_0^2}{g(1 + \sin \theta)}.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha + \theta) &= 1 \\ 2\alpha + \theta &= \frac{\pi}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

問7 $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}$ で $v_x = 0$ であればよいので,

$$v_0 \cos \alpha - g \sin \theta \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta} = 0 \quad \therefore \underline{\underline{2 \tan \theta \tan \alpha = 1}}.$$

問8 $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}$ での速さは,

$$\begin{aligned}v_1 &= \sqrt{0^2 + \left(v_0 \sin \alpha - g \cos \theta \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta} \right)^2} = v_0 \sin \alpha = v_0 \sqrt{\frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4 \tan^2 \theta + 1}} v_0.\end{aligned}$$

問9 はね返り係数の式から衝突直後の小球の速度の y 成分 v'_1 は,

$$v'_1 - 0 = -e(-v_1 - 0) = ev_1$$

である．よって，この時刻を $\tau = 0$ とするような時刻を改めて定義すれば次の衝突までの小球の位置は，

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}g \sin \theta \tau^2, \\ y = ev_1 \tau - \frac{1}{2}g \cos \theta \tau^2 \end{cases}$$

と書ける．1 回目の衝突から 2 回目の衝突までの時間間隔は $y = 0$ を解いて，

$$ev_1 \tau - \frac{1}{2}g \cos \theta \tau^2 = 0 \quad \therefore \tau = \frac{ev_1}{\underbrace{g \cos \theta}}.$$

なお， $\tau > 0$ より $\tau = 0$ は不適である．

問 10 n 回目の衝突から $n+1$ 回目の衝突までの間を考える． n 回目の衝突直前の小球の速度の y 成分を $-v_n (< 0)$ とすると，衝突直後の速度の y 成分は，

$$v'_n - 0 = -e(-v_n - 0) = ev_n$$

となり， n 回目の衝突時刻を $\tau = 0$ とするような時刻を改めて定義すれば次の衝突までの小球の位置，速度の y 成分はそれぞれ，

$$\begin{cases} y = ev_n \tau - \frac{1}{2}g \cos \theta \tau^2, \\ v_y = ev_n - g \cos \theta \tau \end{cases}$$

と書ける．すると， $n+1$ 回目の衝突時刻は $y = 0$ を解けば $\tau = \frac{2ev_n}{g \cos \theta}$ と求まり，このときの速度の y 成分が $v_y = -ev_n$ とわかる．すなわち， $n+1$ 回目の衝突直前の速度の y 成分 $-v_{n+1}$ は $-v_{n+1} = -ev_n$ は漸化式を満たすので，

$$v_n = ev_{n-1} = e^2 v_{n-2} = \cdots = e^{n-1} v_1$$

を得る．よって， n 回目の衝突から $n+1$ 回目の衝突までの小球の y 座標は，

$$y = e^n v_1 \tau - \frac{1}{2}g \cos \theta \tau^2$$

となり， n 回目の衝突から $n+1$ 回目の衝突の時間間隔は $y = 0$ を解いて $\tau = \frac{2e^n v_1}{g \cos \theta}$ と求まる．

以上から，1 回目の衝突から n 回目までの衝突までの時間 T_n は，

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{2e^k v_1}{g \cos \theta} = \frac{e(1-e^n)}{1-e} \frac{2v_1}{g \cos \theta}$$

と表され， $n \rightarrow \infty$ では $0 < e < 1$ に留意して，

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e(1-e^n)}{1-e} \frac{2v_1}{g \cos \theta} = \frac{e}{1-e} \frac{2v_1}{\underbrace{g \cos \theta}}.$$

2. 剛体のつりあい

【メモ】

・ 剛体のつりあいの定石は以下 2 式連立.

$$\begin{cases} \text{力のつりあい} \\ \text{任意の点まわりの力のモーメントのつりあい} \end{cases}$$

・ 以上の立式に加え、問題の条件としてつりあいが敗れる瞬間を考えることがしばしば.

【解答】

問 1 密度の定義より質量は ρSl と表せるから、重力の大きさ（重さ）は、

$$W = mg = \rho Slg.$$

問 2 ア 図より $\frac{1}{2}l \cos \theta$.

イ 公式より $\rho_0 Sl_0 g$.

ウ 図の水面からはみ出ている棒と液面で形成される三角形に注目して、

$$\frac{h}{l-l_0} = \sin \theta \quad \therefore l_0 = l - \frac{h}{\sin \theta}.$$

エ 点 A まわりの力のモーメントのつりあいは浮力の作用点が元あった流体の質量中心であることに留意して、

$$0 = \frac{l}{2} \rho Slg \cos \theta - \left(l - \frac{l_0}{2} \right) \rho_0 Sl_0 g \cos \theta.$$

オ 力のモーメントのつりあいより*6,

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} \rho Slg \cos \theta - \left(l - \frac{l_0}{2} \right) \rho_0 Sl_0 g \cos \theta &= 0 \\ l_0^2 - 2ll_0 + \frac{\rho}{\rho_0} l^2 &= 0 \quad \therefore l_0 = l \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right) \end{aligned}$$

を得て、 $l_0 < l$ より、

$$l_0 = l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right)$$

と求まる。ここで、エの結果を用いて、

$$l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right) = l - \frac{h}{\sin \theta} \quad \therefore \sin \theta = \frac{h}{l \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}}}.$$

*6 力のつりあいからは張力の大きさが求まる。今回は問われていない。

問3 前問の結果に $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入して,

$$h = l \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}.$$

3. 糸の拘束条件

【メモ】

・張力の大きさは、糸が伸縮しないことから未知量で置く他ない。この場合運動方程式だけでは式が不足するように思われるが、「糸が伸縮しない」という条件を式で表現することによって式と未知量の過不足がなくなる。面（垂直抗力，静止摩擦力）に関しても同様である。

【解答】

問1 右側の糸の張力の大きさを T ，左側の張力の大きさを S とする。各物体の運動方程式より^{*7}，

$$\begin{cases} m \cdot 0 = T - S - F, \\ m \cdot 0 = N - mg, \\ M \cdot 0 = T - Mg, \\ M' \cdot 0 = S - M'g \end{cases} \quad \therefore \underbrace{m \cdot 0 = Mg - M'g - F}.$$

問2 つりあいより $F = (M - M')g$ ， $N = mg$ である。滑らない条件ゆえ $F \leq \mu N$ を考えて^{*8}，

$$(M - M')g \leq \mu mg \quad \therefore \mu \geq \frac{M - M'}{\underbrace{m}}.$$

問3 水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める。質量 m の物体の位置を (x, y) ，質量 M の物体の位置を (X, Y) とする。今 y, X は定数である。このとき糸の長さは，

$$(X - x) + (y - Y) = \ell_r$$

と表される。質量 m の物体の加速度の x 軸成分を a ，質量 M の y 成分を A とすると，糸の拘束条件を微分すれば，

$$-a - A = 0 \quad A = -a$$

と関係付くので，運動方程式はそれぞれ

$$\begin{cases} \underbrace{M(-a) = T - Mg}, \\ \underbrace{ma = T - \mu' mg} \end{cases}$$

となる^{*9}。

^{*7} F を左向きとしたが，右向きで仮定してもよい。その場合，静止摩擦力を右向きに R などして計算すれば $R = (M' - M)g < 0$ となり，実際は左向きであるということが分かる。そうして，静止摩擦力の大きさを $F = |R| = (M - M')g$ とし左向きとして改めて立式すればよい。

^{*8} 等号の扱いを掘り下げるのは本質的ではない。不等号に付く等号については問題に従えばよい。

^{*9} 質量 m の物体が受ける垂直抗力の大きさが mg であることは割愛した。

問4 前問に示した.

問5 運動方程式を解いて,

$$a = \frac{M - \mu' m}{M + m} g, \quad T = \frac{(1 + \mu') M m}{M + m} g.$$

問6 a が定数値であることから等加速度運動の公式より,

$$\Delta x = 0 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{M - \mu' m}{M + m} g t^2.$$

問7 個々のエネルギー収支の式は,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = \begin{pmatrix} T - \mu' m g \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \end{pmatrix} = T \Delta x - \mu' m g \Delta x, \\ \frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} M \cdot 0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ T - M g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta Y \end{pmatrix} = T \Delta Y - M g \Delta Y \end{cases}$$

であるから, 2 式の和を取って変形すれば*10,

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M v^2 + M g \Delta Y \right)}_{\text{終状態の力学的エネルギー}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} m \cdot 0^2 + \frac{1}{2} M \cdot 0^2 + M g \cdot 0 \right)}_{\text{始状態の力学的エネルギー}} = -\mu' m g \Delta x$$

となるので,

$$\Delta E = -\mu' m g \Delta x = -\frac{1}{2} \frac{\mu' m (M - \mu' m)}{M + m} g^2 t^2.$$

*10 拘束条件より $\Delta Y = -\Delta x$ である.

4. 糸と面の拘束条件

【解答】

まず全体にかかる拘束条件に関して整理する．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．A の位置を (x_A, y_A) ，B の位置を (x_B, y_B) ，C の位置を (x_C, y_C) ，物体 A, B, C の加速度をそれぞれ $\vec{a} = (a_x, 0)$ ， $\vec{b} = (b_x, b_y)$ ， $\vec{c} = (c_x, 0)$ とする．ここで， y_A, y_C は定数値を取り，面が変形しないことから B と C の間の間隔（物体の幅）を D とすると，

$$x_B = x_C + D$$

が成り立つ．また，糸の長さが一定ゆえ，糸の長さを ℓ とすれば

$$x_B - x_A + y_A - y_B = \ell$$

となり，それぞれ時刻 t で微分すれば，

$$\begin{cases} b_x = c_x, \\ b_x - a_x + 0 - b_y = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} b_x = c_x, \\ b_x - a_x - b_y = 0 \end{cases}$$

と加速度の関係式を得る．

[A] 固定しているため $a_x = b_x = b_y = c_x = 0$ である．

- (1) 糸の張力の大きさを T ，B が C から受ける垂直抗力の大きさを N とする．各物体のつりあいは

$$\begin{cases} m_A \cdot 0 = T - F_A, \\ m_B \cdot 0 = T - m_B g, \\ m_B \cdot 0 = N, \\ M \cdot 0 = -T + N + F_C \end{cases} \quad \therefore F_A = T = \underline{\underline{m_B g}}, \quad F_C = T - N = \underline{\underline{m_B g}}.$$

- (2) 前問に示した．

[B] C のみ固定しているため $c_x = 0$ である．つまり，拘束条件より $b_x = 0$ も成り立つ．

- (3) 糸の長さが一定ゆえ，糸の長さを ℓ とすれば

$$x_B - x_A + y_A - y_B = \ell$$

が成り立つ．今 C を固定しているため x_B も定数値を取ることに留意し，両辺を t で微分すれば，

$$0 - a_x + 0 - b_y = 0 \quad \therefore b_y = -a_x$$

を得る．今 $b_y = -a$ より， $a_x = a$ である．さて，糸の張力の大きさを T ，B が C から受ける垂直抗力の大きさを N とすると，各物体の運動方程式は，

$$\begin{cases} \underline{m_A a = T}, \\ \underline{m_B(-a) = T - m_B g}, \\ m_B \cdot 0 = N, \\ M \cdot 0 = -T + N + F_C \end{cases} \quad \therefore a = \frac{m_B}{\underline{m_A + m_B}} g, \quad T = \frac{m_A m_B}{\underline{m_A + m_B}} g.$$

(4) 前問に示した．

(5) 前問に示した．

(6) 前問に示した．

(7) C の運動方程式より，

$$F_C = T - N = \frac{m_A m_B}{\underline{m_A + m_B}} g.$$

(8) AC 間の垂直抗力の大きさを N_A ，C と床の間の垂直抗力の大きさを N_C とする．A，C の運動方程式の y 成分より，

$$\begin{cases} m_A \cdot 0 = N_A - m_A g, \\ M \cdot 0 = -T - N_A - Mg + N_C, \end{cases} \quad \therefore N_C = \left(M + m_A + \frac{m_A m_B}{\underline{m_A + m_B}} \right) g.$$

[C] 題意より $a_x = b_x = c_x$ ， $b_y = 0$ である．

(9) 拘束条件と運動方程式を題意 $a_x = b_x = c_x$ ， $b_y = 0$ の下で解いて，

$$\begin{cases} m_A a_x = T, \\ m_B b_x = N, \\ m_B \cdot 0 = T - m_B g, \\ M c_x = -T - N, \\ b_x - a_x - b_y = 0, \\ b_x = c_x = a_x, \end{cases} \quad \therefore a_x = b_x = c_x = \frac{m_B}{\underline{m_A}} g.$$

なお，他の物理量は，

$$b_y = 0, \quad N = \frac{m_B^2}{m_A} g, \quad T = m_B g.$$

[D] 題意より $c_x = \frac{1}{10}g$ であり，拘束条件より $b_x = \frac{1}{10}g$ である．

(1) $m_A = 3m$, $m_B = 2m$, $M = 10m$, $c_x = \frac{1}{10}g$ の下で運動方程式と拘束条件を解いて,

$$\begin{cases} 3ma_x = T, \\ 2mb_x = N, \\ 2mb_y = T - m_B g, \\ 10m \cdot \frac{1}{10}g = -T - N + F_C, \\ b_x - a_x - b_y = 0, \\ b_x = c_x = \frac{1}{10}g, \end{cases} \quad \therefore F_C = \underline{\underline{\frac{63}{25}mg}}.$$

なお, 他の物理量は,

$$a_x = \frac{11}{25}g, \quad b_x = \frac{1}{10}g, \quad b_y = \frac{17}{50}g, \quad T = \frac{33}{25}mg, \quad N = \frac{1}{5}mg.$$

4. 面の拘束条件

【解答】

水平右向きに x 軸, 鉛直上向きに y 軸を定める. P の床との接面のうち右端の頂点の位置を $(X, 0)$, Q の位置を (x, y) とし, P, Q それぞれの加速度を $\vec{a}_P = (A_x, 0)$, $\vec{a}_Q = (a_x, a_y)$ とする.

- (1) 斜面下向きに x' 軸を定める ($x' = 0$ を始状態位置に定める). 斜面下向き方向の物体の運動方程式より,

$$ma = mg \sin \theta \quad \therefore a = \underline{g \sin \theta}.$$

- (2) エネルギー収支より^{*11},

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -d \sin \theta \end{pmatrix} \quad \therefore v = \underline{\sqrt{2gd \sin \theta}}.$$

- (3) P の運動方程式より

$$MA_x = -N \sin \theta \quad \therefore A_x = -\frac{N}{M} \sin \theta < 0$$

となり x 軸負方向, つまり水平 左 向きとわかる.

- (4) 題意より $A_x = -A$ ゆえ,

$$M(-A) = -N \sin \theta \quad \therefore \underline{MA = N \sin \theta}.$$

- (5) ア $A_x < 0$ より, P とともに運動する座標系 (斜面下向きに x' 軸, 斜面と垂直で斜面から突き出る向きに y' 軸) 内部で生じる慣性力は x 軸正方向である. よって, 水平 右 向き.

イ 公式より $\underline{mA}$.

ウ 斜面から突き出る向きを正に定め立式すれば,

$$\underline{M \cdot 0 = N + mA \sin \theta - mg \cos \theta}.$$

- (6) P の運動方程式, および P とともに動く座標系内部の y' 軸方向のつりあいの式より,

$$N = \frac{Mm \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} g, \quad A = \frac{m \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} g.$$

^{*11} 力学的エネルギー保存則: $\frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mgd \sin \theta$

時間追跡: 右の式から $x' = d$ を満たす t を求め v へ代入 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}g \sin \theta t^2, \\ v = g \sin \theta t \end{cases}$

- (7) P とともに運動する座標系内部での Q の加速度を a とする. x' 方向の運動方程式より,

$$ma = mg \sin \theta + mA \cos \theta \quad \therefore a = \frac{(M+m) \sin \theta}{M+m \sin^2 \theta} g$$

である. a , A いずれも一定ゆえ等加速度運動の式が使える,

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}at^2, \\ X = -\frac{1}{2}At^2 \end{cases}$$

となり, 題意より $x' = \ell$, $X = -L$ ゆえ,

$$\begin{cases} \ell = \frac{1}{2}at^2, \\ -L = -\frac{1}{2}At^2 \end{cases} \quad \therefore L = \frac{A}{a}\ell = \frac{\frac{m \sin \theta \cos \theta}{M+m \sin^2 \theta}g}{\frac{(M+m) \sin \theta \cos \theta}{M+m \sin^2 \theta}g} \ell = \frac{m}{M+m} \ell \cos \theta.$$

- (8) 地面固定系における各物体の運動方程式は以下の通り.

$$\begin{cases} \underline{ma_x = N \sin \theta}, \\ \underline{ma_y = N \cos \theta - mg}, \\ \underline{MA_x = -N \sin \theta}. \end{cases}$$

- (9) 拘束条件を考える. 面が変形しないことから, 物体の位置座標は

$$y = \tan \theta (X - x)$$

の関係を満たし, この式の両辺を t で微分することで,

$$a_y = \tan \theta (A_x - a_x)$$

を得る. ここで, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ より,

$$\begin{aligned} \tan \theta (A_x - a_x) - a_y &= 0 \\ \sin \theta (a_x - A_x) + a_y \cos \theta &= 0 \quad \therefore \begin{pmatrix} a_x - A_x \\ a_y - 0 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, 斜面と平行 (斜面に沿って下向き) であることが示せた.

- (10) 運動方程式, および拘束条件より, 運動方程式 3 式を拘束条件に代入するようにして,

$$\begin{cases} ma_x = N \sin \theta, \\ ma_y = N \cos \theta - mg, \\ MA_x = -N \sin \theta, \\ a_y = \tan \theta (A_x - a_x) \end{cases} \quad \therefore N = \frac{Mm \cos \theta}{M+m \sin^2 \theta} g.$$

(11) 運動方程式より,

$$ma_x + MA_x = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mv_x + MV_x) = 0 \quad \therefore mv_x + MV_x = \text{const.}$$

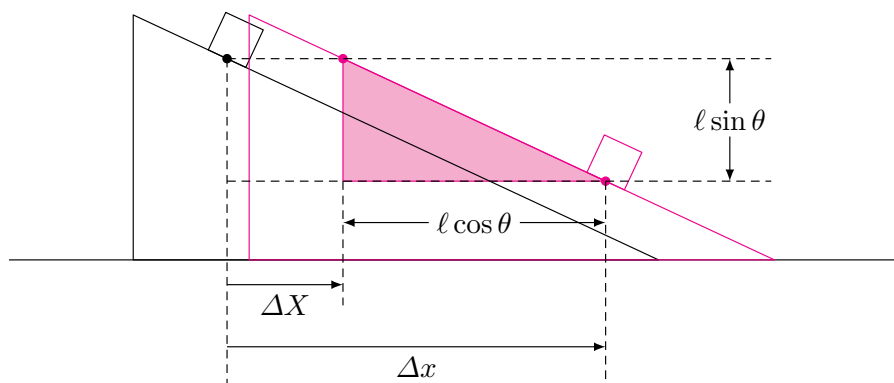
なお, 初期条件が^{*} $v_x = 0, V_x = 0$ より,

$$mv_x + MV_x = 0 \quad \therefore \frac{mv_x + MV_x}{m + M} = 0$$

となり重心速度が^{*}0 であることも示せた.

【補足】(7) を地面固定系で考える

一般に $\Delta x > 0, \Delta X > 0$ の図を以下に示す (実際には $\Delta X < 0$ であるが, 正で考える癖をつけた方が
良いので正の図を描いた^{*12*13}).

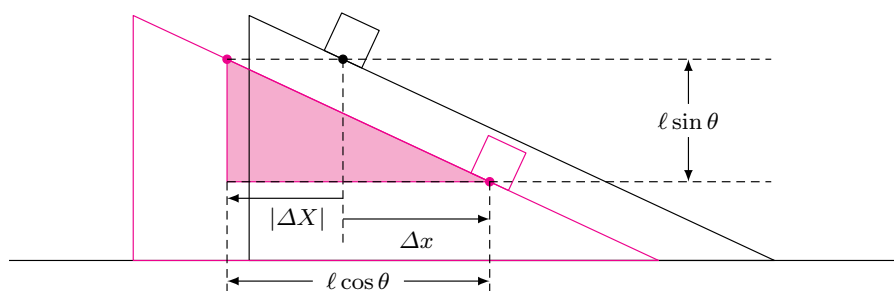


図より,

$$\begin{cases} \Delta x - \Delta X = \ell \cos \theta, \\ \Delta y = -\ell \sin \theta \end{cases}$$

^{*12} $|\Delta X|$ と絶対値で考えるのは面倒だから極力正である状況の図を書いて代入するときに負の値を代入するとよい.

^{*13} $\Delta X < 0$ の場合の実際の運動に即した図は以下の通りである.



であり、今 $\Delta X = -L$ であるから、

$$\begin{cases} \Delta x = -L + \ell \cos \theta, \\ \Delta y = -\ell \cos \theta \end{cases}$$

となる。

さて、(11) のように運動量保存則より、

$$mv_x + MV_x = 0$$
$$\frac{d}{dt}(mx + MX) = 0 \quad \therefore m\Delta x + M\Delta X = 0$$

となるので、図の x 方向の変位に関する式も用いて、

$$\begin{cases} \Delta x = -L + \ell \cos \theta, \\ m\Delta x + M\Delta X = 0 \end{cases} \quad \therefore L = \frac{m}{M+m} \ell \cos \theta$$

を得る。

6. 衝突，摩擦を介する 2 物体

【メモ】

・衝突は以下 2 種の式を連立．条件が明示的でないものもあるが，日々の演習では，衝突時の条件は何かを必ず確認したい．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{array} \right.$$

なお，固定面との衝突など外力制御がある場合の衝突では運動量保存則は成り立たないので注意．・内力の仕事は個々のエネルギー収支に注目する．

【解答】

(1) 公式より，

$$U = \frac{1}{2} kx^2.$$

(2) 物体 A とばねからなる系の力学的エネルギー保存則より^{*14}，

$$\frac{1}{2} \cdot 2mv_a^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \therefore v_a = x\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

(3) 運動量保存則，および条件（はね返り係数の式）より，

$$\left\{ \begin{array}{l} 2mv_a' + mv_b' = 2mv_a, \\ v_a' - v_b' = -e(v_a - 0) \end{array} \right. \quad \therefore v_a' = \frac{2-e}{3}v_a \quad v_b' = \frac{2(1+e)}{3}v_a.$$

(4) 前問の計算より $v_a' > 0$ であるから 右方向 へ運動する．

(5) B が台から受ける垂直抗力の大きさ N は，B の鉛直方向の運動方程式より $N = mg$ と求まる．

よって，B の加速度を a ，台の加速度を A としたとき，各物体の運動方程式から^{*15}，

$$\left\{ \begin{array}{l} ma = -\mu' mg, \\ MA = \mu' mg \end{array} \right. \quad \therefore a = -\mu' g, \quad A = \mu' \frac{m}{M} g.$$

^{*14} エネルギー収支： $\frac{1}{2} \cdot 2mv_a^2 - \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 0^2 = \int_x^0 (-kx_A) dx_A = \frac{1}{2}kx^2$

時間追跡： $\left\{ \begin{array}{l} x_A = -x \cos \left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t \right), \\ v_A = x \sqrt{\frac{k}{2m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t \right). \end{array} \right.$

^{*15} 摩擦の向きは滑りが生じる向きと逆向き．

- (6) 滑りが生じなくなったことから 2 物体の速度は等しい。運動量保存則より^{*16},

$$MV + mV = mv_b' \quad \therefore V = \frac{m}{M+m}v_b'.$$

- (7) B の速度が V となる時刻 t を求めて,

$$V = v_b' - \mu'gt \quad \therefore t = \frac{v_b' - V}{g} = \frac{M}{\mu'mg} \frac{m}{M+m}v_b' = \frac{MV}{\mu'mg}.$$

- (8) 全体の力学的エネルギーの変化量を $\Delta E_{\text{全体}}$ とすると,

$$\Delta E_{\text{全体}} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_b'^2 = -\frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m}v_b'^2.$$

よって, 問題文の意味する力学的エネルギーの減少量 ΔE は $\Delta E = -\Delta E_{\text{全体}}$ ゆえ,

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m}v_b'^2.$$

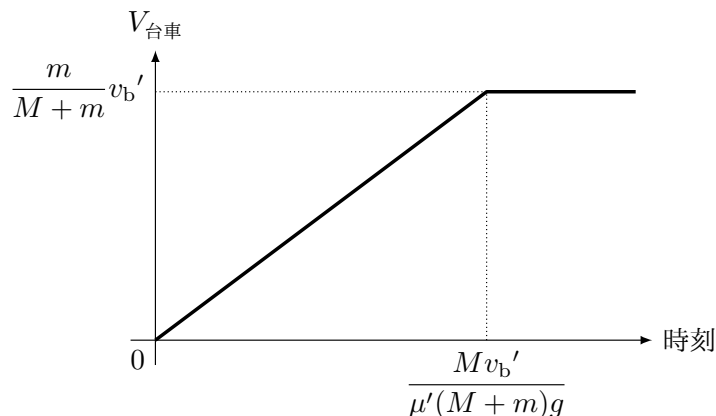
- (9) B の変位を Δx , 台の変位を ΔX とする. このとき, 状況から $\Delta x - \Delta X = \ell$ である. 各物体のエネルギー収支の式は,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_b'^2 = \mu'mg\Delta x \cos \pi, \\ \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}M \cdot 0^2 = \mu'mg\Delta X \cos 0 \end{cases}$$

であり, この 2 式の和を取ることで,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_b'^2 &= -\mu'mg(\Delta x - \Delta X) = -\mu'mg\ell \\ \therefore \ell &= \frac{Mv_b'^2}{2\mu'(M+m)g} = \frac{\Delta E}{\mu'mg}. \end{aligned}$$

- (10) 台が動摩擦力を受け運動を始めてからは等加速度運動を行う. このとき, 時刻 t における台の速度は $V_{\text{台}} = \mu' \frac{m}{M}gt$ と表される. その後 $t = \frac{Mv_b'}{\mu'(M+m)g}$ で滑りが生じなくなり (すなわち動摩擦力が働かなくなり), 速度は一定に保たれる. よって, グラフは以下ようになる.



^{*16} 運動方程式の和を取れば運動量保存則が導出される. 詳しい計算は Day2 で扱った問題 5 の解答を参照.

7. 多体系, 衝突

【メモ】

・多体系の基本は以下 2 式の連立. 運動方程式が解ける場合など例外も損 z 内するが以下 2 式の連立が発想の基本である.

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{全体の力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

【解答】

- (1) 物体のエネルギー収支より,

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mg(h_1 - h_2) \cos 0 \quad \therefore v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

- (2) 運動量保存則, および 2 物体と重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases} mv_C + MV_C = m \cdot 0 + M \cdot 0, \\ \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}MV_C^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}M \cdot 0^2 + mgh_1 \end{cases}$$

$$\therefore v_C = \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}, \quad V_C = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}.$$

- (3) 小球が台上の D を通過するときの小球の位置 x , および台の位置 X を $x = X = 0$ となるように水平右向き x 軸の原点を定める. 衝突以前の小球, および台の位置座標は,

$$\begin{cases} x = v_C t, \\ X = V_C t \end{cases}$$

と書ける. $x - X = a$ となる時刻 t を計算して,

$$x - X = v_C t - V_C t = a \quad \therefore t = \frac{a}{v_C - V_C} = a \sqrt{\frac{M}{2(M+m)gh_1}}.$$

- (4) 小球, および台の衝突直後の速度をそれぞれ v_D, V_D とする. 運動量保存則, および条件 (はね返り係数の式) より,

$$\begin{cases} mv_D + MV_D = 0, \\ v_D - V_D = -e(v_C - V_C) \end{cases} \quad \therefore v_D = -e \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}, \quad V_D = e \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}$$

と求まる. よって, 衝突直後の各物体の速さは,

$$v'_D = |v_D| = e \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}, \quad V'_D = |V_D| = e \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}.$$

- (5) 折り返す瞬間の小球, および台の速度をそれぞれ v , V , 小球の C からの高さを h^* とする. このとき, 折り返しゆえ $v = V$ である^{*17}. 運動量保存則, および 2 物体と重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases} mv + MV = 0, \\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + mgh^* = \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}MV_D^2, \\ v = V \end{cases} \quad \therefore h^* = \underline{\underline{e^2 h_1}}.$$

^{*17} 小球も台も速度の鉛直成分は持たない.

没

【解答】

- (1) O を原点とし、水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸を定める。小球は重力だけを受けて運動するので、加速度は y 軸負方向に大きさ g のみを持つ。したがって、壁と衝突するまでの小球の位置 $\vec{r} = (x, y)$ は、

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0t, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

速度 $\vec{v} = (v_x, v_y)$ は、

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0, \\ v_y = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 - gt \end{cases}$$

と表される。点 P で速度の y 成分が 0 であることから、 $v_y = 0$ を満たす時刻 t を求めて、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}v_0 - gt = 0 \quad \therefore t = \frac{v_0}{\sqrt{2}g}$$

である。この時刻での y 座標が h に等しいので、

$$h = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{\sqrt{2}g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{4g}.$$

- (2) 前問で計算した時刻での x 座標を求めればよいので、

$$L = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{\sqrt{2}g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

- (3) 衝突時 y 方向には力積を受けないので衝突は x 方向のみを考えればよい。固定面との衝突ゆえ運動量は保存せず、条件（はね返り係数の式、 x 方向のみの衝突）だけを考えて、衝突直後の x 方向の速度成分を v_x とすれば、

$$v_x - 0 = -e \left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_0 - 0 \right) \quad \therefore v_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}ev_0$$

と求まる。よって、衝突の前後での小球の運動エネルギー変化は^{*18}、

$$\Delta E = \frac{1}{2}m \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}ev_0 \right)^2 + 0^2 \right\} - \frac{1}{2}m \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_0 \right)^2 + 0^2 \right\} = \frac{1-e^2}{4}mv_0^2.$$

^{*18} 小球と重力場からなる系の力学的エネルギー変化を考えても、衝突の直前・直後で位置エネルギーが変化しないため結果は等しい。

- (4) P で衝突した時刻を改めて $t = 0$ とする. P から A に達する間の位置 $\vec{r} = (x, y)$, 速度 $\vec{c} = (v_x, v_y)$ はそれぞれ,

$$\begin{cases} x = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{\sqrt{2}}ev_0t, \\ y = \frac{v_0^2}{4g} - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}ev_0, \\ v_y = -gt \end{cases}$$

と表される. $y = 0$ となる時刻 t は,

$$\frac{v_0^2}{4g} - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \therefore t = \frac{v_0}{\sqrt{2}g}$$

であり, このときの x 座標を x_1 とすると,

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{ev_0}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{\sqrt{2}g} = \frac{1-e}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

と求まる. A での衝突は y 方向にのみ行われ, 衝突直前の速度の y 成分が $v_y = -g \frac{v_0}{\sqrt{2}g} = -\frac{1}{\sqrt{2}}v_0$ であることから, 衝突直後の速度の y 成分は $v_y = \frac{1}{\sqrt{2}}ev_0$ となる. この時刻を再度 $t = 0$ とし AB 間の運動を考えると, B に達する間の位置 $\vec{r} = (x, y)$, 速度 $\vec{c} = (v_x, v_y)$ はそれぞれ,

$$\begin{cases} x = \frac{1-e}{2} \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{\sqrt{2}}ev_0t, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}ev_0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}ev_0, \\ v_y = \frac{1}{\sqrt{2}}ev_0 - gt \end{cases}$$

と表される. $y = 0$ となる時刻 t は,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}ev_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \therefore t = \frac{\sqrt{2}ev_0}{g}$$

であるから, この時刻での x 座標 x_2 は,

$$x_2 = \frac{1-e}{2} \frac{v_0^2}{g} - \frac{ev_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}ev_0}{g} = \frac{1-e-2e^2}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

となる. $x_2 = 0$ となるような e を求めればよいので,

$$1 - e - 2e^2 = 0 \quad \therefore e = \frac{1}{2} (\because e > 0).$$

- (5) 前問の計算より, AB 間の衝突時間間隔は $\frac{\sqrt{2}ev_0}{g}$ であった. A での衝突を 1 回目の衝突と呼ぶことにする. n 回目の衝突から $n+1$ 回目の衝突直前までを考える. n 回目の衝突直前の速度の y 成分を $-v_{n-1} (< 0)$ とすると, n 回目の衝突直後の速度の y 成分は,

$$v_y - 0 = -e(-v_{n-1} - 0) = ev_{n-1}$$

である． n 回目の時刻を $\tau = 0$ とするような時刻 τ を改めて定義すれば，次の衝突までの小球の y 座標，および速度の y 成分は，

$$\begin{cases} y = ev_{n-1}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2, \\ v_y = ev_{n-1} - g\tau, \end{cases}$$

と書け， $n+1$ 回目の衝突時刻 τ は $y = 0$ を解いて，

$$ev_{n-1}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = 0 \quad \therefore \tau = \frac{2ev_{n-1}}{g}$$

と求まる．よって， $n+1$ 回目の衝突直前の小球の速度の y 成分 $-v_n$ は，

$$\begin{aligned} v_y = -v_n &= ev_{n-1} - g\frac{2ev_{n-1}}{g} = -ev_{n-1} \\ \therefore v_n &= ev_{n-1} = e^2v_{n-2} = \cdots = e^{n-1}v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{n-1}v_0 \end{aligned}$$

と v_n が求まる．よって， n 回目の衝突から $n+1$ 回目の衝突までの時間は改めて，

$$\tau = \frac{2e}{g} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{n-1}v_0 = \frac{\sqrt{2}v_0}{g} e^n$$

と求まる．以上から，A で衝突してから小球のはね返りが収まるまでの時間 t_∞ は，

$$t_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}v_0}{g} e^n = \frac{\sqrt{2}e}{1-e} \frac{v_0}{g}$$

よって，打ち出してから A に達するまでの時間も加えて，

$$T = \frac{\sqrt{2}v_0}{g} + t_\infty = \frac{\sqrt{2}}{1-e} \underbrace{\frac{v_0}{g}}.$$

8. 等速円運動

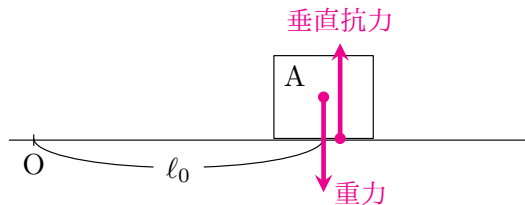
【メモ】

・等速円運動の定石は以下の通り.

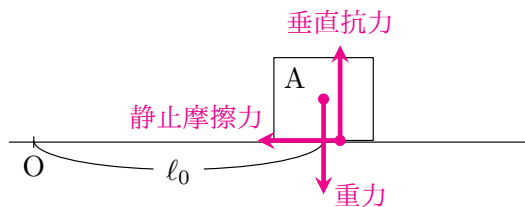
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{運動方程式 (中心成分)} \\ \text{つりあい} \leftarrow \text{使わないことも} \end{array} \right.$$

【解答】

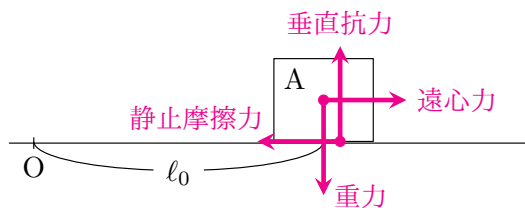
- (1) 回転していないとき面との滑りが生じる可能性はないので、重力、垂直抗力のみ生じる.



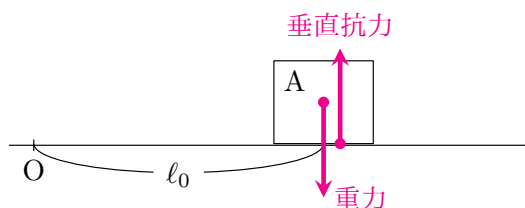
- (2) 回転し始めると面との滑りが生じる可能性があるため、重力、垂直抗力に加え静止摩擦力も生じる.



また、回転座標系では加速度の中心成分に対応する慣性力（遠心力）が生じる．これも加えて図示すればよい．



- (3) 回転していないとき面との滑りが生じる可能性はないので、重力、垂直抗力のみ生じる.



(4) 運動方程式, および鉛直方向のつりあいより,

$$\begin{cases} m \frac{(\ell_0 \omega)^2}{\ell_0} = R, \\ m \cdot 0 = N - mg \end{cases} \quad \therefore N = mg, \quad R = m\ell_0 \omega^2.$$

ここで, $\omega = \omega_0$ のとき滑りが生じることから $R = \mu N$ を考えて,

$$m\ell_0 \omega_0^2 = \mu mg \quad \therefore \mu = \frac{\ell_0 \omega_0^2}{\underbrace{g}}.$$

(5) 題意より, ばね定数 k はつりあいより,

$$0 = k(\ell - \ell_0) - mg \quad \therefore k = \frac{mg}{\ell - \ell_0}$$

と求まる. 角速度 ω のときの静止摩擦力の大きさは, 外側へ滑り出そうとするとき (静止摩擦力は中心向き), 中心側へ滑り出そうとするとき (静止摩擦力は中心向き) それぞれの運動方程式 (中心成分) から,

$$\begin{cases} \text{外側: } m \frac{(\ell \omega)^2}{\ell} = R_{\text{外}} + \frac{mg}{\ell - \ell_0}(\ell - \ell_0), \\ \text{中心: } m \frac{(\ell \omega)^2}{\ell} = -R_{\text{内}} + \frac{mg}{\ell - \ell_0}(\ell - \ell_0) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} R_{\text{外}} = m\ell \omega^2 - mg, \\ R_{\text{内}} = -m\ell \omega^2 + mg \end{cases}$$

と求まる. 両方で滑らない条件を考えて,

$$\begin{cases} R_{\text{外}} = m\ell \omega^2 - mg < \mu mg, \\ R_{\text{内}} = -m\ell \omega^2 + mg < \mu mg \end{cases} \quad \therefore \underbrace{\sqrt{(1 - \mu)\frac{g}{\ell}} \leq \omega \leq \sqrt{(1 + \mu)\frac{g}{\ell}}}_{\text{滑らない条件}}.$$

9. 非等速円運動

【メモ】

・非等速円運動の定石は以下の通り.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{運動方程式 (中心成分)} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{array} \right.$$

・最後 2 問は等加速度運動の時間追跡.

【解答】

(1) 力学的エネルギー保存則より^{*19},

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mgh \quad \therefore v_B = \sqrt{2gh}.$$

(2) 運動方程式 (中心成分), 力学的エネルギー保存則より,

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{v_D^2}{r} = N_D + mg, \\ \frac{1}{2}mv_D^2 + mgr = mg(h - r) \end{array} \right. \quad \therefore v_D = \sqrt{2g(h - 2r)}, \quad N_D = \left(\frac{2h}{r} - 5 \right) mg.$$

(3) 前問に示した.

(4) P がレールから受ける垂直抗力の大きさは D で最小値となるから, $N_D > 0$ であれば接触を保ったまま運動を続ける. よって,

$$\left(\frac{2h}{r} - 5 \right) mg > 0 \quad \therefore h > \frac{5}{2}r (= h_1)$$

と下限 (最小値) が求まる.

(5) CF 間の角度 ϕ ($0 \leq \phi \leq \theta$) にあるときを考える. 運動方程式 (中心成分), 力学的エネルギー保存則は,

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{v^2}{r} = N + mg \sin \phi, \\ \frac{1}{2}mv^2 + mgr \sin \phi = mg(h - r). \end{array} \right.$$

C に達する条件ゆえ, $\phi = 0$ で $v > 0$ となればよく,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - r) > 0 \quad \therefore h > r (= h_2).$$

^{*19} エネルギー収支: $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ -h \end{pmatrix} = mgh$

- (6) 点 F で面から離れることから, $\phi = \theta$ で $N = 0$ である. よって,

$$\begin{cases} m \frac{v_F^2}{r} = 0 + mg \sin \theta, \\ \frac{1}{2} m v_F^2 + mgr \sin \theta = mg(h_F - r). \end{cases} \quad \therefore v_F = \sqrt{gr \sin \theta}, \quad h_F = r + \frac{3}{2} r \sin \theta.$$

- (7) 前問に示した.

- (8) 離れた瞬間の速さは $v_F = \sqrt{gr \sin \frac{\pi}{6}} = \sqrt{\frac{gr}{2}}$ である. よって, 時刻 t での位置は,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} r - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gr}{2}} t, \\ y = \frac{3}{2} r + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{gr}{2}} t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

- (9) $x = 0$ を満たす時刻 $t = T$ は,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} r - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gr}{2}} t = 0 \quad \therefore T = \sqrt{\frac{6r}{g}}$$

であり, このとき,

$$y = \frac{3}{2} r + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{gr}{2}} \sqrt{\frac{6r}{g}} - \frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{6r}{g}} \right)^2 = 0.$$

10. 天体の運動－楕円軌道

【メモ】

- ・円軌道は等速円運動となるため、等速円運動の定石に従う.
- ・非円軌道の定石は以下の通り.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{面積速度保存則} \end{array} \right.$$

求める文字が1文字だけの場合力学的エネルギー保存則だけでよい. また、楕円軌道の周期はケプラー第3法則で求めるのが基本、面積速度保存則を用いても決定できる. なお、ケプラー第3法則を用いる際は「楕円軌道＝円軌道」で用いる.

【解答】

問1 公式より,

$$mg = G \frac{Mm}{R^2} \quad \therefore g = \underbrace{\frac{GM}{R^2}}.$$

問2 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \left(-G \frac{Mm}{2R}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G \frac{Mm}{R}\right) \quad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \underbrace{\sqrt{gR}}.$$

問3 運動方程式（中心成分）より,

$$m \frac{v^2}{2R} = G \frac{Mm}{(2R)^2} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{2R}} = \underbrace{\sqrt{\frac{gR}{2}}}.$$

このとき、円運動の周期 T_0 は $\sqrt{\frac{gR}{2}}$ で $2\pi \cdot 2R$ 進む時間を求めて,

$$T_0 = \frac{4\pi R}{\sqrt{\frac{gR}{2}}} = 4\pi \underbrace{\sqrt{\frac{2R}{g}}}.$$

問4 (1) 面積速度保存則より,

$$\frac{1}{2} \cdot 6RV = \frac{1}{2} \cdot 2Rv \quad \therefore V = \underbrace{\frac{1}{3}}v.$$

(2) 面積速度保存則, および力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 6RV = \frac{1}{2} \cdot 2Rv, \\ \frac{1}{2}mV^2 + \left(-G\frac{Mm}{6R}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{2R}\right) \end{cases}$$

$$\therefore v = \frac{\sqrt{3gR}}{2}, \quad V = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gR}{3}}.$$

問5 地球に衝突せず無限遠にも達しない条件ゆえ, ①無限遠に達しない条件, ②地球に衝突しない条件の2つを考えればよい. まず, ①無限遠に達しない条件を考える. 無限遠での速さ v_∞ が存在しない条件 $\frac{1}{2}mv_\infty^2 < 0$ を考えて*20,

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) < 0 \quad \therefore v < \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}$$

と速さの上限値を得る. 次に②地球に衝突しない条件を考える. 【補足】に示した通り, 点Aが遠地点, Aと反対側にある地表を近地点とするような楕円軌道では近地点で地球と接するのみで, その軌道と地球の外周でそれ以外の共有点は持たない. つまり, 長半径 $\frac{3}{2}R$ の楕円軌道から地球と接触するようになるので, この楕円軌道を取るときの速さを求め, その速さより大きく取れば地球とは接触しない. 長半径 $\frac{3}{2}R$ の楕円軌道において, 近地点での速さを u とすると, 面積速度保存則, および力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}Ru = \frac{1}{2} \cdot 2Rv, \\ \frac{1}{2}mu^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{2R}\right) \end{cases} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{gR}{3}}, \quad u = 2\sqrt{\frac{gR}{3}}$$

であるから, v はこの値より大きく取ればよい. よって, ①, ②より,

$$\sqrt{\frac{gR}{3}} < v < \sqrt{gR}.$$

問6 (1) 考える軌道は長半径 $4R$ の楕円軌道である. 半径 $2R$ の円軌道に対してケプラー第3法則を利用して,

$$\frac{T^2}{(4R)^3} = \frac{T_0^2}{(2R)^3} \quad \therefore T = 2^{\frac{3}{2}}T_0 = 16\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

(2) ケプラー第1法則から, 小物体は地球の中心 O を焦点の1つとした楕円軌道を行う. このとき楕円軌道の長半径は $a = 4R$ で, O を原点としたときの楕円の焦点は $(0,0)$ と $(4R,0)$ で

*20 (観測される) 物理量は実数値を取るため, 2乗して負になるような速さは存在しない.

ある．楕円の定義「焦点からの距離の和が一定の点の集合」から，焦点 $(0,0)$ ， $(4R,0)$ から $(2R,b)$ までの距離の和が $8R$ であることを利用して，

$$2\sqrt{(2R)^2 + b^2} = 8R \quad \therefore b = 2\sqrt{3}R$$

を得る．以上から，面積速度保存則より楕円の面積が πab で与えられることを利用して，

$$\frac{\pi \cdot 4R \cdot 2\sqrt{3}R}{T} = \frac{1}{2} \cdot 2R \frac{\sqrt{3gR}}{2} \quad \therefore T = 16\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

【補足】問 5 の楕円軌道と地球の共有点について

ケプラー第 1 法則から，小物体は地球の中心 O を焦点の 1 つとした楕円軌道を行う．楕円の長半径 a は $a = \frac{3}{2}R$ である．図の直線 AB に沿って x 軸を， x 軸と直交するように紙面下から上向きに y 軸を定め， O を原点とする．地球の外周を表す方程式は，

$$x^2 + y^2 = R^2$$

であり，楕円軌道の方程式は短半径を b とすれば，

$$\frac{(x + R/2)^2}{9R^2/4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

と表せる．ここで，楕円の定義「焦点からの距離の和が一定の点の集合」から，焦点 $(0,0)$ ， $(-R,0)$ から $(-R/2,b)$ までの距離の和が $3R$ であることを利用して，

$$2\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + b^2} = 3R \quad \therefore b = \sqrt{2}R$$

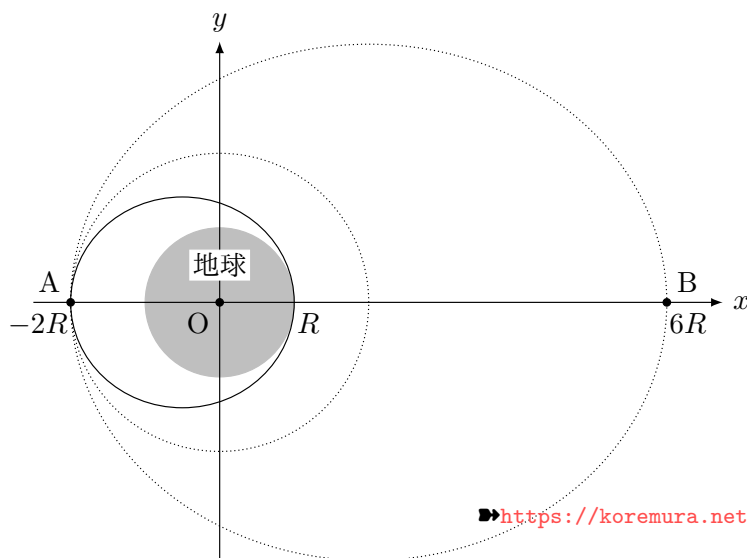
を得る．

よって，楕円の方程式は，

$$\frac{8}{9} \left(x + \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = 2R^2$$

となり，楕円と円の共有点を求めれば，

$$\begin{aligned} 2R^2 - \frac{8}{9} \left(x + \frac{R}{2}\right)^2 &= R^2 - x^2 \\ x^2 - 8Rx + 7R^2 &= 0 \\ (x - 7R)(x - R) &= 0 \\ \therefore x &= R \end{aligned}$$



となり，共有点が $(R, 0)$ のみであることが確認できる^{*21}．

なお，実際に図示してみると右図の実線のようになる．

^{*21} $x = 7R$ は定義域 $-R \leq x \leq R$ の範囲外．

11. 天体の運動－等速円運動

【解答】

[A] (1) 公式より $f = G \frac{Mm}{\underbrace{r_0^2}}$.

(2) 等速円運動ゆえ、円運動の速さ v_0 は運動方程式（中心成分）より、

$$m \frac{v_0^2}{r_0} = G \frac{Mm}{r_0^2} \quad \therefore v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

であるから、円運動の周期 T_0 は、

$$T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{r_0}{GM}}.$$

(3) $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ より、

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{GMm}{\underbrace{2r_0}}.$$

(4) 運動エネルギーと位置エネルギーの和を計算して、

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + \left(-G \frac{Mm}{r_0} \right) = -\frac{GMm}{\underbrace{2r_0}}.$$

(5) $E = -\frac{GMm}{2r_0}$ より、 E が減少するとき r_0 も減少する^{*22}。よって、②が適当。

(6) $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ より、 r_0 が減少すると v_0 は増加する。よって、①が適当。

[B] 題意より、両物体とも角速度が等しい等速円運動を行っている^{*23}。

(1) 月の運動方程式（中心成分）は、

$$m \frac{(r_1 \omega)^2}{r_1} = G \frac{Mm}{r_0^2} = f_{\text{中心}}$$

であり、 $f_{\text{中心}}$ を向心力と呼ぶ。よって、

$$f_{\text{中心}} = G \frac{Mm}{r_0^2} = \underbrace{m r_1 \omega^2}.$$

(2) 月の運動方程式（中心成分）より、

$$m \frac{(r_1 \omega)^2}{r_1} = G \frac{Mm}{r_0^2} \quad \therefore \omega = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{GM}{r_1}}.$$

^{*22} 分母が小さくなると、絶対値付きの数は大きくなる。 E は負符号だからマイナス方向に大きくなる、つまり小さくなる。

^{*23} 等速円運動となることは【背伸びした補足】で示す。

(3) 月と地球の運動方程式（中心成分）より *24,

$$\begin{cases} m \frac{(r_1 \omega)^2}{r_1} = G \frac{Mm}{r_0^2}, \\ M \frac{\{(r_0 - r_1)\omega\}^2}{r_0 - r_1} = G \frac{Mm}{r_0^2} \end{cases} \quad \therefore r_1 = \frac{M}{\underbrace{M+m}} r_0.$$

(4) 角速度 ω で 2π 回転する時間を求めればよい. (2), (3) を用いて,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{r_1}{GM}} = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{r_0}{\underbrace{G(M+m)}}}.$$

*24 2 物体系が静止していることから系の重心速度は 0, すなわち重心は静止している. このことから O が重心と分かり, 重心の定義を用いても同様の結果となる (要するに, 普通に運動方程式から決定できれば良い).

【背伸びした補足】等速円運動を導出する^{*25}

以下の Step1～Step7 に分けて月と地球の軌道を導出する。

■ Step1. 加速度の極座標表示

デカルト座標における x 方向成分の単位ベクトルを $\vec{e}_x$, y 方向成分の単位ベクトルを $\vec{e}_y$ とし, 極座標における r 方向成分の単位ベクトルを $\vec{e}_r$, θ 方向成分の単位ベクトルを $\vec{e}_\theta$ とする. このとき, 加速度 $\vec{a}$ の x 成分を a_x , y 成分を a_y とすると,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$$

と書ける. 同様に, 極座標においても加速度 $\vec{a}$ の r 成分を a_r , θ 成分を a_θ とすると,

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta$$

と書ける. このとき, 両者の関係は右図より以下のようなになる.

$$\begin{cases} a_r = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta, \\ a_\theta = -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta. \end{cases}$$

さて, 位置ベクトルの各成分 x, y の極座標表示は,

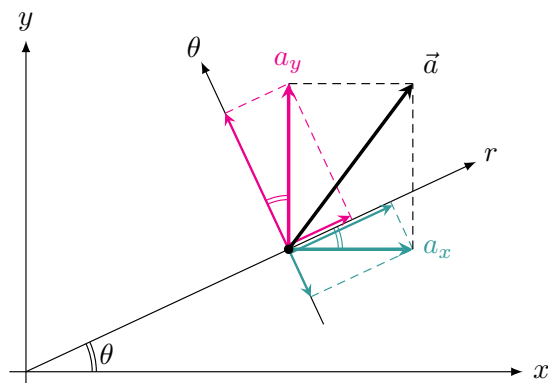
$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

であるから, 速度ベクトルの各成分 $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ は,

$$\begin{cases} v_x = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \\ v_y = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

となり, 加速度ベクトル $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$ は,

$$\begin{cases} a_x = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta, \\ a_y = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{cases}$$



^{*25} 高校範囲を逸脱しているので（と言っても大学1年生のレポート課題レベル）「わかったらなんか楽しそう！」くらいに見てくればいいです。こういうのを書いている（計算している）とき、とても楽しいです。書いているとき、珍しく僕の目はキラキラしています。

となる．ここで， $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に注意して整理すれば^{*26}，

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

を得る．これが加速度の（2次元）極座標表示である．例えば，円運動では r が定数値を取ることから $\dot{r} = 0$ ゆえ，

$$\begin{cases} a_r = -r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2 = -\frac{v^2}{r}, \\ a_\theta = r\ddot{\theta} = r\frac{dv}{dt} \end{cases}$$

となり，高校で習う円運動の加速度と一致する．

■ Step2. 連星系の運動方程式

月（質量 m ）の位置ベクトルを $\vec{r}$ ，地球（質量 M ）の位置ベクトルを $\vec{R}$ とすると，各物体の運動方程式は以下ようになる．

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = -\frac{GMm}{|\vec{r} - \vec{R}|^2} \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|}, \\ M\ddot{\vec{R}} = +\frac{GMm}{|\vec{r} - \vec{R}|^2} \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|}. \end{cases}$$

■ Step3. 連星の重心と相対座標，運動方程式の書き換え

2 式の運動方程式の和を取り，両辺を t で積分すれば

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} + M\ddot{\vec{R}} &= \vec{0} \\ \frac{d}{dt} (m\dot{\vec{r}} + M\dot{\vec{R}}) &= \vec{0} \\ \therefore m\dot{\vec{r}} + M\dot{\vec{R}} &= m\dot{\vec{r}}(0) + M\dot{\vec{R}}(0) \\ \frac{d}{dt} (m\dot{\vec{r}} + M\dot{\vec{R}}) &= m\dot{\vec{r}}(0) + M\dot{\vec{R}}(0) \\ \therefore m\vec{r} + M\vec{R} &= m\vec{r}(0) + M\vec{R}(0) + \{m\dot{\vec{r}}(0) + M\dot{\vec{R}}(0)\}t \end{aligned}$$

を得る．この両辺を $m + M$ で割れば，

$$\frac{m\vec{r} + M\vec{R}}{m + M} = \frac{m\vec{r}(0) + M\vec{R}(0)}{m + M} + \frac{m\dot{\vec{r}}(0) + M\dot{\vec{R}}(0)}{m + M}t$$

と重心が等速度で運動することも確認できる．

^{*26} 速度の（2次元）極座標表示は右の通り： $\begin{cases} v_r = \dot{r}, \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \iff \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$

今, $t = 0$ で重心座標が $\vec{0}$ にあり, 系の運動量が $\vec{0}$ (重心速度が 0) であるから,

$$m\vec{r} + M\vec{R} = \vec{0} \quad \therefore \vec{R} = -\frac{m}{M}\vec{r}$$

を得る. よって, 相対座標は,

$$\vec{r} - \vec{R} = \vec{r} - \left(-\frac{m}{M}\vec{r}\right) = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\vec{r}$$

と表され, 月の運動方程式は $r = |\vec{r}|$ として,

$$\ddot{\vec{r}} = -\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

と書き直せる.

■ Step4. 運動方程式を極座標で記述する

加速度の極座標表示は

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

であり, 位置ベクトル $\vec{r}$ は $\vec{r} = r\vec{e}_r$ であるから, 月の運動方程式より,

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta = -\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \frac{GM}{r^3}\vec{e}_r + 0 \cdot \vec{e}_\theta$$

と表され, 各成分は以下の微分方程式に帰着する.

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \frac{GM}{r^3}, \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \frac{GM}{r^3}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0. \end{cases}$$

■ Step5. θ 方向の微分方程式を解く

動径方向の運動方程式は,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0$$

である. $r^2\dot{\theta}$ を微分して 0 になることから, $r^2\dot{\theta}$ が定数値を取ることが分かり

$$h = r^2\dot{\theta}$$

と定義する*27. この h の値は初期条件によって決まり, この問題では $t = 0$ で $r(0) = r_1 = \frac{M}{M+m}r_0$, $r(0)\dot{\theta}(0) = r_1\omega = \frac{r_1}{r_0}\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$ であるから,

$$h = r^2\dot{\theta} = r_1^2\omega = \frac{r_1^2}{r_0}\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

となる. これは最終結果で用いる.

■ Step6. r 方向の微分方程式を解く

半径方向の微分方程式は,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \frac{GM}{r^3}$$

である. ここで $\rho = \frac{1}{r}$ と変数変換することを考える. 各項について, $\dot{\theta}$ は h の式から,

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = h\rho^2$$

となる. 続いて $\ddot{r}$ は, まず $\dot{r}$ が

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) h\rho^2 = h\rho^2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{d\rho}{d\theta} = -h \frac{d\rho}{d\theta}$$

となるので,

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left(-h \frac{d\rho}{d\theta} \right) = -h \frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right) = -h \frac{d}{d\theta} \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -h \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \cdot h\rho^2 = -h^2\rho^2 \frac{d^2\rho}{d\theta^2}$$

を得る. したがって, 半径方向の微分方程式は,

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = -\rho + \frac{M}{M+m} \frac{GM}{h^2}$$

と角振動数 1, 振動中心 $-\frac{M}{M+m} \frac{GM}{h^2}$ の単振動の微分方程式に帰着する. よって, 積分定数を A , θ_0 と取れば*28,

$$\rho = \frac{M}{M+m} \frac{GM}{h^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

を得て, これを r へ直せば,

$$r = \frac{1}{\frac{M}{M+m} \frac{GM}{h^2} + A \cos(\theta - \theta_0)}$$

*27 $\frac{1}{2}h$ を面積速度と呼ぶ.

*28 加法定理で分解すれば普段学習している通り $\sin$ と $\cos$ の線形結合となる.

と求まる．これは円錐曲線（二次曲線）を表す極方程式である．

■ Step7. 初期条件を代入し A を求める，そして円軌道を示す

Step6 の計算から

$$\rho = \frac{M}{M+m} \frac{GM}{h^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

ゆえ，両辺を θ で微分すれば，

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -A \sin(\theta - \theta_0)$$

となる．ここで $\rho = \frac{1}{r}$, $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{h}$ を用いれば，

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\rho - \frac{M}{M+m} \frac{GM}{h^2} \right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{r} - \frac{M}{M+m} \frac{GM}{h^2} \right)^2 + \left(-\frac{\dot{r}}{h} \right)^2 \\ &= \frac{1}{r^2} + \frac{G^2 M^2}{h^4} \left(\frac{M}{M+m} \right)^4 - \frac{2GM}{h^2} \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 \frac{1}{r} + \left(\frac{\dot{r}}{h} \right)^2 \end{aligned}$$

と書ける．初期条件は $t = 0$ で $r = r_1$ であり， r 方向に運動していないことから $\dot{r} = 0$ である．

$h = \frac{r_1^2}{r_0} \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$, $\frac{r_1}{r_0} = \frac{M}{M+m}$ を用いて，

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{r^2} + \frac{G^2 M^2}{h^4} \left(\frac{M}{M+m} \right)^4 - \frac{2GM}{h^2} \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 \frac{1}{r} + \left(\frac{\dot{r}}{h} \right)^2 \\ &= \frac{1}{r_1^2} + \frac{G^2 M^2}{\left(\frac{r_1^2}{r_0} \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \right)^4} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^4 - \frac{2GM}{\left(\frac{r_1^2}{r_0} \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \right)^2} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 \frac{1}{r_1} + 0^2 \\ &= \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1^2} - \frac{2}{r_1^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

と求まる．よって，これを r の式へ代入すれば，

$$r = \frac{1}{\frac{M}{M+m} \frac{GM}{h^2}} = r_1$$

と求まり，月の軌道半径は一定値 r_1 を取る（すなわち円軌道である）ことが分かる．また，地球の軌道半径 $R = |\vec{R}|$ は，

$$R = \left| -\frac{m}{M} \vec{r} \right| = \frac{m}{M} r_1$$

と一定値を取ることが分かる．

12. 単振動

【メモ】

- ・ 高校範囲で時間追跡可能な運動は①等加速度運動，②単振動，③空気抵抗型（指数関数型）の3通りである．特に①，②については時間追跡とエネルギーの両方で解くことができる．
- ・ 解答は最短経路で書いたが，理想的な解答は【補足1】，【補足2】の計算である．これを自らの手で再現することで基礎の定着を徹底したい．
- ・ 今回の場合，(3)～(5)については時刻 t を問われているため時間追跡で考えるのが良い．(6)～(8)に関しては t が問われていないのでエネルギーで考えるのが楽．
- ・ 仕事 W の計算は以下のように分類される．

$$W = \begin{cases} \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が既知} \rightarrow \text{定義から直接計算} \\ \rightarrow \begin{cases} f \text{ 一定の場合: } \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} = |f| |\Delta x| \cos \theta (\Delta x: \text{変位}) \\ f \text{ が一定出ない場合: } (f \text{ の } x \text{ 積分}) = (f-x \text{ グラフの面積}) \end{cases} \\ \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が不明} \rightarrow \text{エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

【解答】

- (1) 垂直抗力の大きさを N ，静止摩擦力の大きさを R とする． $x = d$ で静止摩擦力の大きさは最大静止摩擦力に等しくなることから $R = \mu N$ で，物体のつりあいより，

$$\begin{cases} m \cdot 0 = -kd + R, \\ m \cdot 0 = N - mg \end{cases} \quad \therefore \mu = \frac{R}{N} = \frac{kd}{\underline{mg}}.$$

- (2) 物体が左向きに滑るときの運動方程式は，

$$ma = -kx + \mu' N = -kx + \mu' mg$$

である．よって，物体のエネルギー収支より $x = x_0$ で $v = 0$ ， $x = x_1$ で $v = 0$ であることから，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= \int_{x_0}^{x_1} (-kx + \mu' mg) dx \\ 0 &= -\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_0^2) + \mu' mg(x_1 - x_0) \\ \therefore \mu' &= \frac{k(x_0 + x_1)}{\underline{2mg}}. \end{aligned}$$

- (3) 前問に記した運動方程式に μ' を代入して，

$$\underline{ma = -kx + \frac{1}{2}k(x_0 + x_1)}.$$

(4) 運動方程式より

$$ma = -k \left(x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right) \quad \therefore a = -\frac{k}{m} \left(x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right)$$

であるから、 x 軸負方向へ滑るときは角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 、振動中心 $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$ の単振動の一部分の運動を行う。考える時間は単振動の半周期だから、

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

(5) 振動中心で速さが最大となることから求める位置は $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$ である。よって、振動の振幅 A_1 は最大変位 $x = x_0$ (または $x = x_1$) と振動中心の差から計算して、

$$A_1 = x_0 - \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{x_0 - x_1}{2}$$

である。速さの最大値は「(振幅) × (角振動数)」と計算できるから、

$$|v|_{\max} = A_1 \omega = \frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

(6) 振動中心で速さが最大となることから、運動方程式より $x = -\frac{x_0 + x_1}{2}$ で速さは最大となる。

(7) 振動の振幅 A_2 は最大変位 $x = x_1$ と振動中心の差から計算して、

$$A_2 = -\frac{x_0 + x_1}{2} - x_1 = -\frac{x_0 + 3x_1}{2}$$

である。よって、折り返す位置 x_2 は、

$$x_2 = -\frac{x_0 + x_1}{2} + A_2 = -x_0 - 2x_1.$$

(8) $x_0 = \frac{7}{2}d$, $x_1 = -\frac{5}{2}d$ のとき, $\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{d}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}d$ である。このとき x 軸正方向へ滑るときの運動方程式は、

$$ma = -kx + \mu' mg = -kx + \frac{1}{2}k(x_0 + x_1) = -k \left(x - \frac{d}{2} \right)$$

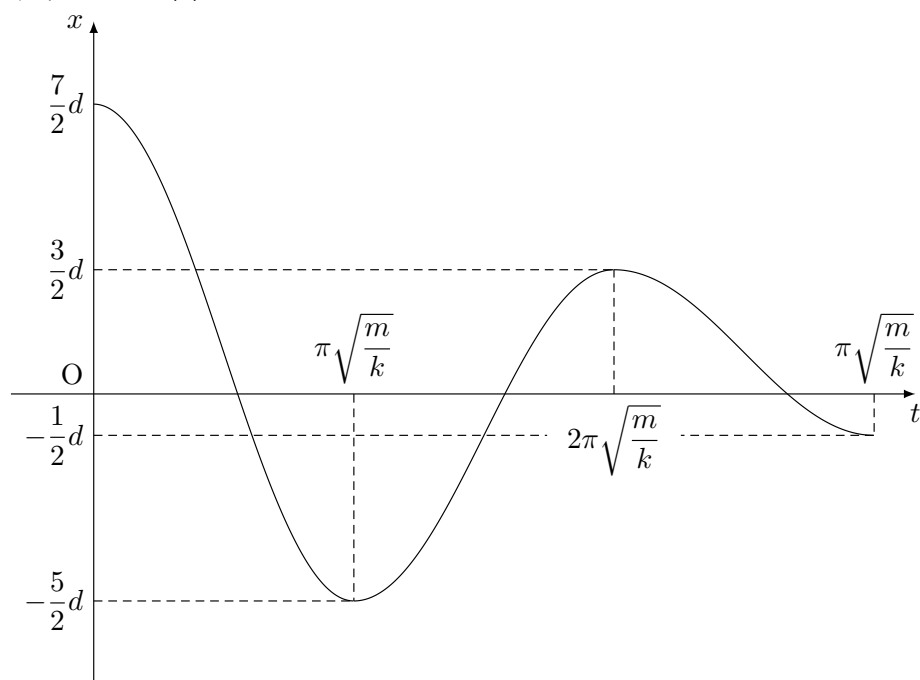
であるから、物体のエネルギー収支より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= \int_{\frac{3}{2}d}^{x_3} \left\{ -k \left(x - \frac{d}{2} \right) \right\} dx \\ 0 &= -\frac{1}{2}k \left(x_3 - \frac{d}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}kd^2 \quad \therefore x_3 = -\frac{d}{2}, \frac{3}{2}d \end{aligned}$$

であり、 $x \neq x_2 = \frac{3}{2}d$ より、

$$x = -\frac{d}{2}.$$

- (9) $|x_3| < d$ より x_3 に達した後物体は静止する．運動方程式より， x 軸負方向へ滑るときの振動中心は $x = \frac{d}{2}$ ， x 軸正方向へ滑るときの振動中心は $x = -\frac{d}{2}$ であり，これまでの結果を踏まえれば以下のような図になる．



【補足1】各設問を時間追跡で解く

(2): 運動方程式より

$$ma = -kx + \mu' mg \quad \therefore a = -\frac{k}{m} \left(x - \frac{\mu' mg}{k} \right)$$

であり, 角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 振動中心 $x = \frac{\mu' mg}{k}$ と求まる. 初期条件 $x = x_0$, $v = 0$ より, 物体の位置 x , および速度 v は,

$$\begin{cases} x = \frac{\mu' mg}{k} + \left(x_0 - \frac{\mu' mg}{k} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = - \left(x_0 - \frac{\mu' mg}{k} \right) \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

と表される. $v = 0$ となる時刻 t での位置 x が x_1 であるから, まず $v = 0$ となる t を求め,

$$- \left(x_0 - \frac{\mu' mg}{k} \right) \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) = 0 \quad \therefore t = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

よって, このとき $x = x_1$ で,

$$x_1 = \frac{\mu' mg}{k} + \left(x_0 - \frac{\mu' mg}{k} \right) \cos \pi \quad \therefore \mu' = \frac{k(x_0 + x_1)}{\underbrace{2mg}}.$$

(4): 運動方程式より,

$$ma = -k \left(x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right) \quad \therefore a = -\frac{k}{m} \left(x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right)$$

であり, x 軸負方向へ滑るときは角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 振動中心 $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$ の単振動の一部分の運動を行う. したがって, 未知定数を C , D とすれば時刻 t における物体の位置 x , および速度 v は,

$$\begin{cases} x = \frac{x_0 + x_1}{2} + C \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + D \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = C \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - D \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

と書ける. 未知定数 C , D は初期条件 $x(0) = x_0$, $v(0) = 0$ より決定され,

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x_0 + x_1}{2} + D, \\ 0 = C \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad \therefore C = 0, \quad D = \frac{x_0 - x_1}{2}$$

と求まる. よって, 位置 x , 速度 v はそれぞれ以下のようになる.

$$\begin{cases} x = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = -\frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

$x = x_1$ を満たす時刻 t ($v = 0$ を満たす時刻 t) を求めて*29,

$$\begin{aligned} \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) &= x_1 \\ \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) &= -1 \quad \therefore t_1 = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} (= t_1). \end{aligned}$$

(5): 前問の計算から時刻 t における物体の位置 x , および速度 v は,

$$\begin{cases} x = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = -\frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

と表せた. よって, 速さ $|v|$ が最大値 (振幅値) $|v|_{\max} = \frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$ を取る時刻は,

$$\begin{aligned} -\frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) &= \pm \frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) &= 1 \quad \therefore t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

であり*30, このときの位置 x は,

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{x_0 + x_1}{2}.$$

(6): 考えている時間は $t \geq t_1$ である. 運動方程式より,

$$ma = -kx - \mu' mg = -k \left(x + \frac{x_0 + x_1}{2} \right) \quad \therefore a = -\frac{k}{m} \left(x + \frac{x_0 + x_1}{2} \right)$$

であり, x 軸正方向へ滑るときは角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 振動中心 $x = -\frac{x_0 + x_1}{2}$ の単振動の一部分の運動を行う. したがって, 未知定数を C, D とすれば時刻 t における物体の位置 x , および速度 v は,

$$\begin{cases} x = -\frac{x_0 + x_1}{2} + C \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} + D \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\}, \\ v = C \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} - D \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} \end{cases}$$

*29 $v = 0 : \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t_1 \right) = 0 \quad \therefore t_1 = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$

*30 1 回目に速さが最大となった時刻が求める時刻である. 折り返し後は運動方程式が変わるため, 時刻 t における物体の位置 x や速度 v の表式も変わることに注意.

と書ける^{*31}．未知定数 C, D は初期条件 $x(t_1) = x_1, v(t_1) = 0$ より決定され、

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{x_0 + x_1}{2} + D, \\ 0 = C\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad \therefore C = 0, \quad D = \frac{x_0 + 3x_1}{2}$$

と求まる．よって、位置 x 、速度 v はそれぞれ以下のようになる．

$$\begin{cases} x = -\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 + 3x_1}{2} \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\}, \\ v = -\frac{x_0 + 3x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} \end{cases}$$

以上から、 $|v|$ が最大値（振幅値）を取る時刻は、

$$-\frac{x_0 + 3x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} = \pm \frac{x_0 + 3x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore t = t_1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

であり^{*32}、このとき、

$$x = -\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 + 3x_1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \underbrace{-\frac{x_0 + x_1}{2}}_{\text{}}.$$

(7)：前問の計算から時刻 t における物体の位置 x 、および速度 v は、

$$\begin{cases} x = -\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 + 3x_1}{2} \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\}, \\ v = -\frac{x_0 + 3x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} \end{cases}$$

と表せた．よって、 $v = 0$ となる時刻は、

$$-\frac{x_0 + 3x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} = 0 \quad \therefore t = t_1 + \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

であり、このとき、

$$x = -\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 + 3x_1}{2} \cos \pi = \underbrace{-x_0 - 2x_1}_{\text{}}.$$

^{*31} $t - t_1$ の表現が分かりにくい場合は、 $x = x_1$ に達した瞬間 ($t = t_1$ のとき) を再度 $t = 0$ として考えてもよい．その場合、位置 x 、速度 v は以下のようになる．

$$\begin{cases} x = -\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 + 3x_1}{2} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = -\frac{x_0 + 3x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

^{*32} 先ほど同様、1 回目に速さが最大となった時刻が求める時刻である．

(8): 考えている時間は $t \geq 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} (= t_2)$ である. また, $x_0 = \frac{7}{2}d$, $x_1 = -\frac{5}{2}d$ より $\frac{x_0+x_1}{2} = \frac{d}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}d$ である. x 軸負方向へ滑ることから (2)~(5) と同じ運動方程式となり, 角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 振動中心 $x = \frac{d}{2}$ の単振動の一部分の運動を行う. したがって, 未知定数を C, D とすれば時刻 t における物体の位置 x , および速度 v は,

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2} + C \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\} + D \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\}, \\ v = C \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\} - D \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\} \end{cases}$$

と書ける^{*33}. 未知定数 C, D は初期条件 $x(t_2) = x_2 = -x_0 - 2x_1$, $v(t_2) = 0$ より決定され,

$$\begin{cases} \frac{3}{2}d = \frac{d}{2} + D, \\ 0 = C \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad \therefore C = 0, \quad D = d$$

と求まり, 位置 x , 速度 v はそれぞれ以下のようにになる.

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2} + d \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\}, \\ v = d \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\} \end{cases}$$

以上から, $v = 0$ となる時刻は,

$$d \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\} = 0 \quad \therefore t = t_2 + \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 3\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

であり^{*34}, このとき,

$$x = \frac{d}{2} + d \cos \pi = \underbrace{-\frac{d}{2}}$$

^{*33} $t - t_2$ の表現が分かりにくい場合は, $x = x_2$ に達した瞬間 ($t = t_2$ のとき) を再度 $t = 0$ として考えてもよい. その場合, 位置 x , 速度 v は以下のようにになる.

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2} + d \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\}, \\ v = d \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\} \end{cases}$$

^{*34} これまで同様, 1 回目に速さが最大となった時刻が求める時刻である.

【補足2】各設問を物体のエネルギー収支で解く

(2) : 解答をエネルギー収支で書いた.

(4) : 時刻 t はエネルギー収支では求まらない.

(5) : 物体が左へ滑るとき, 運動方程式は,

$$ma = -kx + \mu' mg = -kx - \frac{1}{2}k(x_0 + x_1) = -k\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right).$$

よって, 位置 x にあるときの物体の速さを v とすると, 物体のエネルギー収支より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= \int_{x_0}^x \left\{ -k\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right) \right\} dx \\ \frac{1}{2}mv^2 &= -\frac{1}{2}k\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_0 - x_1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

と求まる. 第1項が0となるとき速さ v (左辺) は最小値となるので, 求める位置は $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$ である. このとき

$$\frac{1}{2}mv^2 = 0 + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_0 - x_1}{2}\right)^2 \quad \therefore |v| = \frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

(6) : 物体が右へ滑るとき, 物体の運動方程式は,

$$ma = -kx - \mu' mg = -kx - \frac{1}{2}k(x_0 + x_1) = -k\left(x + \frac{x_0 + x_1}{2}\right).$$

よって, 位置 x にあるときの物体の速さを v とすると, 物体のエネルギー収支より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= \int_{x_1}^x \left\{ -k\left(x + \frac{x_0 + x_1}{2}\right) \right\} dx \\ \frac{1}{2}mv^2 &= -\frac{1}{2}k\left(x + \frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_0 + 3x_1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

と求まる. 第1項が0となるとき速さ v (左辺) は最小値となるので, 求める位置は $x = -\frac{x_0 + x_1}{2}$ である.

(7) : 前問より, 位置 x にあるときの物体の速さを v としたとき物体のエネルギー収支を計算すると

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}k\left(x + \frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_0 + 3x_1}{2}\right)^2$$

であった. 題意より $v = 0$ を解いて,

$$0 = -\frac{1}{2}k\left(x + \frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_0 + 3x_1}{2}\right)^2 \quad \therefore x = \underline{\underline{-x_0 - 2x_1}} (= x_2).$$

(8) : $x_2 = -x_0 - 2x_1 = \frac{3}{2}d$, $\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{d}{2}$ である. 再度物体が左へ滑るときを考えるので, 物体のエネルギー収支より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= \int_{\frac{3}{2}d}^{x_3} \left\{ -k \left(x - \frac{d}{2} \right) \right\} dx \\ 0 &= -\frac{1}{2}k \left(x_3 - \frac{d}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}kd^2 \quad \therefore x_3 = \underbrace{-\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

【補足3】各設問を力学的エネルギー収支で解く

(2) : 物体とばねからなる系の力学的エネルギー収支より,

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 \right)}_{\text{運動エネルギー変化}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 \right)}_{\text{弾性エネルギー変化}} &= \vec{f}_{\text{摩擦}} \cdot \Delta x \\ &= \begin{pmatrix} \mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mu' mg(x_1 - x_0) \\ \therefore \mu' &= \underbrace{\frac{k(x_0 + x_1)}{2mg}}. \end{aligned}$$

(4) : 時刻 t は力学的エネルギー収支では求まらない.

(5) : 位置 x にあるときの物体の速さを v とすると, 物体とばねからなる系の力学的エネルギー収支は,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 \right) + \left(\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 \right) &= \begin{pmatrix} \mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mu' mg(x - x_0) \\ &= \frac{k}{2}(x_0 + x_1)(x - x_0) \\ \therefore \frac{1}{2}mv^2 &= -\frac{1}{2}k \left(x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}k \left(\frac{x_0 + x_1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

と整理できる. 第1項が0となるとき速さ v (左辺) は最小値となるので, 求める位置は $x = \underbrace{\frac{x_0 + x_1}{2}}$ で

ある. このとき

$$\frac{1}{2}mv^2 = 0 + \frac{1}{2}k \left(\frac{x_0 - x_1}{2} \right)^2 \quad \therefore |v| = \underbrace{\frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

(6) : 位置 x にあるときの物体の速さを v とすると, 物体とばねからなる系の力学的エネルギー収支は,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 \right) + \left(\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \right) &= \begin{pmatrix} -\mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\mu' mg(x - x_1) \\ &= -\frac{k}{2}(x_0 + x_1)(x - x_1) \\ \therefore \frac{1}{2}mv^2 &= -\frac{1}{2}k \left(x + \frac{x_0 + x_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}k \left(\frac{x_0 + 3x_1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

と整理できる. 第 1 項が 0 となるとき速さ v (左辺) は最小値となるので, 求める位置は $x = -\frac{x_0 + x_1}{2}$ である.

(7) : 物体とばねからなる系の力学的エネルギー収支より,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 \right) + \left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \right) &= \begin{pmatrix} -\mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\mu' mg(x_2 - x_1) \\ &= -\frac{k}{2}(x_0 + x_1)(x_2 - x_1) \\ \therefore x_2 &= \underline{\underline{-x_0 - 2x_1}}. \end{aligned}$$

(8) : $x_2 = -x_0 - 2x_1 = \frac{3}{2}d$, $\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{d}{2}$ である. 物体とばねからなる系の力学的エネルギー収支より,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 \right) + \left(\frac{1}{2}kx_3^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \right) &= \begin{pmatrix} \mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mu' mg(x_3 - x_2) \\ &= \frac{k}{2}(x_0 + x_1)(x_3 - x_2) \\ \therefore x_3 &= \underline{\underline{-\frac{d}{2}}}. \end{aligned}$$

13. 単振動の時間追跡, 衝突

【メモ】

・衝突は以下2種の式を連立.

$$\begin{cases} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{cases}$$

【解答】

問1(ア) 運動量保存則は,

$$\underline{mv_A + Mv_B = Mv_0}.$$

(イ) 運動量保存則, および条件 (1次元弾性衝突^{*35}) より,

$$\begin{cases} mv_A + Mv_B = Mv_0, \\ v_A - v_B = -(0 - v_0) \end{cases} \quad v_A = \frac{2M}{M+m}v_0, \quad v_B = \frac{M-m}{M+m}v_0.$$

(ウ) 題意より,

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{M-m}{2M} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m}{M}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

問2 物体Aのエネルギー収支より^{*36*37},

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_0^L (-kx) dx = -\frac{1}{2}kL^2 \quad \therefore L = \underline{v_A \sqrt{\frac{m}{k}}}.$$

問3(ア) 物体Aの運動方程式よりAの加速度 a は,

$$ma_A = -kx \quad \therefore a_A = -\frac{k}{m}x.$$

よって, 初期条件 $x_A(0) = 0, v_A(0) = v_A$ より,

$$\underline{x_A(t) = v_A \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)}.$$

^{*35} 1次元弾性衝突ははね返り係数1の式を使ってよい. 単に弾性衝突をそのまま読んで以下のように立式をしても解ける.

^{*36} 時間追跡 $v_A(t) = 0$ を解いて x_A へ代入:
$$\begin{cases} x_A(t) = v_A \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v_A(t) = v_A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

^{*37} 力学的エネルギー保存則: $\frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2$

- (イ) 物体 B は水平方向に外力を受けないので加速度の水平成分は 0 である. $t = 0$ で $x_B(0) = 0$, $v_B(0) = 0$ より,

$$x_B(t) = \underbrace{v_B t}.$$

問 4(ア) $x_A = \frac{L}{2}$ より, $L = v_A \sqrt{\frac{m}{k}}$ を踏まえて,

$$\begin{aligned} v_A \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) &= \frac{v_A}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \\ \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) &= \frac{1}{2} \quad \therefore t = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{m}{k}}, \frac{5\pi}{6} \sqrt{\frac{m}{k}}, \dots \end{aligned}$$

を得る. ばねが最も縮んだ後再衝突をしたことから求める時刻 t は $\frac{1}{4}$ 周期後, すなわち $t \geq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$ であるから求める時刻は

$$t = \frac{5}{6} \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

- (イ) このとき B の位置も $x_B = \frac{L}{2} = \frac{v_A}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$ で, $v_A = \frac{2M}{M+m} v_0$, $v_B = \frac{M-m}{M+m} v_0$ より,

$$\frac{M-m}{M+m} v_0 \cdot \frac{5}{6} \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{M}{M+m} v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \therefore p = \frac{M}{m} = \frac{5\pi}{\underbrace{5\pi-6}}.$$

問 5 問 3 より時刻 t における各物体の速度 $v_A(t)$, $v_B(t)$ は, それぞれの位置を時刻 t で微分して,

$$\begin{cases} v_A(t) = v_A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v_B(t) = v_B. \end{cases}$$

v_A が $+\cos$ 型で, $v_B > 0$ のものを選択すれば (エ) となる.

なお, 改めて確認しなくてもよいが, $p = \frac{5\pi}{5\pi-6}$ の下では,

$$v_A = \frac{2M}{M+m} v_0 = \frac{5\pi}{5\pi-3} v_0, \quad v_B = \frac{M-m}{M+m} v_0 = \frac{3}{5\pi-3} v_0$$

であるから,

$$\begin{cases} v_A(t) = \frac{5\pi}{5\pi-3} v_0 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v_B(t) = \frac{3}{5\pi-3} v_0 \end{cases}$$

と v_B が確認できる*38.

*38 $x = \frac{L}{2}$ で衝突している時点で $v_B > 0$ は明らか.

14. 荷電粒子の運動（静電場）

【メモ】

・ 仕事 W の計算は以下のように分類される.

$$W = \begin{cases} \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が既知} \rightarrow \text{定義から直接計算} \\ \rightarrow \begin{cases} f \text{ 一定の場合} : \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} = |f| |\Delta x| \cos \theta (\Delta x : \text{変位}) \\ f \text{ が一定出ない場合} : (f \text{ の } x \text{ 積分}) = (f - x \text{ グラフの面積}) \end{cases} \\ \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が不明} \rightarrow \text{エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

【解答】

問 1 平行一様電場における電場と電位の関係より,

$$\phi_Q = 0, \quad \phi_P = \underline{\underline{-Ed}}.$$

問 2 大きさ一定の力のみを受けているので, 仕事の定義より,

$$W = \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} qE \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \cos \theta \\ d \sin \theta \end{pmatrix} = \underline{\underline{qEd \cos \theta}}.$$

問 3 前問同様に仕事の定義より,

$$W = \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} qE \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d - d \cos \theta \\ d \sin \theta \end{pmatrix} = \underline{\underline{qEd(1 - \cos \theta)}}.$$

問 4 (1) 加速度の x 成分, y 成分をそれぞれ a_x , a_y とすると, 運動方程式より,

$$\begin{cases} ma_x = qE, \\ ma_y = -mg \end{cases} \quad \therefore a_x = \frac{qE}{m}, \quad a_y = -g.$$

加速度成分がともに一定であることから, 時刻 t における粒子の位置は,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2, \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

と表せる. よって, 求める時刻 t は $y = 0$ を解いて,

$$h - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \quad \therefore t = \sqrt{\underline{\underline{\frac{2h}{g}}}}.$$

(2) 時刻 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ における位置 x を求めて,

$$x = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \cdot \frac{2h}{g} = \underline{\underline{\frac{qE}{mg} h}}.$$

(3) 加速度一定より時刻 t における速度成分は,

$$\begin{cases} v_x = \frac{qE}{m}t, \\ v_y = -gt \end{cases}$$

と表せるので運動エネルギーは,

$$K = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m \left\{ \left(\frac{qE}{m} \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^2 + (\sqrt{2gh})^2 \right\} = \underbrace{\left\{ 1 + \left(\frac{qE}{mg} \right)^2 \right\}}_{\text{~~~~~}} mgh.$$

問5 仕事の定義より,

$$W = \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} qE \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{qE}{mg}h \\ -h \end{pmatrix} = \underbrace{\left\{ 1 + \left(\frac{qE}{mg} \right)^2 \right\}}_{\text{~~~~~}} mgh.$$

なお, 問4(3) はエネルギー収支の式より $K = W$ と求めることができる.

問6 公式より, O で位置エネルギーが0であることに留意して,

$$U_A = mgh + q \cdot 0 = \underbrace{mgh},$$

$$U_B = mg \cdot 0 + q \left(-E \frac{qE}{mg} h \right) = -\underbrace{\frac{(qE)^2}{mg} h}.$$

なお, 問4(3) は力学的エネルギー保存則より,

$$K_B + U_B = K_A + U_A$$

$$\therefore K_B - \frac{(qE)^2}{mg} h = 0 + mgh \quad \therefore K_B = mgh + \frac{(qE)^2}{mg} h = \left\{ 1 + \left(\frac{qE}{mg} \right)^2 \right\} mgh$$

と求めることができる.

14. 荷電粒子の運動（静電場）

【メモ】

・仕事 W の計算は以下のように分類される.

$$W = \begin{cases} \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が既知} \rightarrow \text{定義から直接計算} \\ \rightarrow \begin{cases} f \text{ 一定の場合: } \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} = |f| |\Delta x| \cos \theta (\Delta x: \text{変位}) \\ f \text{ が一定出ない場合: } (f \text{ の } x \text{ 積分}) = (f-x \text{ グラフの面積}) \end{cases} \\ \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が不明} \rightarrow \text{エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

エネルギー収支を用いた計算は、どこまでを 1 つの系とみなすかが重要.

【解答】

問 1 電場の x 軸成分は相殺し 0. 公式より,

$$E_C = \frac{kQ}{a^2 + b^2} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times 2 = \frac{2kQb}{\underbrace{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad (\text{y 軸正方向}).$$

問 2 $x > a$ では,

$$V(x) = \frac{kQ}{x-a} + \frac{kQ}{x+a} = \frac{2kQx}{x^2 - a^2}.$$

$-a < x < a$ では,

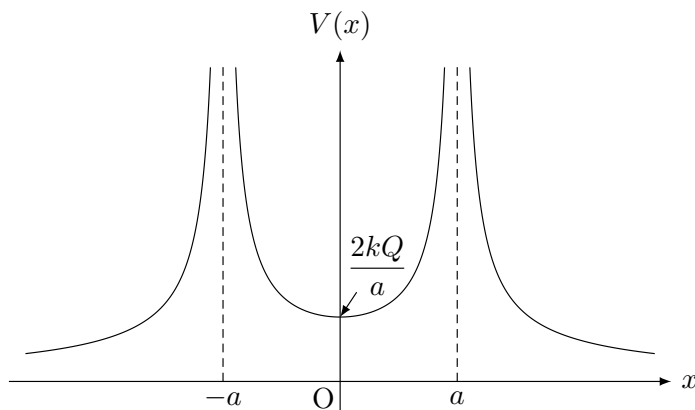
$$V(x) = \frac{kQ}{a-x} + \frac{kQ}{x+a} = -\frac{2kQa}{x^2 - a^2}.$$

$x < -a$ では,

$$V(x) = \frac{kQ}{a-x} + \frac{kQ}{-a-x} = -\frac{2kQx}{x^2 - a^2}.$$

よって,

$$V(x) = \begin{cases} \frac{2kQ|x|}{x^2 - a^2} & (|x| > a), \\ -\frac{2kQa}{x^2 - a^2} & (|x| < a). \end{cases}$$



問3 公式より,

$$F = \frac{2kQb}{\underbrace{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad (y \text{ 軸正方向}).$$

問4 系(物体と電場)全体の力学的エネルギー収支より,

$$\begin{aligned} W_{\text{ex}} &= \left(\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 \right) + \left\{ q \left(\frac{kQ}{4a/3} + \frac{kQ}{2a/3} \right) - q \left(\frac{2kQ}{\sqrt{a^2 + (3a/4)^2}} \right) \right\} \\ &= \frac{13}{20} \frac{kQq}{a}. \end{aligned}$$

問5 系(物体と電場)全体の力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{kQq}{a} \times 2 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{kQq}{4a/3} + \frac{kQq}{2a/3} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{kQq}{2ma}}.$$

問6 問2の図と同様に考えれば, $x = -\frac{a}{6}$ で電位が最小になり, この位置で速さは最大となる. 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{kQq}{5a/6} + \frac{kQq}{5a/6} = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{kQq}{2a/3} + \frac{kQq}{a} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{kQq}{5ma}}.$$

【補足1】問5

物体のみを系と見れば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= \int_{-\frac{a}{3}}^0 \left\{ -\frac{kQq}{(x-a)^2} + \frac{kQq}{(x+a)^2} \right\} dx = \left[\frac{kQq}{x-a} - \frac{kQq}{(x+a)} \right]_{-\frac{a}{3}}^0 = \frac{kQq}{4a} \\ \therefore v &= \sqrt{\frac{kQq}{2ma}}. \end{aligned}$$

【補足2】問6

位置 x における点電荷の運動エネルギーは,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \left(\frac{kQq}{2a/3} + \frac{kQq}{a/3} \right) - \left(\frac{kQq}{x+a} + \frac{kQq}{2a/3-x} \right)$$

であり, 2つ目の括弧の中身が最小であるときを考えればよい. これを $u(x)$ と記せば,

$$u(x) = \frac{kQq}{x+a} + \frac{kQq}{\frac{2a}{3}-x} = \frac{\frac{5}{3}a}{-\left(x+\frac{a}{6}\right)^2 + \frac{25}{36}a^2}$$

となり, $x = -\frac{a}{6}$ で最大値をとることがわかる.

16. 球殻コンデンサ, ガウスの法則

【メモ】

・ガウスの法則は以下の通り.

$$E \times \left(\begin{array}{l} \text{電気力線を} \\ \text{貫く表面積} \end{array} \right) = \frac{(\text{内部電荷})}{\varepsilon_0}$$

なお, クーロンの比例定数は $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ である.

・コンデンサの静電容量の決定は, 形状に依らず以下の流れで行う.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{ガウスの法則} & \rightarrow E \text{ と } Q \text{ の対応} \\ \text{電場 } E \text{ と電位差 } V \text{ の対応} & \rightarrow V \text{ と } E \text{ の対応} \end{array} \right. \xrightarrow{E \text{ を消去}} V \text{ と } Q \text{ の対応} : \frac{Q}{C} = V$$

・電位 ϕ の定義は以下の通り.

$$\phi = - \int_{\text{基準点}}^r E dr$$

ここで, 基準点は電位 0 の位置を指す.

【解答】

点電荷を囲う領域として球を考える. ガウスの法則は,

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

である. ここで, 電場 E は閉曲面を貫く電気力線の本数密度を表すので左辺は力線の総本数を表している. よって, 求める n は,

$$n = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \underbrace{4\pi k_0 q}_{(a)}.$$

金属球 M の作る電場を考える. 球の中心から伸びる向きに x 軸を定める.

まず, $x \leq a$ に生じる電場の大きさ E は, ガウス則より金属球 M を囲う閉曲面を考えて,

$$E \cdot 4\pi x^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi k_0 Q \quad \therefore E = \underbrace{k_0 \frac{Q}{x^2}}_{(b)}.$$

また, M の外側に生じている電位は定義より,

$$V = - \int_{\infty}^x E dx = - \int_{\infty}^x \underbrace{k_0 \frac{Q}{x^2}}_{(c)} = \underbrace{k_0 \frac{Q}{x}}_{(c)}.$$

続いて球内部を考える. 導体の帯電は表面にのみ生じるので, 内部の電荷は 0 である. よって, $0 \leq x < a$ に生じる電場の大きさは,

$$E \cdot 4\pi x^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} \quad \therefore E = \underbrace{0}_{(d)}$$

であり、電位は定義より、

$$V = - \int_{\infty}^x E dx = - \left(\int_{\infty}^a k_0 \frac{Q}{x^2} dx + \int_a^x 0 dx \right) = k_0 \underbrace{\frac{Q}{a}}_{(e)} .$$

金属球 M と金属球殻 N の間の電場を考える．

$a \leq x < b$ に生じる電場の大きさ E' は、ガウス則より金属球 M を囲う閉曲面を考えて、

$$E' \cdot 4\pi x^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi k_0 Q \quad \therefore E' = k_0 \underbrace{\frac{Q}{x^2}}_{(f)} .$$

よって、N に対する M の電位は、

$$V_{NM} = - \int_b^a E' dx = - \int_b^a k_0 \frac{Q}{x^2} = k_0 Q \underbrace{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}_{(g)} .$$

このとき、N（の内側表面）と M（の球面）をコンデンサとみなすとその容量は、

$$V_{NM} = k_0 Q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad \therefore C = \frac{Q}{V_{NM}} = \frac{ab}{k_0(b-a)} .$$

金属球 M の帯電量を $2Q$ にしたときの電荷分布を考える．金属球 M の表面に分布している電荷を q_1 ，金属球殻 N の内側表面に帯電している電荷を q_2 ，外側表面に帯電している電荷を q_3 とする^{*39}．電荷保存則より、

$$\begin{cases} q_1 = 2Q, \\ q_2 + q_3 = -Q \end{cases}$$

が成り立つ．また、ガウスの法則より各区間に生じる電場の大きさは、

$$E \cdot 4\pi x^2 = \frac{Q_{\text{内部}}}{\varepsilon_0} = 4\pi k_0 Q_{\text{内部}} \quad \therefore E = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < a) \\ k_0 \frac{q_1}{x^2} & (a \leq x < b) \\ k_0 \frac{q_1 + q_2}{x^2} & (b \leq x < c) \\ k_0 \frac{q_1 + q_2 + q_3}{x^2} & (b \leq x < c) \end{cases}$$

となる．ここで、静電誘導により導体内部の電場が 0 になることから、 $b \leq x < c$ では $E = 0$ となるので、

$$q_1 + q_2 = 0$$

が成り立つ．以上、電荷保存則と静電誘導による電場 0 の式から電荷分布は

$$\begin{cases} q_1 = 2Q, \\ q_2 + q_3 = -Q, \\ q_1 + q_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore q_1 = 2Q, \quad q_2 = \underbrace{-2Q}_{(i)}, \quad q_3 = \underbrace{Q}_{(j)} .$$

^{*39} 後述の電荷保存則から $q_1 = 2Q$ は明らかだが、明らかでない人のためにこのように置いた．

続いて金属球 M の静電容量について．金属球 M 単体でもコンデンサと見做せるのは，無限遠と対となってコンデンサを形成するからである．これは金属球殻の内径 b を $b \rightarrow \infty$ とかんげる場合と等価であるから (h) の結果より，

$$C = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{ab}{k_0(b-a)} = \underbrace{\frac{a}{k_0}}.$$

17. コンデンサの内部構造

【メモ】

・ガウスの法則は以下の通り.

$$E \times \left(\begin{array}{c} \text{電気力線を} \\ \text{貫く表面積} \end{array} \right) = \frac{(\text{内部電荷})}{\epsilon_0}$$

特に, 無限に広い一様に帯電した板の作る電場の大きさは, $E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$ となる.

・誘電率 ϵ の誘電体内部の電場 E' は外部の電場 E に対して, 比誘電率 $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ を用いて,

$$E' = \frac{1}{\epsilon_r} E$$

となる.

・平行一様電場の強さ E と間隔 d にある 2 点間の電位差 V は以下の関係を満たす.

$$V = Ed.$$

・解説は一貫して同じ解法 (コンデンサの内部構造にだけ注目して考える (ミクロに考える) 解法) を示した. サクッと解く解法については【補足 1】へ載せた.

【解答】

真空の誘電率を ϵ_0 , 極板の面積を S とすると,

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad \therefore \epsilon_0 S = Cd$$

となる. 解答ではこの文字消去を利用する.

(1) 帯電量 Q はキルヒホッフ則より,

$$V - \frac{Q}{C} = 0 \quad Q = CV$$

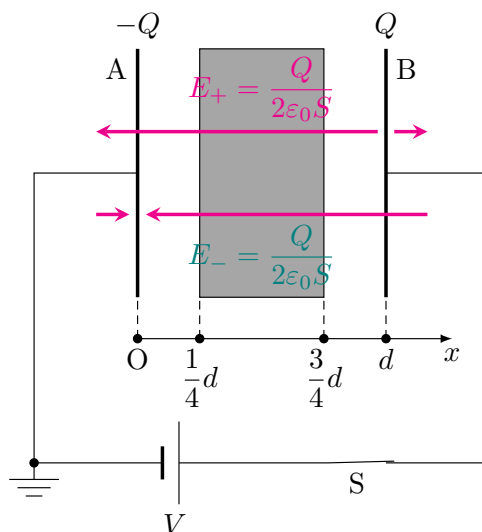
である. よって, コンデンサの蓄える静電エネルギーは,

$$U = \frac{1}{2} \frac{(CV)^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2.$$

(2) 各極板の作る電場の大きさ $E_{\pm}$ はガウス則から

$$E_{\pm} \cdot 2S = \frac{|\pm Q|}{\epsilon_0} \quad \therefore E_{\pm} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S} = \frac{CV}{2Cd} = \frac{V}{2d}$$

と等しく, 正電荷からは湧き出すように, 負電荷には吸い込むように電場が生じることを考慮すると電場の様子は以下の図のようになる.



よって，極板間に生じている電場の x 成分 E_x は，

$$E_x = -E_+ - E_- = -\frac{V}{d}$$

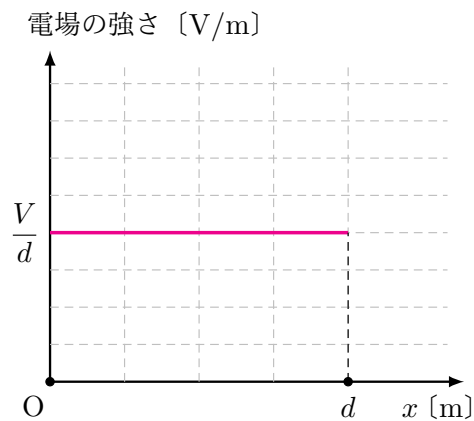
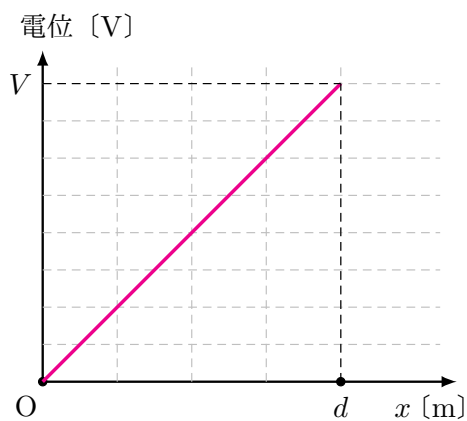
であり，極板間に生じている電場の大きさは

$$E = |E_x| = \frac{V}{d}$$

となる．また，A が接地されて常に電位 0 であることから，位置 x における電位 ϕ は，平行一様電場の公式より，

$$\phi = Ex = \frac{V}{d}x$$

となる．以上をグラフに示せばよい．

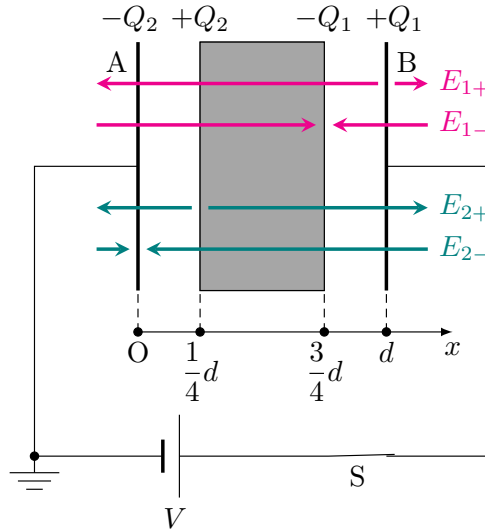


(3) 前問に示した．

- (4) 極板と、極板と向かい合う金属板表面で対をなしコンデンサを形成する．そのため、極板 B の帯電量を Q_1 ，極板 A の帯電量を $-Q_2$ とすると、金属板の右側表面の帯電量は $-Q_1$ ，左側表面の帯電量は Q_2 となる^{*40} ガウス則より、 $\pm Q_1$ ， $\pm Q_2$ それぞれの作る電場の大きさ $E_{1\pm}$ ， $E_{2\pm}$ は、

$$E_{1,2\pm} \cdot 2S = \frac{|\pm Q_{1,2}|}{\varepsilon_0} \quad \therefore E_{1,2\pm} = \frac{Q_{1,2}}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q_{1,2}}{2Cd}$$

と表せ、電場の様子は以下のようになる．



よって、電場の x 成分 E_x は $Q_{1,2}$ を用いて^{*41}，

$$E_x = \begin{cases} -E_{1+} + E_{1-} - E_{2+} - E_{2-} & \left(0 \leq x \leq \frac{d}{4}\right) \\ 0 & \left(\frac{d}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}d\right) \\ -E_{1+} - E_{1-} + E_{2+} - E_{2-} & \left(\frac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{Q_2}{\varepsilon_0 S} & \left(0 \leq x \leq \frac{d}{4}\right) \\ 0 & \left(\frac{d}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}d\right) \\ -\frac{Q_1}{\varepsilon_0 S} & \left(\frac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \end{cases}$$

^{*40} このペアでコンデンサを形成するという事実をありのまま受け入れられない人は、極板 A の帯電量を q_1 ，金属板左側表面の帯電量を q_2 ，右側表面の帯電量を q_3 ，極板 B の帯電量を q_4 と置き、ガウス則によって各極板の作る電場を計算し、導体内部の電場が 0 であること、金属板の電荷保存則（全体として帯電していないので $q_2 + q_3 = 0$ が成立）、極板 AB 間の電位差が V であることを利用して電荷分布を決定してみるとよい．すると、 $q_2 = -q_1 = -2CV$ ， $q_4 = -q_3 = 2CV$ が求まる．

^{*41} 静電誘導により、導体内部の電場が 0 であることを利用．また、コンデンサ内部の電場が $E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \cdot 2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$ となるということは覚えておきたい．この事実を暗記していれば、このような懇切丁寧な計算をせずともキルヒホッフ則が瞬時に立式できる．

以上から, $\varepsilon_0 S = Cd$ を代入し, キルヒホッフ則, および電荷保存則より,

$$\begin{cases} V - \frac{Q_1}{Cd} \cdot \frac{d}{4} - 0 \cdot \frac{d}{2} - \frac{Q_2}{Cd} \cdot \frac{d}{4} = 0, \\ -Q_1 + Q_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore Q_1 = Q_2 = \underline{\underline{2CV}}.$$

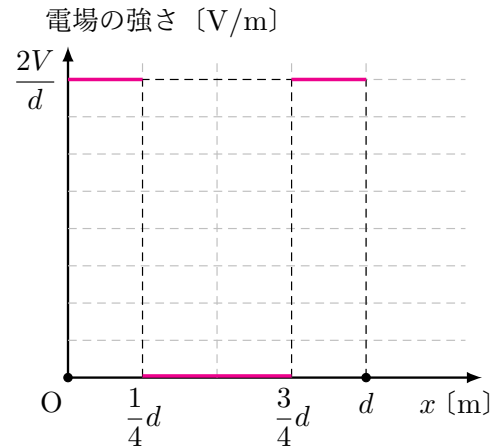
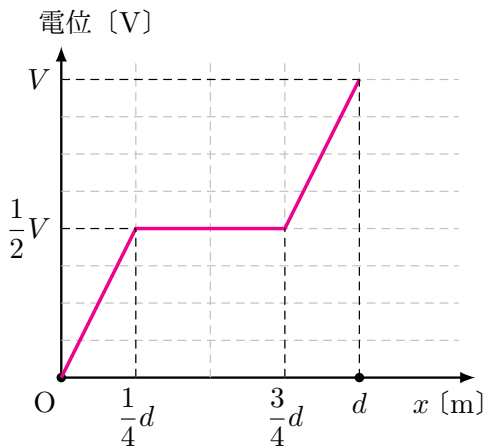
- (5) 各区間の電場の強さは $Q_1 = Q_2 = 2CV$ を代入して,

$$E = |E_x| = \begin{cases} \frac{2V}{d} & \left(0 \leq x \leq \frac{d}{4}, \frac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \\ 0 & \left(\frac{d}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}d\right) \end{cases}$$

となる. また, 位置 x における電位 ϕ は, 平行一様電場の公式から,

$$\phi = E \times (\text{距離}) = \begin{cases} \frac{2V}{d}x & \left(0 \leq x \leq \frac{d}{4}\right) \\ \frac{V}{2} & \left(\frac{d}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}d\right) \\ \frac{2V}{d}\left(x - \frac{3}{4}d\right) + \frac{V}{2} & \left(\frac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \end{cases}$$

となる. 以上をグラフに示せばよい.



- (6) 前問に示した.

- (7) 導体は極板 AB しかないため, AB 間でコンデンサを形成する. 極板 B の帯電量を Q とおくと, 極板 A の帯電量は必ずと $-Q$ となる. ガウス則より, 各極板に帯電している $\pm Q$ の電荷が作る電場の大きさ $E_{0,\pm}$ は,

$$E_{0,\pm} \cdot 2S = \frac{|\pm Q|}{\varepsilon_0} \quad \therefore E_{0,\pm} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{2Cd}$$

と表せ, 極板間の真空中に生じる電場の大きさ E_0 は x 軸負方向に

$$E_0 = E_{0,+} + E_{0,-} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \cdot 2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{Cd}$$

となる．ここで誘電体内部の電場 E' は，分極によって生じた分極電荷の作る電場によって真空中の電場の値 E_0 よりも小さくなる．その値は比誘電率を ε_r とすれば，

$$E' = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon_r C d}$$

となる．以上を踏まえれば，電場の x 成分 E_x は，

$$E_x = \begin{cases} -\frac{Q}{Cd} & \left(0 \leq x \leq \frac{d}{4}, \frac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \\ -\frac{Q}{\varepsilon_r Cd} & \left(\frac{d}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}d\right) \end{cases}$$

となり，電場の大きさ E は，

$$E = |E_x| = \begin{cases} \frac{Q}{Cd} & \left(0 \leq x \leq \frac{d}{4}, \frac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \\ \frac{Q}{\varepsilon_r Cd} & \left(\frac{d}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}d\right) \end{cases}$$

となる．以上から，キルヒホッフ則より，

$$V - \frac{Q}{Cd} \cdot \frac{d}{4} - \frac{Q}{\varepsilon_r Cd} \cdot \frac{d}{2} - \frac{Q}{Cd} \cdot \frac{d}{4} = 0 \quad \therefore Q = \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} CV$$

と求まる． $\varepsilon_r = 2$ を代入して，

$$Q = \frac{2 \cdot 2}{2 + 1} CV = \frac{4}{3} CV.$$

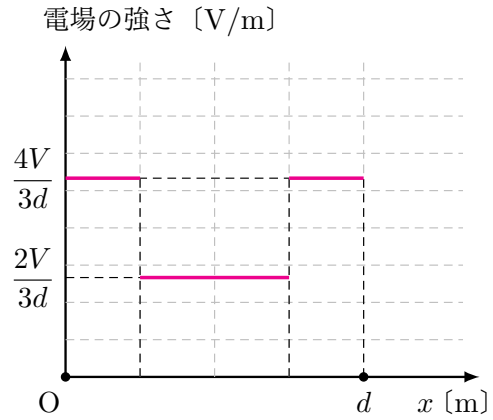
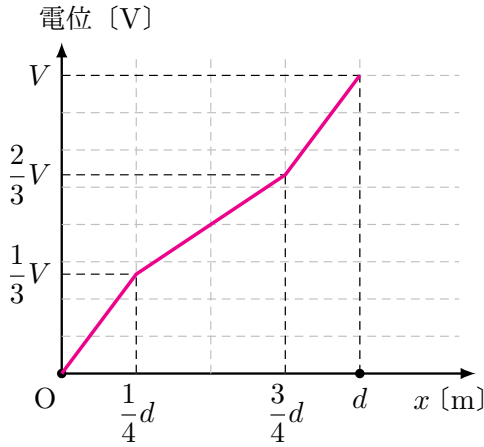
(8) 各区間の電場の強さは $\varepsilon_r = 2$ ， $Q = \frac{4}{3} CV$ を代入して，

$$E = \begin{cases} \frac{4V}{3d} & \left(0 \leq x \leq \frac{d}{4}, \frac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \\ \frac{2V}{3d} & \left(\frac{d}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}d\right) \end{cases}$$

となる．また，位置 x における電位 ϕ は，平行一様電場の公式から，

$$\phi = E \times (\text{距離}) = \begin{cases} \frac{4V}{3d}x & \left(0 \leq x \leq \frac{d}{4}\right) \\ \frac{2V}{3d}\left(x - \frac{1}{4}d\right) + \frac{1}{3}V & \left(\frac{d}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}d\right) \\ \frac{4V}{3d}\left(x - \frac{3}{4}d\right) + \frac{2}{3}V & \left(\frac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \end{cases}$$

となる．以上をグラフに示せばよい．



(9) 前問に示した.

(10) 誘電体挿入時の系の静電容量 C^* は, コンデンサにかかる電位差 V と電荷 Q から,

$$C^* = \frac{Q}{V} = \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} C = \frac{4}{3} C$$

である. 誘電体を取り除く前後ではスイッチ S を開いているため, 電荷保存則より電荷は $Q = \frac{4}{3} CV$ で一定に保たれる. 誘電体を取り除いた後の静電容量は C であるから, 系のエネルギー収支より,

$$W_{\text{ex}} = \Delta U = \frac{1}{2} \frac{(4CV/3)^2}{C} - \frac{1}{2} \frac{(4CV/3)^2}{4C/3} = \frac{2}{9} CV^2.$$

(11) 電荷保存則より電荷は $Q = \frac{4}{3} CV$ で一定に保たれる. よって, 極板 AB 間に生じる電場はガウス則より,

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \cdot 2 = \frac{\frac{4}{3} CV}{Cd} = \frac{4}{3} \frac{V}{d}$$

となる. よって, AB 間の電位差は,

$$V_{AB} = E \cdot \frac{3}{2} d = 2V.$$

【補足1】マクロに考え楽に解く

コンデンサの内部構造に注目（ミクロに考える）するのではなく、電気回路の素子として扱って問題を解く（マクロに考える）ことで「理解は置いといて一旦楽に解く」ということができる。そこに理論的な理解はないのでそこだけは注意したい。この解法は時短になるので個人的にもお勧めしたいが、それは今ではないので補足へ回した。突然現れる謎の仮定はそういうものだと受け入れよう^{*42}。

- (2) 全て公式で処理する。間隔 d 、電位差 V より、平行一様電場の公式から電場の大きさ E は、

$$E = \frac{V}{d}$$

となる。よって、A が接地されて常に電位 0 であることから、位置 x における電位 ϕ は、平行一様電場の公式より、

$$\phi = Ex = \frac{V}{d}x$$

となる。これを図示すればよい。

- (3) 前問の $E = \frac{V}{d}$ を図示すればよい。

- (4) 電気回路としてマクロに考える。極板 B と金属板右側表面（コンデンサ C_1 ）、極板 A と金属板左側表面（コンデンサ C_2 ）はそれぞれコンデンサを形成する（以下の図のようになる）。それぞれの容量 C' は面積 S 、間隔 $\frac{d}{4}$ ゆえ等しい値を取り、

$$C' = \epsilon_0 \frac{S}{d/4} = 4C$$

となる。極板 B の電荷を Q_1 、金属板左側表面の電荷を Q_2 とすればキルヒホッフ則・電荷保存則より、

$$\begin{cases} V - \frac{Q_1}{4C} - \frac{Q_2}{4C} = 0, \\ -Q_1 + Q_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore Q_1 = Q_2 = \underline{\underline{2CV}}.$$

- (5) 電気回路としてマクロに考える。 C_1 （B と金属板）、 C_2 （A と金属板）の電位差 V_1 、 V_2 はそれぞれ、

$$V_1 = \frac{Q_1}{4C} = \frac{V}{2}, \quad V_2 = \frac{Q_2}{4C} = \frac{V}{2}$$

である。導体内部の電場が 0 であることから導体で電位降下は生じない（電位一定）ゆえ^{*43}。A の電位が 0、B の電位が V であることを踏まえて図示すれば上で示した解答のようになる。

^{*42} 証明は容易いがここでは証明は省略する。

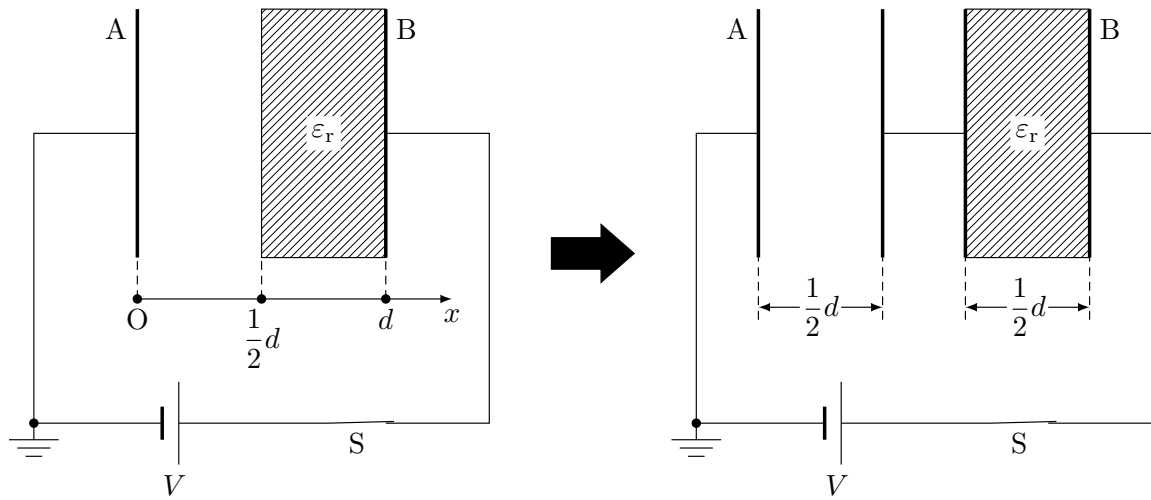
^{*43} 定常な導体上は等電位であると覚えてもよい。

- (6) 平行一様電場の公式より，間隔 $\frac{d}{4}$ ，電位差 $\frac{V}{2}$ の間に生じる電場の大きさは，

$$E = \frac{V/2}{d/4} = \frac{2V}{d}$$

となる．導体内部の電場が 0 であることも踏まえれば上で示した解答のようになる．

- (7) 誘電体を挿入したコンデンサの容量を求める．問題図 5 の誘電体を挿入したコンデンサの容量 C'' は以下の図のように誘電体を片方にギュッと寄せ，2 つに分けたコンデンサを直列合成した容量と等しいことが知られている ^{*44*45}．



したがって，直列合成の公式より，

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d/2}} + \frac{1}{\epsilon_0 \frac{S}{d/2}} \quad \therefore C'' = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} C = \frac{4}{3} C$$

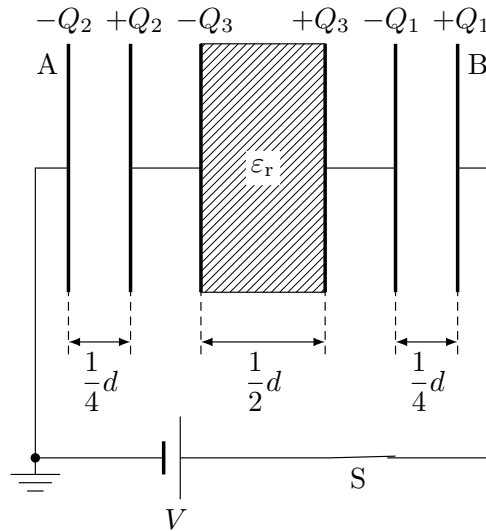
となる．よって，キルヒホッフ則より，

$$V - \frac{Q}{C''} = 0 \quad \therefore Q = C''V = \frac{4}{3} CV.$$

なお，誘電体が挿入されたコンデンサは，次のように間隔 $\frac{d}{4}$ で内部が真空のコンデンサ 2 つ（B 側をコンデンサ C_1 ，A 側をコンデンサ C_2 と呼ぶ）と，間隔 $\frac{d}{2}$ で内部が比誘電率 2 の誘電体がみっちり詰まっているコンデンサ（ C_3 と呼ぶ）からなる回路と等価であることも知られている．

^{*44} 内部に挿入されている物体が全体として帯電しているとき直列合成の公式は使えないことに要注意．いつでも使えるわけではないので暗記して使うのは注意せよ．

^{*45} 次の設問のように 3 分割してもよい．



C_1 , C_2 , C_3 の容量 C_1 , C_2 , C_3 はそれぞれ公式より,

$$C_1 = C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d/4} = 4C, \quad C_3 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d/2} = 4C$$

であり, 各コンデンサの電荷をそれぞれ Q_1 , Q_2 , Q_3 と置けば, キルヒホッフ則・電荷保存則より,

$$\begin{cases} V - \frac{Q_1}{4C} - \frac{Q_3}{4C} - \frac{Q_2}{4C} = 0, \\ -Q_1 + Q_3 = 0, \\ -Q_3 + Q_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore Q_1 = Q_2 = Q_3 = \underline{\underline{\frac{4}{3}CV}}.$$

- (8) 前問校舎の3分割した方で考える. 各コンデンサ C_1 , C_2 , C_3 の電位差をそれぞれ V_1 , V_2 , V_3 とすれば,

$$V_1 = \frac{Q_1}{4C} = \frac{V}{3}, \quad V_2 = \frac{Q_2}{4C} = \frac{V}{3}, \quad V_3 = \frac{Q_3}{4C} = \frac{V}{3}$$

となる. A の電位が 0, B の電位が V であることを踏まえて図示すれば上で示した解答のようになる.

- (9) 平行一様電場の公式より, 間隔 $\frac{d}{4}$, 電位差 $\frac{V}{2}$ の間に生じる電場の大きさは,

$$E = \frac{V/3}{d/4} = \frac{4}{3} \frac{V}{d}$$

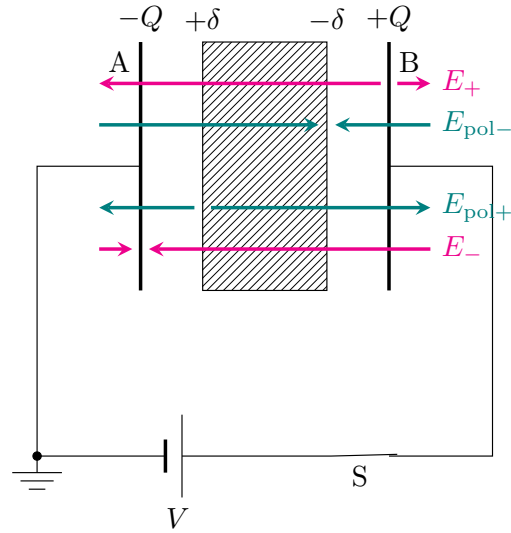
となる. また, 誘電体内部に生じている電場もまた平行一様電場の公式より,

$$E = \frac{V/3}{d/2} = \frac{2}{3} \frac{V}{d}$$

となる. 以上を合わせれば上で示した解答のようになる.

【補足2】分極電荷を求める

極板 B, A に帯電した電荷 $\pm Q$ によって生じた電場が誘電体にかかることで、誘電体内部では誘電分極（分極）が生じる。この分極によって生じた分極電荷を δ とすると、誘電体は以下の図のように帯電し、生じる電場は以下のようになる。



極板 B, A に帯電している $\pm Q$ の電荷が作る電場の大きさ $E_{\pm}$ はガウス則より、

$$E_{\pm} \cdot 2S = \frac{|\pm Q|}{\epsilon_0} \quad \therefore E_{\pm} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$$

と求まる。したがって、誘電体にかかっている電場 E は左向きを正として、

$$E = E_+ + E_- = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

である。同様にして、分極電荷 $\pm\delta$ が作っている分極電場 $E_{\text{pol}\pm}$ もガウス則より、

$$E_{\text{pol}\pm} \cdot 2S = \frac{|\pm\delta|}{\epsilon_0} \quad \therefore E_{\text{pol}\pm} = \frac{\delta}{2\epsilon_0 S}$$

と求まる。なお、右向きである。誘電体内部の電場 E' は外部電場と分極電場の合成電場であるから、

$$E' = E - E_{\text{pol}+} - E_{\text{pol}-} = \frac{Q - \delta}{\epsilon_0 S}$$

と求めることができる。ここで、誘電体内部で観測される電場 E' は、比誘電率 ϵ_r と外部電場 E を用いて

$$E' = \frac{1}{\epsilon_r} E$$

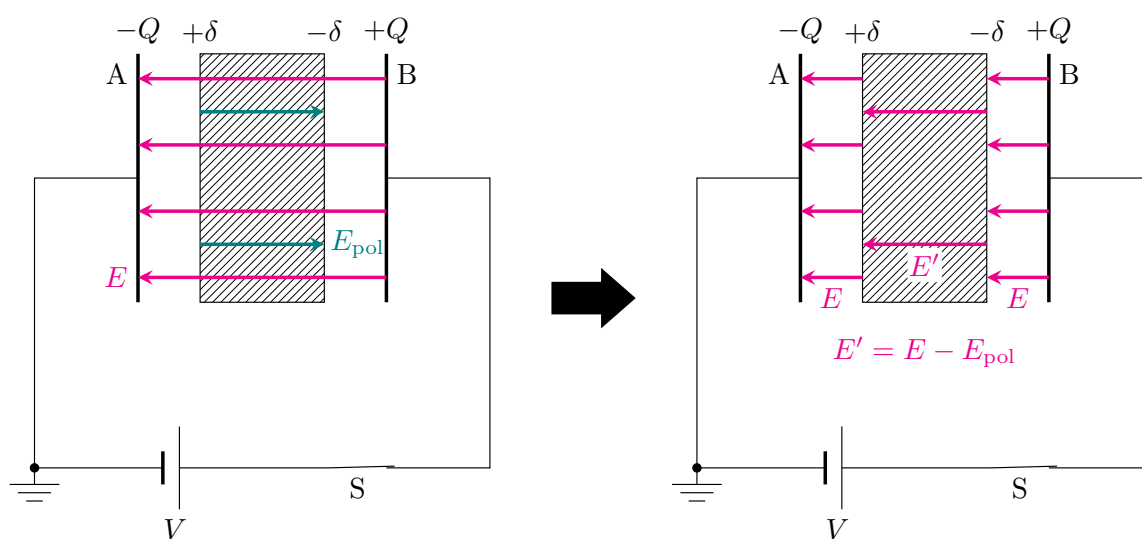
と書けるから、この2式を比較することで、

$$\frac{Q - \delta}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad \therefore \delta = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) Q$$

と分極電荷を求めることができる。今の場合、 $\epsilon_r = 2$, $Q = \frac{4}{3}CV$ より、

$$\delta = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) Q = \frac{2}{3}CV$$

となる。実際にコンデンサ内部に生じている電場を電気力線で示した図は以下の右図のようになっている。ただし $E_{\text{pol}} = E_{\text{pol}+} + E_{\text{pol}-} = \frac{\delta}{\epsilon_0 S}$ である。



19. 電気回路

【メモ】

・電気回路の状態決定は以下の3種類の式で一意に決まる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{キルヒホッフ第2法則} \\ \text{電荷保存則 (キルヒホッフ第1法則も含む)} \\ \text{素子の性質} \end{array} \right.$$

性質を暗記しない素子(電球やダイオードなど)については, 問題文でその性質が与えられる. 与えられる方は①グラフ, ②式の2通りである.

・無限回繰り返した後の操作では, コンデンサの電荷の移動が起こらなくなる. すなわち「異なる回路の状態で同一の電荷を蓄える」と考える.

【解答】

C_1 , C_2 それぞれの上側に蓄えられる電荷を Q_1 , Q_2 , R に上から下向きに流れる電流を I とする.

問1 閉じた直後 $Q_1 = 0$ である*46. キルヒホッフ則より,

$$V_0 - RI - \frac{0}{C} = 0 \quad \therefore I = \frac{V_0}{R}.$$

問2 十分時間経過後, コンデンサに流れ込む電流 I は0となる. よって, キルヒホッフ則より,

$$V_0 - R \cdot 0 - \frac{Q_1}{C} = 0 \quad \therefore Q_1 = \underline{\underline{CV_0}}.$$

また, この間 E_1 を通過した電荷は C_1 上側の電荷 Q_1 の変化量を見ればよい. よって, E_1 のした仕事は,

$$W_1 = \Delta Q_1 V_0 = (CV_0 - 0)V_0 = \underline{\underline{CV_0^2}}.$$

問3 十分時間経過後, コンデンサに流れ込む電流 I は0となる. キルヒホッフ則, および電荷保存則より,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2V_0 + \frac{Q_1}{C} + R \cdot 0 - \frac{Q_2}{C} = 0, \\ Q_1 + Q_2 = CV_0 + 0 \end{array} \right. \quad \therefore Q_1 = -\frac{1}{2}CV_0, \quad Q_2 = \frac{3}{2}CV_0.$$

よって, C_2 の電位差は

$$V_2 = \frac{Q_2}{C} = \underline{\underline{\frac{3}{2}V_0}}.$$

*46 実際には閉じた瞬間に充電が完了するが, 入試問題という文脈に従う.

また、この間 E_1 を通過した電荷は C_1 下側の電荷 $-Q_1$ の変化量を見ればよい。よって、 E_2 のした仕事は、

$$W_2 = \Delta(-Q_1) \cdot 2V_0 = -\left(-\frac{1}{2}CV_0 - CV_0\right) \cdot 2V_0 = \underline{\underline{3CV_0^2}}.$$

問4 再度 S_1 を閉じて十分時間が経過した後の C_1 の電荷はキルヒホッフ則より、

$$V_0 - R \cdot 0 - \frac{Q_1}{C} = 0 \quad \therefore Q_1 = CV_0.$$

となっている。よって、2 回目に S_2 を閉じて十分時間が経過した後の各コンデンサの帯電量は、キルヒホッフ則、および電荷保存則より、

$$\begin{cases} 2V_0 + \frac{Q_1}{C} + R \cdot 0 - \frac{Q_2}{C} = 0, \\ Q_1 + Q_2 = CV_0 + \frac{3}{2}CV_0 \end{cases} \quad \therefore Q_1 = -\frac{1}{2}CV_0, \quad Q_2 = \frac{3}{2}CV_0.$$

よって、 C_2 の電位差は、

$$V_2 = \frac{Q_2}{C} = \underline{\underline{\frac{3}{2}V_0}}.$$

問5 操作を十分繰り返した後、コンデンサの電荷は一定値を取る。 S_1 を閉じたとき、 S_2 を閉じたときそれぞれのキルヒホッフ則より、

$$\begin{cases} V_0 - R \cdot 0 - \frac{Q_1}{C} = 0, \\ 2V_0 + \frac{Q_1}{C} + R \cdot 0 - \frac{Q_2}{C} = 0 \end{cases} \quad \therefore Q_1 = CV_0, \quad Q_2 = 3CV_0.$$

よって、 C_2 の電位差は、

$$V_2 = \frac{Q_2}{C} = \underline{\underline{3V_0}}.$$

問6 キルヒホッフ則より $I = \frac{dQ_1}{dt}$ を踏まえて、

$$V_0 - R \frac{dQ_1}{dt} - \frac{Q_1}{C} = 0 \quad \therefore \frac{dQ_1}{dt} = -\frac{1}{RC} (Q_1 - CV_0)$$

Q_1 に関する微分方程式を得る。この微分方程式は変数分離型に持ち込んで解くことができ、

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_1 - CV_0} \frac{dQ_1}{dt} &= -\frac{1}{RC} \\ \int \frac{1}{Q_1 - CV_0} \frac{dQ_1}{dt} dt &= -\int \frac{1}{RC} dt \\ \log |Q_1 - CV_0| &= -\frac{t}{RC} + \spadesuit \\ \therefore Q_1 &= CV_0 + e^{\spadesuit} e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

を得る。 $t = 0$ で $Q_1 = 0$ より $e^{\spadesuit} = -CV_0$ と求まり、

$$Q_1 = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

【補足】問 5 を漸化式を解いて求める

n 回目に S_1 を閉じて十分時間が経過した後の C_1 の上側の電荷を x_1 , n 回目に S_2 を閉じて十分時間が経過した後の C_1 , C_2 の上側の電荷をそれぞれ y_n , z_n とする. キルヒホッフ則・電荷保存則は,

$$\begin{cases} S_1: V_0 - R \cdot 0 - \frac{x_n}{C} = 0, \\ S_2: \begin{cases} 2V_0 + \frac{y_n}{C} + R \cdot 0 - \frac{z_n}{C} = 0, \\ y_n + z_n = x_n + z_{n-1}. \end{cases} \end{cases}$$

S_1 のキルヒホッフ則より, $x_n = CV_0$ と求まり, これを電荷保存則へ代入して S_2 側のキルヒホッフ則・電荷保存則を整理すれば,

$$\begin{cases} 2V_0 + \frac{y_n}{C} + R \cdot 0 - \frac{z_n}{C} = 0, \\ y_n + z_n = CV_0 + z_{n-1} \end{cases} \quad \therefore z_n - \frac{1}{2}z_{n-1} - \frac{3}{2}CV_0 = 0$$

と z_n に関する漸化式が求まる. この漸化式を解いて

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{2}z_{n-1} - \frac{3}{2}CV_0 \\ z_n - 3CV_0 &= \frac{1}{2}(z_{n-1} - 3CV_0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(z_{n-2} - 3CV_0) \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 (z_1 - 3CV_0) \\ \therefore z_n &= 3CV_0 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}. \end{aligned}$$

よって, 無限回操作後の C_2 の電位差は,

$$V_{2,\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{C} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3V_0 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} = \underline{\underline{3V_0}}.$$

19. 電気回路

【メモ】

・電気回路の状態決定は以下の3種類の式で一意に決まる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{キルヒホッフ第2法則} \\ \text{電荷保存則 (キルヒホッフ第1法則も含む)} \\ \text{素子の性質} \end{array} \right.$$

性質を暗記しない素子(電球やダイオードなど)については, 問題文でその性質が与えられる. 与えられる方は①グラフ, ②式の2通りである.

・ジュール熱 J の計算は以下のように行う.

$$J = \left\{ \begin{array}{ll} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I \text{ 一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I \text{ 一定でないとき}). \end{array} \right.$$

【解答】

C_1 , C_2 それぞれの左側に蓄えられる電荷を Q_1 , Q_2 とし, C_1 , R_3 , C_2 に流れる電流をそれぞれ I_1 , i , I_2 とする. また, $R = 1.0 \Omega$, $C = 1.0 \times 10^{-6} \text{ F}$, $E = 1.2 \text{ V}$ と文字で置くと, キルヒホッフ則は,

$$\left\{ \begin{array}{l} E - \frac{Q_1}{C} - 3R(I_1 + i - I_2) = 0, \\ E - Ri - \frac{Q_2}{C} = 0, \\ E - Ri - 2R(i - I_2) - 3R(I_1 + i - I_2) = 0. \end{array} \right.$$

(問1) 閉じた直後 $Q_1 = Q_2 = 0 \text{ C}$ である^{*47}. キルヒホッフ則より,

$$\left\{ \begin{array}{l} E - 0 - 3R(I_1 + i - I_2) = 0, \\ E - Ri - 0 = 0, \\ E - Ri - 2R(i - I_2) - 3R(I_1 + i - I_2) = 0 \end{array} \right.$$

$$\therefore I_1 = \frac{5}{6} \frac{E}{R} = 1.0 \text{ A}, \quad i = \frac{E}{R} = 1.2 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{3}{2} \frac{E}{R} = 1.8 \text{ A}.$$

よって, 電池に流れる電流 I_E は,

$$I_E = I_1 + i = \underline{\underline{2.2 \text{ A}}}.$$

(問2) 十分時間経過後コンデンサに流れ込む電流は0となる. よって, $I_1 = I_2 = 0 \text{ A}$ として, キルヒ

^{*47} 本当は閉じた瞬間に充電が完了するので, 閉じた直後に I_E は定常状態となる. ここでは入試物理の文脈として $Q_1 = Q_2 = 0 \text{ C}$ と解釈する.

ホッフ則より,

$$\begin{cases} E - \frac{Q_1}{C} - 3Ri = 0, \\ E - Ri - \frac{Q_2}{C} = 0, \\ E - Ri - 2Ri - 3Ri = 0 \end{cases}$$

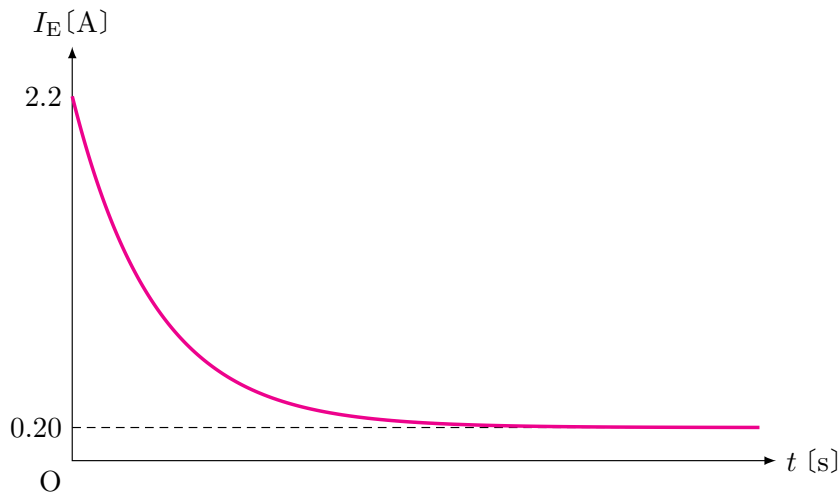
$$\therefore Q_1 = \frac{1}{2}CE = \underline{6.0 \times 10^{-7} \text{ C}}, \quad Q_2 = \frac{5}{6}CE = \underline{1.0 \times 10^{-6} \text{ C}}, \quad i = \frac{1}{6} \frac{E}{R} = 0.20 \text{ A}.$$

よって,

$$I_E = I_1 + i = \underline{0.20 \text{ A}}.$$

(問 3) 前問に示した.

(問 4) $t = 0$ で $I_E = 2.2 \text{ A}$, $t \rightarrow \infty$ で $I_E = 0.20 \text{ A}$ であり, 抵抗とコンデンサからなる回路ゆえ解の関数形は指数関数の重ね合わせで書ける. 以上を踏まえれば, 以下のようなグラフになると推測される^{*48}.



(問 5) C_1, C_2 左側部分は電氣的に孤立する. 十分時間経過後コンデンサに流れ込む電流は 0 となるので, キルヒホッフ則, および電荷保存則より,

$$\begin{cases} -\frac{Q'_1}{C} - 3R \cdot 0 + \frac{Q'_2}{C} + R \cdot 0 = 0, \\ Q'_1 + Q'_2 = \frac{1}{2}CE + \frac{5}{6}CE \end{cases} \quad \therefore Q'_1 = Q'_2 = \frac{2}{3}CE = \underline{8.0 \times 10^{-7} \text{ C}}.$$

(問 6) 抵抗を流れる電流が時間変化することから, エネルギー収支より,

$$J = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \left(\frac{1}{2} \frac{Q'_1{}^2}{C} - \frac{1}{2} \frac{Q_1{}^2}{C} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{Q'_2{}^2}{C} - \frac{1}{2} \frac{Q_2{}^2}{C} \right) = \underline{4.0 \times 10^{-8} \text{ J}}.$$

^{*48} 具体的な関数形については【補足】に示した.

【補足】グラフについて

コンデンサが2つあり抵抗が入り組んで入り込んでいる回路では、一般には単調減少なグラフとはならない。ここでは、実際に問題で与えられた数値を代入して考察する。

■微分方程式を解く

キルヒホッフ則は、

$$\begin{cases} E - \frac{Q_1}{C} - 3R(I_1 + i - I_2) = 0 & \dots\dots ① \\ E - Ri - \frac{Q_2}{C} = 0 & \dots\dots ② \\ E - Ri - 2R(i - I_2) - 3R(I_1 + i - I_2) = 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

初期条件は $t = 0$ において $Q_1 = Q_2 = 0$ であり、このとき $i = \frac{5}{6} \frac{E}{R}$, $i = \frac{E}{R}$, $I_2 = \frac{3}{2} \frac{E}{R}$ である。

②の両辺を t で微分すれば I_2 が i で表すことができ、

$$0 - R \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} I_2 = 0 \quad \therefore I_2 = -RC \frac{di}{dt}.$$

これを③へ代入すれば、

$$E - 6Ri - 3RI_1 + 5RI_2 = 0 \quad \therefore I_1 = \frac{1}{3} \frac{E}{R} - \frac{5}{3} RC \frac{di}{dt} - 2i$$

と I_1 を i だけで書くことができる。この式の両辺を t で微分すれば、

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{5}{3} RC \frac{d^2 i}{dt^2} - 2 \frac{di}{dt}.$$

①の両辺を t で微分し、 I_1 , $\frac{dI_1}{dt}$, I_2 を代入して、

$$\begin{aligned} I_1 + 3RC \left(\frac{dI_1}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \right) &= 0 \\ \frac{1}{3} \frac{E}{R} - \frac{5}{3} RC \frac{di}{dt} - 2i + 3RC \left(\frac{5}{3} RC \frac{d^2 i}{dt^2} - 2 \frac{di}{dt} + \frac{di}{dt} - RC \frac{d^2 i}{dt^2} \right) &= 0 \\ 6 \frac{d^2 i}{dt^2} + 14 \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + 6 \frac{1}{(RC)^2} \left(i - \frac{1}{6} \frac{E}{R} \right) &= 0 \end{aligned}$$

となり、 i に関する微分方程式を得る。ここで、 $a \equiv \frac{1}{RC}$ と置き、 $j \equiv i - \frac{1}{6} \frac{E}{R}$ と変数変換をすれば、

$$3 \frac{d^2 j}{dt^2} + 7a \frac{dj}{dt} + 3a^2 j = 0$$

となる。この微分方程式の解として $j = Ae^{\lambda t}$ と仮定すると、

$$(3\lambda^2 + 7a\lambda + 3a^2)Ae^{\lambda t} = 0 \quad \dots\dots ④$$

となり、任意の時刻 t で成り立つような λ は^{*49},

$$3\lambda^2 + 7a\lambda + 3a^2 = 0 \quad \therefore \lambda_1 = -\frac{7 + \sqrt{13}}{6}a, \quad \lambda_2 = -\frac{7 - \sqrt{13}}{6}a$$

と求まる. $\lambda = \lambda_{1,2}$ のときの j は微分方程式の解となるので, λ_1, λ_2 に対応する積分定数をそれぞれ A_1, A_2 とすれば

$$j = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

もまた④の解となる. これを i に直せば,

$$i = \frac{1}{6} \frac{E}{R} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

従って, I_1, I_2 についても,

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{3} \frac{E}{R} - \frac{5}{3} RC (\lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}) - 2 \left(\frac{1}{6} \frac{E}{R} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \right), \\ I_2 = -RC (\lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}). \end{cases}$$

ここで $t = 0$ で $i = \frac{E}{R}$, $I_2 = \frac{3E}{2R}$ ゆえ,

$$\begin{cases} \frac{E}{R} = \frac{1}{6} \frac{E}{R} + A_1 + A_2, \\ \frac{3E}{2R} = -\frac{1}{a} (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} A_1 = \frac{a}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{3E}{2R} \left(1 + \frac{5}{9} \frac{\lambda_2}{a} \right), \\ A_2 = -\frac{a}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{3E}{2R} \left(1 + \frac{5}{9} \frac{\lambda_1}{a} \right). \end{cases}$$

■有効数字 1 桁で計算する

ここでは、有効数字 1 桁で計算する.

$\lambda_{1,2}$ を有効数字 1 桁で近似すると、上記の計算からそれぞれ,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{7 + \sqrt{13}}{6}a = -1.76\dots a \doteq -2a \\ \lambda_2 &= -\frac{7 - \sqrt{13}}{6}a = -0.565\dots a \doteq -\frac{3}{5}a \end{aligned}$$

となり、このとき,

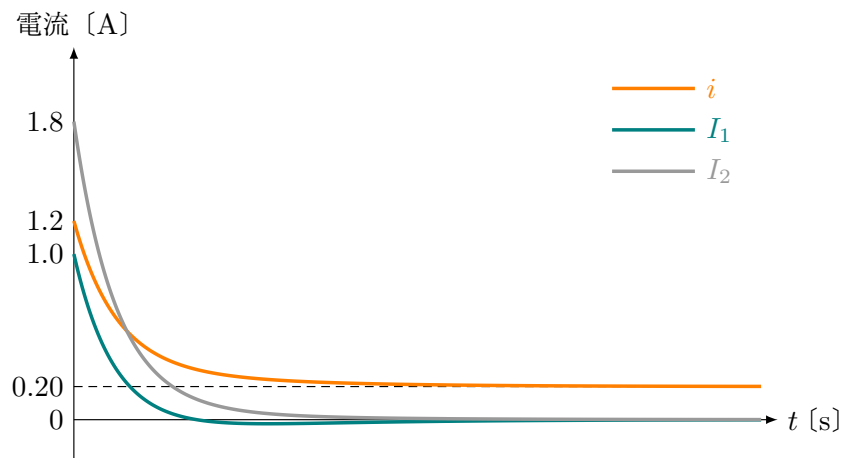
$$A_1 = \frac{5}{7} \frac{E}{R}, \quad A_2 = \frac{5}{42} \frac{E}{R}$$

^{*49} $A = 0$ は $j = 0$ という自明な解であり、今考えている現象には対応しくない.

である。よって、 i , I_1 , I_2 はそれぞれ、

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{6} \frac{E}{R} + \frac{5}{42} \frac{E}{R} \left(6e^{-2at} + e^{-\frac{3}{5}at} \right), \\ I_1 &= \frac{5}{42} \frac{E}{R} \left(8e^{-2at} - e^{-\frac{3}{5}at} \right), \\ I_2 &= \frac{1}{14} \frac{E}{R} \left(20e^{-2at} + e^{-\frac{3}{5}at} \right). \end{aligned}$$

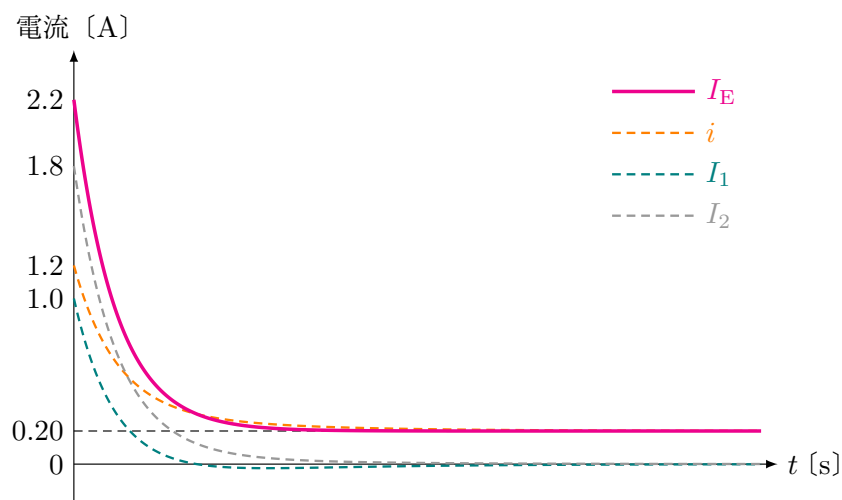
これを図示すると以下の図のようになる。



電池を通過する電流 I_E は、

$$I_E = I_1 + i = \frac{1}{6} \frac{E}{R} + \frac{5}{3} \frac{E}{R} e^{-2at}$$

となるので、有効数字 1 桁では以下のようなグラフになることが分かり、上で示した解答の通りである。



以下で示す計算の通り、有効数字 1 桁で十分な精度で計算できていることが分かる。このように得た結果に具体的な数値を代入して理論で得た結果が物理的に正しいものか調べたいときや、今回のように解

の挙動を調べたいときなど、「ざっくり数値的結果を求めたい」という場合は、有効数字 1 桁で十分である*50。時として、有効数値 0 桁（桁数だけ）で十分なときもある。

■有効数字 2 桁で計算する

ここでは、有効数字 2 桁で計算する。

$\lambda_{1,2}$ を有効数字 1 桁で近似すると、上記の計算からそれぞれ、

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{7+\sqrt{13}}{6}a = -1.76\dots a \doteq -\frac{9}{5}a \\ \lambda_2 &= -\frac{7-\sqrt{13}}{6}a = -0.565\dots a \doteq -\frac{57}{100}a\end{aligned}$$

となり、このとき

$$A_1 = \frac{5}{6}\frac{E}{R}, \quad A_2 = 0$$

である。よって、 i , I_1 , I_2 はそれぞれ、

$$\begin{aligned}i &= \frac{1}{6}\frac{E}{R} + \frac{5}{6}\frac{E}{R}e^{-\frac{9}{5}at}, \\ I_1 &= \frac{5}{6}\frac{E}{R}e^{-\frac{9}{5}at}, \\ I_2 &= \frac{3}{2}\frac{E}{R}e^{-\frac{9}{5}at}.\end{aligned}$$

これを図示すれば以下ようになる。

電池を通過する電流 I_E は、

$$I_E = I_1 + i = \frac{1}{6}\frac{E}{R} + \frac{5}{3}\frac{E}{R}e^{-2at}$$

となるので、有効数字 1 桁の場合と一致する。

■近似しないで…

$\lambda_{1,2}$ はそれぞれ、

$$\lambda_{1,2} = -\frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}a$$

であり、 A_1 , A_2 は、

$$A_{1,2} = \frac{65 \pm 19\sqrt{13}}{156}\frac{E}{R}$$

*50 もちろん、実験など精度が重要な分野の話はしていない。

である. i , I_1 , I_2 はそれぞれ,

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{6} \frac{E}{R} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \\ I_1 &= - \left(2 + \frac{5}{3} \frac{\lambda_1}{a} \right) A_1 e^{\lambda_1 t} + \left(2 + \frac{5}{3} \frac{\lambda_2}{a} \right) A_2 e^{\lambda_2 t}, \\ I_2 &= - \frac{\lambda_1}{a} A_1 e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_2}{a} A_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

となり, 電池を通過する電流 I_E は,

$$I_E = I_1 + i = \frac{1}{6} \frac{E}{R} - \left(1 + \frac{5}{3} \frac{\lambda_1}{a} \right) A_1 e^{\lambda_1 t} - \left(1 + \frac{5}{3} \frac{\lambda_2}{a} \right) A_2 e^{\lambda_2 t}$$

となる. ここで, $e^{\lambda_2 t}$ の因子は,

$$- \left(1 + \frac{5}{3} \frac{\lambda_2}{a} \right) A_2 = - \left(1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{-7 + \sqrt{13}}{6} \right) \cdot \frac{65 - 19\sqrt{13}}{156} \frac{E}{R} = 0.00128... \times \frac{E}{R}$$

となり, 0 に近似して良いことが確認できる.

はじめから近似しないで計算すればいいのでは? と思った人もいるかもしれないが, 有効数字 1 桁で計算してかなり精度の良い回の挙動が得られるのであれば, 有効数字 1 桁で計算した方が楽である.

20. 荷電粒子の運動（静磁場）ーサイクロトロン

【メモ】

・運動する物体が磁場から受ける力（ローレンツ力）は常に速度と直交しているため、ローレンツ力の仕事率は0である。つまり、ローレンツ力は仕事をしない。

【解答】

[1]問1 電極間の間に生じている電場の大きさ E は平行一様電場の公式から

$$E = \frac{V}{d}$$

である。よって、粒子のエネルギー収支の式より、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = \begin{pmatrix} qE \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = qEd = qV \quad \therefore v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}.$$

問2 ローレンツ力。

問3 qvB 。

問4 運動方程式（中心成分）より、

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \quad \therefore r = \frac{mv}{\underline{qB}}.$$

問5 速さ v で πr 進む時間を求めればよいので、

$$t = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{\underline{qB}}.$$

[2]問1 D_L に入ったときの粒子の速さを v_0 とする。粒子のエネルギー収支より、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = qV, \\ \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = qV, \\ \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = qV \end{cases} \quad \therefore \frac{1}{2}mv_1^2 = 3qV \quad \therefore v_1 = \sqrt{\frac{6qV}{m}}.$$

問2 運動方程式（中心成分）より、

$$m \frac{v_1^2}{r} = qv_1B \quad \therefore r_1 = \frac{mv_1}{\underline{qB}}.$$

問3 以上の議論から、物体の速さ（運動エネルギー）は電極間を通過するごとに大きくなる事が分かる。速さの増加に伴い軌道半径も増加する。しかし、電極内部の空洞中を通過する時間は $\frac{\pi m}{qB}$ と質量、電荷、磁束密度だけで決まるので常に一定に保たれることが分かる。よって、この現象の適当な表現は ①, ④ である。

[3]問1 粒子のエネルギー収支より,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}mu_n^2 - \frac{1}{2}mu_{n-1}^2 = qV, \\ \frac{1}{2}mu_{n-1}^2 - \frac{1}{2}mu_{n-2}^2 = qV, \\ \vdots \\ \frac{1}{2}mu_1^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = qV \end{array} \right. \quad \therefore \frac{1}{2}mu_n^2 = nqV \quad \therefore v_n = \sqrt{\frac{2qV}{m}n}.$$

問2 半周にかかる時間は速さに依らず $\frac{\pi m}{qB}$ である. この時間が電位差が $+V \rightarrow -V \rightarrow +V \dots$ と変化する周期の $\frac{1}{2}$ 倍, $\frac{3}{2}$ 倍, ... と一致していればよいので,

$$\frac{2N-1}{2}T = \frac{\pi m}{qB} \quad \therefore T = \frac{2}{2N-1} \frac{\pi m}{qB}.$$

21. 交流回路

【メモ】

・ 交流回路の解法は以下のように分岐する.

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{素子が2種以上直列} \\ \rightarrow \text{電流/電圧の解を三角関数で仮定し, } t \text{ の恒等式として振幅と位相のずれを求める.} \\ \cdot \text{それ以外} \\ \rightarrow \text{通常の電気回路と同様.} \end{array} \right.$$

【解答】

問1 コンデンサの帯電量を Q とすると, $I_C = \frac{dQ}{dt}$ である. キルヒホッフ則より,

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0 \sin(\omega t) - RI_R = 0, \\ V_0 \sin(\omega t) - \frac{Q}{C} = 0, \\ V_0 \sin(\omega t) - L \frac{dI_L}{dt} = 0, \end{array} \right. \quad \therefore \left\{ \begin{array}{l} I_R = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t), \\ I_C = \frac{dQ}{dt} = C\omega V_0 \cos(\omega t), \\ I_L = -\frac{V_0}{L\omega} \cos(\omega t). \end{array} \right.$$

よって,

$$I_{R0} = \frac{V_0}{R}, \quad I_{C0} = \underbrace{C\omega V_0}, \quad I_{L0} = \frac{V_0}{\underbrace{L\omega}}.$$

問2 前問より,

$$I_R = \underbrace{I_{R0} \sin(\omega t)}, \quad I_C = \underbrace{I_{C0} \cos(\omega t)}, \quad I_L = \underbrace{-I_{L0} \cos(\omega t)}.$$

問3 電荷保存則 (キルヒホッフ第1法則) より,

$$I = \underbrace{I_R + I_C + I_L}.$$

問4 問2, 問3より,

$$\begin{aligned} I &= I_R + I_C + I_L \\ &= \frac{V_0}{R} \sin(\omega t) + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) V_0 \cos(\omega t) \\ &= \underbrace{V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2}} \sin(\omega t - \theta), \quad \left(\tan \theta = \underbrace{R \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right)} \right). \end{aligned}$$

問5 インピーダンスの定義より,

$$Z = \frac{V \text{ の振幅}}{I \text{ の振幅}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2}}}.$$

問6 解を $I = I_0 \sin(\omega t - \theta)$ と仮定する. キルヒホッフ則より,

$$\begin{aligned} V_0 \sin(\omega t) - RI - \frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} &= 0 \\ V_0 \sin(\omega t) &= RI_0 \sin(\omega t - \theta) - \frac{I_0}{C\omega} \cos(\omega t - \theta) + L\omega I_0 \cos(\omega t - \theta) \\ &= I_0 \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \sin(\omega t - \theta + \alpha) \end{aligned}$$

ここで, $\tan \alpha = \frac{1}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ である. この式が任意の時刻 t で成り立つように I_0, θ を選んで,

$$\begin{cases} V_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \\ 0 = -\theta + \alpha \end{cases}$$

$$\therefore I_0 = \frac{V_0}{\underbrace{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}}, \quad \tan \theta = \tan \alpha = \frac{1}{R} \underbrace{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}.$$

問7 定義より *51,

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T IV \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T I_0 V_0 \sin(\omega t - \theta) \sin(\omega t) \, dt \\ &= \frac{I_0 V_0}{T} \int_0^T \{ \sin^2(\omega t) \cos \theta - \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin \theta \} \, dt \\ &= \frac{I_0 V_0}{T} \int_0^T \left\{ \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \sin \theta \right\} \, dt \\ &= \frac{I_0 V_0}{T} \left[\frac{t}{2} \cos \theta - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \cos \theta + \frac{1}{4\omega} \cos(2\omega t) \sin \theta \right]_0^T \\ &= \frac{I_0 V_0}{T} \frac{T}{2} \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{I_0 V_0 \cos \theta}. \end{aligned}$$

*51 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ である.

22. vBl 公式の電磁誘導

【メモ】

- ・回路の一部が動く電磁誘導は、誘導起電力の決定では vBl の公式が基本となる。
- ・電磁誘導の問題は、①誘導起電力の決定、②回路の議論、③運動の議論、④エネルギーの議論、という作りが基本。今回はエネルギーの議論が付いていないので、ここで以下の問題を追加する。

【解答】

- [A] (1) Δt 間に横切る面積は $Lu\Delta t$ である。磁束の定義より、

$$\Delta\Phi = \underline{BLu\Delta t}.$$

- (2) vBl 公式より、

$$V = \underline{uBL}.$$

また、ファラデー則より、

$$V = \left| -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \underline{BLu}.$$

vBl 公式ではフレミング左手の規則から、ファラデー則では磁束密度に対して右ねじの方向から決定できる。今の場合図の上向きに生じる。

- (3) 電流を回路の反時計回りに定義する。キルヒホッフ則より、

$$uBL - R_1I - R_2I = 0 \quad \therefore I = \frac{uBL}{\underline{R_1 + R_2}}.$$

- (4) 運動方程式より、

$$M \cdot 0 = F_{\text{ex}} - IBL \quad \therefore F_{\text{ex}} = IBL = \frac{(BL)^2}{\underline{R_1 + R_2}} u.$$

F_{ex} の仕事率（単位時間当たりに行う仕事）は定義より *52,

$$W = \vec{F}_{\text{ex}} \cdot \vec{v}_1 = F_{\text{ex}}u = \frac{(uBL)^2}{\underline{R_1 + R_2}}.$$

- (5) 各抵抗での消費電力（単位時間当たりが生じるジュール熱）は、公式より、

$$P_1 = R_1I^2 = \left(\frac{uBL}{R_1 + R_2} \right)^2 R_1, \quad P_2 = R_2I^2 = \left(\frac{uBL}{\underline{R_1 + R_2}} \right)^2 R_2$$

*52 ここでの W は仕事ではないことに注意。仕事率だから W ではなく P を用いた方が気持ちがいい。

また, W , P_1 , P_2 を比較して,

$$W = \frac{(uBL)^2}{R_1 + R_2} = \left(\frac{uBL}{R_1 + R_2} \right)^2 (R_1 + R_2) = \underline{\underline{P_1 + P_2}}.$$

[B] 棒 1, 2 それぞれに流れる電流を図の下向きに I_1 , I_2 とする. また, 棒 1, 2 の速度をそれぞれ v_1 , v_2 , 加速度を a_1 , a_2 とする.

(1) $v_1 = v_2 = 0$ である. キルヒホッフ則より,

$$\begin{cases} E - r(I_1 + I_2) - 2rI_2 = 0, \\ E - r(I_1 + I_2) - 2rI_1 = 0 \end{cases} \quad \therefore I_1 = I_2 = \underline{\underline{\frac{E}{4r}}}.$$

(2) 棒 1 の速度が v_1 のときを考え, 最終結果に $v_1 = 0$ を代入する^{*53}. $v_2 = 0$ の下でキルヒホッフ則より,

$$\begin{cases} E - r(I_1 + I_2) - 2rI_2 = 0, \\ E - r(I_1 + I_2) - 2rI_1 - v_1BL = 0 \end{cases} \\ \therefore I_1 = \frac{2E - 3v_1BL}{8r}, \quad I_2 = \frac{2E + v_1BL}{8r}.$$

よって, 運動方程式より $v_1 = 0$ を代入して,

$$Ma_1 = I_1BL = \frac{2E - 0}{8r} \quad \therefore a_1 = \underline{\underline{\frac{EBL}{4Mr}}}.$$

(3) 前問の計算結果に $v_1 = v$ を代入して,

$$I_1 = \underline{\underline{\frac{2E - 3vBL}{8r}}}, \quad I_2 = \underline{\underline{\frac{2E + vBL}{8r}}}.$$

(4) v_1 が一定となったときの棒 1 の加速度 a_1 は 0 である. よって, 運動方程式より,

$$M \cdot 0 = I_1BL = \frac{2E - 3v_1BL}{8r} \quad \therefore v_1 = \underline{\underline{\frac{2}{3} \frac{E}{BL}}}.$$

(5) それぞれの棒が運動しているときのキルヒホッフ則, および運動方程式はそれぞれ,

$$\begin{cases} E - r(I_1 + I_2) - 2rI_2 - v_2BL = 0, \\ E - r(I_1 + I_2) - 2rI_1 - v_1BL = 0, \\ Ma_1 = I_1BL, \\ Ma_2 = I_2BL. \end{cases}$$

速さが一定ということから $a_1 = a_2 = 0$ であり, このとき運動方程式から $I_1 = I_2 = 0$ となる. よって,

$$\begin{cases} E - r(0 + 0) - 2r \cdot 0 - v_2BL = 0, \\ E - r(0 + 0) - 2r \cdot 0 - v_1BL = 0, \end{cases} \quad \therefore v_1 = v_2 = \underline{\underline{\frac{E}{BL}}}.$$

^{*53} 当たり前だが, 実際の入試では始めから $v_1 = 0$ を解いた方が計算した方がよい.

【補足】(5) の微分方程式を解いてみる

キルヒホッフ則より, I_1, I_2 は,

$$\begin{cases} E - r(I_1 + I_2) - 2rI_2 - v_2BL = 0, \\ E - r(I_1 + I_2) - 2rI_1 - v_1BL = 0 \end{cases}$$

$$\therefore I_1 = \frac{2E - (3v_1 - v_2)BL}{8r}, \quad I_2 = \frac{2E - (3v_2 - v_1)BL}{8r}.$$

これを運動方程式へ代入して,

$$\begin{cases} Ma_1 = -\frac{(BL)^2}{8r} \left\{ (3v_1 - v_2) - \frac{2E}{BL} \right\} & \dots\dots\dots ① \\ Ma_2 = -\frac{(BL)^2}{8r} \left\{ (3v_2 - v_1) - \frac{2E}{BL} \right\} & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

を得る.

まず, ① + ② を計算すると,

$$\begin{aligned} Ma_1 + Ma_2 &= -\frac{(BL)^2}{4r}(v_1 + v_2) + \frac{EBL}{2r} \\ \therefore a_1 + a_2 &= -\frac{(BL)^2}{4Mr} \left\{ (v_1 + v_2) - \frac{2E}{BL} \right\} \\ \therefore \frac{d}{dt}(v_1 + v_2) &= -\frac{(BL)^2}{4Mr} \left\{ (v_1 + v_2) - \frac{2E}{BL} \right\} \\ \frac{1}{(v_1 + v_2) - \frac{2E}{BL}} \frac{d(v_1 + v_2)}{dt} &= -\frac{(BL)^2}{4Mr} \\ \int \frac{1}{(v_1 + v_2) - \frac{2E}{BL}} \frac{d(v_1 + v_2)}{dt} dt &= -\int \frac{(BL)^2}{4Mr} dt \\ \log \left| (v_1 + v_2) - \frac{2E}{BL} \right| &= -\frac{(BL)^2}{4Mr} t + \spadesuit \\ \therefore v_1 + v_2 &= \frac{2E}{BL} + e^{\spadesuit} e^{-\frac{(BL)^2}{4Mr} t} \end{aligned}$$

となる. $t = 0$ で $v_1 = v_2 = 0$ より $e^{\spadesuit} = -\frac{2E}{BL}$ と求まり,

$$v_1 + v_2 = \frac{2E}{BL} \left(1 - e^{-\frac{(BL)^2}{4Mr} t} \right)$$

を得る.

続いて、①－②を計算すると、

$$\begin{aligned}
 Ma_1 - Ma_2 &= -\frac{(BL)^2}{2r}(v_1 - v_2) \\
 \therefore a_1 - a_2 &= -\frac{(BL)^2}{2Mr}(v_1 - v_2) \\
 \therefore \frac{d}{dt}(v_1 - v_2) &= -\frac{(BL)^2}{2Mr}(v_1 - v_2) \\
 \frac{1}{v_1 - v_2} \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} &= -\frac{(BL)^2}{2Mr} \\
 \int \frac{1}{v_1 - v_2} \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} dt &= -\int \frac{(BL)^2}{2Mr} dt \\
 \log |v_1 - v_2| &= -\frac{(BL)^2}{2Mr}t + \spadesuit \\
 \therefore v_1 - v_2 &= \pm e^{\spadesuit} e^{-\frac{(BL)^2}{2Mr}t}
 \end{aligned}$$

となる． $t = 0$ で $v_1 = v_2 = 0$ より $e^{\spadesuit} = 0$ と求まり、

$$v_1 - v_2 = 0$$

を得る．以上より、

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = \frac{2E}{BL} \left(1 - e^{-\frac{(BL)^2}{4Mr}t}\right), \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore v_1 = v_2 = \frac{E}{BL} \left(1 - e^{-\frac{(BL)^2}{4Mr}t}\right)$$

と求まる．十分時間経過後の v_1, v_2 は、以下のように極限值を取ればよい．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E}{BL} \left(1 - e^{-\frac{(BL)^2}{4Mr}t}\right) = \underbrace{\frac{E}{BL}}.$$

23. ファラデーの法則の電磁誘導

【メモ】

- ・磁石が運動するなどして回路を貫く磁束が時間変化することによって生じる誘導起電力はファラデー則からしか求まらない。
- ・レンツの法則（規則）とは「誘導起電力は、磁束の変化を妨げる向きに生じる」というものであるが、エネルギー保存則の言いかえに過ぎない。

【解答】

- 1 N 極の面が近づくとき、C を貫く磁束は増加する。誘導電流が反時計回りに流れると、 z 軸負方向に磁場が発生することで C を貫く磁束は減少する。よって、反時計回りに誘導電流が流れるよう 反時計回り の誘導起電力が生じる。なお、エネルギー保存則の観点からは「回路にジュール熱が生じることから磁石は減速する方向に力を受ける。すなわち、 z 軸負方向（斥力の向き）に磁束密度が生じるように反時計回りに誘導電流が生じるように誘導起電力が生じる。」と判断できる。
- 2 磁束密度の水平成分（管の中心から外向きに伸びる向きを正）を B_r 、磁束密度の z 成分を B_z とする。C に流れる電流を I としたとき、C を構成する微小部分の長さ $\Delta\ell$ の部分が各磁束密度の成分から受けるアンペール力の水平成分 f_r 、および z 軸方向成分 f_z はそれぞれ、

$$f_r = -IB \cos \theta \Delta\ell, \quad f_z = IB \sin \theta \Delta\ell$$

である。合力の水平成分は f_r を 1 周に亘って和を取れば相殺して 0 となる。他方、合力の z 成分は f_z を 1 周に亘って和を取れば、

$$\sum_{1 \text{ 周}} f_z = \sum_{1 \text{ 周}} IB \sin \theta \Delta\ell = IB \sin \theta \sum_{1 \text{ 周}} \Delta\ell = IB \sin \theta \cdot 2\pi r$$

となる。よって、合力は z 軸正方向に大きさ $f = \underline{IB \sin \theta} \cdot 2\pi r$ であり、その向きは z 軸正方向 である。

- 3 前問に示した。
- 4 磁石の上部にある C と対称な位置にある管の部分を D と呼ぶことにする。D を貫く磁束は減少する。誘導電流が時計回りに流れると、 z 軸正方向に磁場が発生する。そのため、D には時計回りに誘導電流が流れるよう時計回りの誘導起電力が生じる ^{*54}。

図より、磁束密度の水平成分（管の中心から外向きに伸びる向きを正）は $-B_r (< 0)$ 、磁束密度

^{*54} エネルギー保存則の観点からは「回路にジュール熱が生じることから磁石は減速する方向に力を受ける。すなわち、 z 軸正方向（引力の向き）に磁束密度が生じるように反時計回りに誘導電流が生じるように誘導起電力が生じる。」と判断できる。

の z 成分は B_z である。D に流れる電流を I としたとき、D を構成する微小部分の長さ $\Delta\ell$ の部分が各磁束密度の成分から受けるアンペール力の水平成分 f_r 、および z 軸方向成分 f_z はそれぞれ、

$$f_r = +IB \cos \theta \Delta\ell, \quad f_z = IB \sin \theta \Delta\ell$$

となり、合力の水平成分は f_r を 1 周に亘って和を取れば相殺して 0 に、合力の z 成分は f_z を 1 周に亘って和を取れば $2\pi IB r \sin \theta$ となる。よって、その向きは z 軸正方向 である。

- 5 管は磁石から z 軸正方向の力を受けるので、磁石が管から受ける力は作用反作用の法則より z 軸負方向となる.. よって、運動方程式は、

$$Ma = \underline{\underline{Mg - F}}.$$

- 6 v が一定値を取るとき、 $a = 0$ である。よって、運動方程式より、

$$M \cdot 0 = Mg - F \quad \therefore F = \underline{\underline{Mg}} (= F_0)$$

- 7 磁場は仕事をしないため、力学系と回路系全体でのエネルギー収支は 0 となる。よって、運動エネルギー変化を ΔK 、位置エネルギー変化を ΔU 、管に生じるジュール熱を J とすると、

$$\Delta K + \Delta U + J = 0$$

が成り立つ。速さが一定のとき運動エネルギー変化は 0 となるから、

$$J = -\Delta U$$

となる。よって、単位時間当たりでは、

$$J = -(-Mgv) = \underline{\underline{Mgv}}.$$

なお、以下のように重力場を外部と考えてもよい。

$$\begin{aligned} \Delta K + J &= W_{\text{重力}} \\ \therefore J &= W_{\text{重力}} - \Delta K = Mgv - 0 = \underline{\underline{Mgv}}. \end{aligned}$$

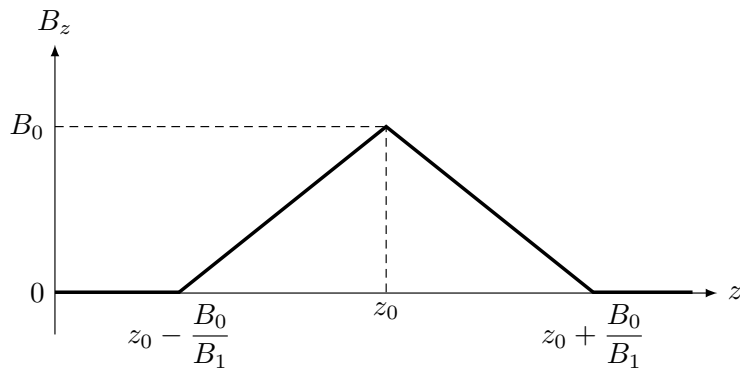
【解答】適当なモデル化をして，力の関数形と終端速度を求めてみよう

管の内径を r ，厚みを $d (\ll r)$ ，管の素材の抵抗率を ρ とする．

考えるリングの位置を z_0 ，磁石の位置を z とする．磁束密度の z 成分が

$$B_z(z_0, z) = \begin{cases} B_0 - B_1|z_0 - z| & \left(|z_0 - z| \leq \frac{B_0}{B_1} \right) \\ 0 & \left(|z_0 - z| \geq \frac{B_0}{B_1} \right) \end{cases}$$

と与えられるモデルを考える（グラフは以下の図）．



このとき，位置 z_0 にあるリングを貫く磁束 Φ は，

$$\Phi = \pi r^2 B_z(z_0, z)$$

となる．

■誘導起電力

リングに生じる誘導起電力を考える． $z < z_0$ でかつ $|z_0 - z| \leq \frac{B_0}{B_1}$ の区間の場合を考える．磁束密度の z 成分は

$$B_z(z_0, z) = B_0 - B_1(z_0 - z)$$

となるので，ファラデー則より，

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{d}{dt} \{B_0 - B_1(z_0 - z)\} = -\pi r^2 B_1 \frac{dz}{dt} = -\pi r^2 B_1 v$$

と求まる．ここで，正の向きは磁束密度の z 成分を右手で握るようにしたときの親指以外の指の方向（右ねじの規則）である．

■抵抗値と誘導電流

まず，リングの抵抗値 R を求める． $|z_0 - z| \leq \frac{B_0}{B_1}$ の区間を微小に分割し，その幅を $\Delta\zeta$ とすると，断面積 $d\Delta\zeta$ ，長さ $2\pi\left(r + \frac{d}{2}\right) \doteq 2\pi r$ より，

$$R = \rho \frac{2\pi r}{d\Delta\zeta}$$

である．よって，誘導電流は，

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\pi r^2 B_1 v \cdot \frac{d\Delta\zeta}{2\pi r \rho} = -\frac{rdB_1}{2\rho} v \Delta\zeta$$

と求まる．

■磁場の z 成分 B_z と半径成分 B_r

$z < z_0$ でかつ $|z_0 - z| \leq \frac{B_0}{B_1}$ の区間とする．

位置 z_0 を囲うように厚さ Δz_0 の円柱領域を考える．上面，下面の位置はそれぞれ $z_0 \mp \frac{\Delta z_0}{2}$ である．微小な円柱領域ゆえ，側面を貫く磁束密度成分 B_r はこの側面上で一定と見做してよい．磁気に関するガウス則より，

$$-B_z \left(z_0 + \frac{\Delta z_0}{2}, z \right) \cdot \pi r^2 + B_z \left(z_0 - \frac{\Delta z_0}{2}, z \right) \cdot \pi r^2 - B_r \cdot 2\pi r \Delta z_0 = 0$$

が成り立つ．ここで， $B(z_0, z) = B_0 - B_1(z_0 - z)$ より，

$$\begin{aligned} B_z \left(z_0 + \frac{\Delta z_0}{2}, z \right) - B_z \left(z_0 - \frac{\Delta z_0}{2}, z \right) &= \left\{ B_0 - B_1 \left(z_0 + \frac{\Delta z_0}{2} - z \right) \right\} \\ &\quad - \left\{ B_0 - B_1 \left(z_0 - \frac{\Delta z_0}{2} - z \right) \right\} \\ &= -B_1 \Delta z \end{aligned}$$

とまとめられることを用いて，

$$-\pi r^2 (-B_1 \Delta z_0) - 2\pi r \cdot B_r \Delta z_0 \quad \therefore B_r = \frac{r}{2} B_1$$

と求まる．

■磁石がリングから受ける力

以上より，考えていたリングに流れる誘導電流が磁石から受ける力は，作用反作用の法則から同じ大きさ， z 軸負方向で，

$$f = -IB_r \cdot 2\pi \left(r + \frac{d}{2} \right) \doteq -\frac{rdB_1}{2\rho} v \Delta\zeta \cdot B_r \cdot 2\pi r = -\frac{\pi r^3 dB_1^2}{2\rho} v \Delta\zeta$$

と求まり，これをリングが存在する $|z_0 - z| \leq \frac{B_0}{B_1}$ の区間全体で足し合わせれば，

$$F = \int_{-\frac{B_0}{B_1}}^{+\frac{B_0}{B_1}} f \, d\zeta = - \int_{-\frac{B_0}{B_1}}^{+\frac{B_0}{B_1}} \frac{\pi r^3 d B_1^2}{2\rho} v \, d\zeta = - \frac{\pi r^3 d B_0 B_1}{\rho} v$$

となる．よって，磁石の運動方程式，および終端速度 v_f は以下のように求まる．

$$Ma = Mg - \frac{\pi r^3 d B_0 B_1}{\rho} v \quad \therefore v_f = \frac{\rho Mg}{\pi r^3 d B_0 B_1}.$$

