

問題編



**20.** 図1のように中空で半円状の電極を、距離  $d$  の間隔をあけて2つ並べて水平面上に設置する。距離  $d$  に比べて電極の半径は十分に大きいとする。図1を真上から見た図2において、左側の電極  $D_L$  の電位は常に0に保ち、右側の電極  $D_R$  の電位は一定値に保つ。電極  $D_L$  と電極  $D_R$  それぞれに磁束密度  $B$  ( $B$  は正の値) の一様な磁場が図2の紙面の裏から表の向きにかかっている。電極以外の場所の磁束密度は0である。電極の内部は空洞になっており、電極の周囲および電極の空洞内は真空中に保たれている。電極  $D_L$  と  $D_R$  の空洞内の電位はそれぞれの電極の電位と同じ一定値になっているとする。また、重力は無視できるとし、以下の問いに答えよ。円周率は  $\pi$  を使うこと。

- [1] 電極  $D_R$  の電位が  $-V$  ( $V$  は正の値) のとき、電極  $D_L$  の空洞の右端に正の電荷  $q$  をもつ粒子  $P$  を静かに置くと、粒子  $P$  は電極  $D_R$  に向かって加速され、電極  $D_R$  の空洞入口の面に対して垂直に入って円運動する。粒子  $P$  の質量は  $m$  とし、大きさは無視できるとする。

問1 粒子  $P$  が電極  $D_R$  の左端入口に到達したとき、粒子  $P$  の速さ  $v$  を、 $d$ ,  $q$ ,  $V$ ,  $B$ ,  $m$  のうちから必要なものを用いて表せ。

問2 粒子  $P$  が電極  $D_R$  の空洞中を運動しているときに、粒子  $P$  にはたらく力の名称を答えよ。

問3 粒子  $P$  が電極  $D_R$  の空洞中を運動しているときに、粒子  $P$  にはたらく力の大きさ  $F$  を、 $v$ ,  $q$ ,  $B$  を用いて表せ。

問4 粒子  $P$  が電極  $D_R$  の空洞中を円運動するときの半径  $r$  を、 $v$ ,  $q$ ,  $B$ ,  $m$  を用いて表せ。

問5 粒子  $P$  が電極  $D_R$  の空洞に入ったあと、半周して電極  $D_R$  の空洞から出るまでの時間  $t$  を、 $q$ ,  $B$ ,  $m$  を用いて表せ。

- [2] 粒子  $P$  は電極  $D_R$  の空洞中を図2のように半円状の軌道を描いて運動する。粒子  $P$  が電極  $D_R$  の空洞内を進んで空洞から出たときに電極  $D_R$  の電位を  $-V$  から  $+V$  に変化させる。その後、粒子  $P$  は電極電極  $D_L$  に入って電極  $D_L$  の空洞中を円運動する。粒子  $P$  が電極電極  $D_L$  の空洞を出たときに電極  $D_R$  の電位をふたたび  $-V$  にする。

問6 粒子  $P$  がこのようにして1周して電極  $D_R$  の空洞にふたたび入ったとき、粒子  $P$  の速さ  $v_1$  を、 $q$ ,  $V$ ,  $m$  を用いて表せ。

問7 このふたたび入った粒子  $P$  が  $D_R$  の空洞内を円運動するときの半径  $r_1$  を、 $v_1$ ,  $q$ ,  $B$ ,  $m$  を用いて表せ。

問8 上記の操作を繰り返すことで、粒子  $P$  は2つの電極空洞内をそれぞれ半円状に運動することを繰り返す。これまでの問題解答からわかることについて述べた次の①～⑤の文章のうち、正しいものをすべて選んで番号で答えよ。

- ① 粒子  $P$  は、電極  $D_R$  と  $D_L$  の間を通過するときに加速されて運動エネルギーが大きくなる。

- ② 粒子 P が電極  $D_R$  の空洞中を通過するのにかかる時間は、粒子 P が速くなるに従って短くなる。
- ③ 粒子 P は、電極  $D_R$  の空洞中を通過する間に運動エネルギーが大きくなる。
- ④  $D_R$  の空洞中を通過する粒子 P の円運動の半径は 1 周するごとに大きくなる。
- ⑤ 上記①～④に正しいものはない。

[2024 年徳島大学, 重問 129 対応]

以下, 追加問題.

- [3] 粒子 P が  $n$  回目に電極  $D_R$  を半周しているときの粒子 P の速さを  $u_n$ , 粒子 P が空洞内から飛び出し  $n$  回目に電極  $D_L$  を半周しているとき速さを  $u_{n+1}$  と記す.  $u_1 = v$  である ( $v$  は問 1 の  $v$  の値).

問 9  $u_n$  の一般項を,  $q, V, m, n$  を用いて表せ.

- 問 10 粒子 P をこのように加速させるためには, 粒子 P が電極  $D_R$  の空洞内を進んで空洞から出たときに電極  $D_R$  の電位が  $-V$  から  $+V$  に, 粒子 P が電極  $D_L$  の空洞内を進んで空洞から出たときに電極  $D_R$  の電位が  $+V$  から  $-V$  に変化すればよい. この一連の電位変化の周期  $T$  として許される値を,  $q, B, V, m$ , および 1 以上の自然数  $N$  を用いて表せ.

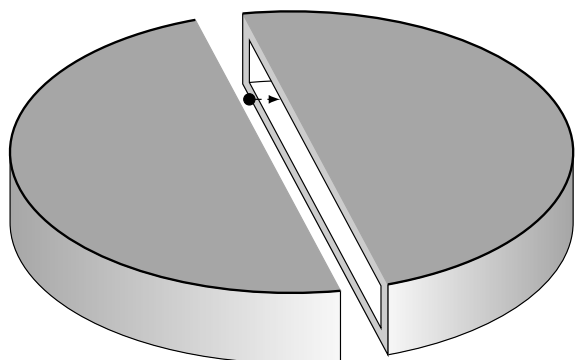


図 1

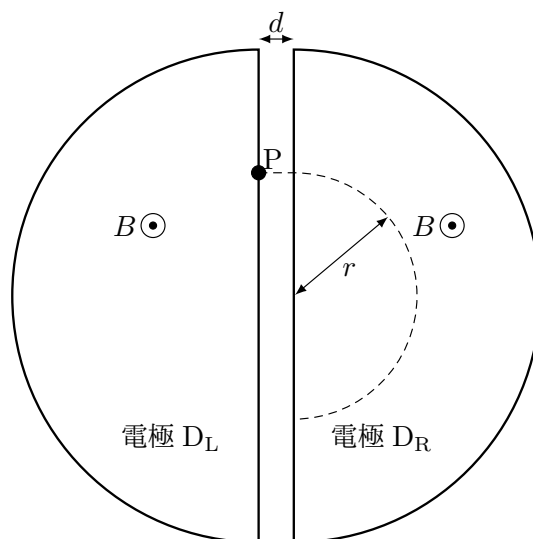


図 2

**21.** 図 1 のように、交流電源、コイル、コンデンサー、抵抗からなる回路について考える。交流電源の交流電圧の最大値を  $V_0$  [V]、角振動数を  $\omega$  [rad/s]、コンデンサーの電気容量を  $C$  [F]、コイルの自己インダクタンスを  $L$  [H]、抵抗を  $R$  [ $\Omega$ ]、円周率を  $\pi$  とする。電流は図 1 の矢印向きを正とする。また時刻  $t$  [s] において交流電源の電圧  $V$  [V] は  $V = V_0 \sin \omega t$ 、交流電源から流れる電流は  $I$  [A] であるとする。コイル、コンデンサー、抵抗に流れる電流をそれぞれ  $I_L$  [A]、 $I_C$  [A]、 $I_R$  [A] とし、その最大値をそれぞれ  $I_{L0}$  [A]、 $I_{C0}$  [A]、 $I_{R0}$  [A] とする。十分な時間が経過しているとして、以下の問いに答えよ。なお、「角振動数」は「角周波数」と同じ意味である。「交流インピーダンス」とは「交流回路のインピーダンス」のことである。

問 1 電流の最大値  $I_{L0}$ 、 $I_{C0}$ 、 $I_{R0}$  をそれぞれ  $V_0$ 、 $\omega$ 、 $C$ 、 $L$ 、 $R$  の中から必要なものを用いて表せ。

問 2 時刻  $t$  において、流れる電流  $I_L$ 、 $I_C$ 、 $I_R$  をそれぞれ  $I_{L0}$ 、 $I_{C0}$ 、 $I_{R0}$ 、 $\omega$ 、 $t$  の中から必要なものを用いて表せ。

問 3 電流  $I$  を  $I_L$ 、 $I_C$ 、 $I_R$  を用いて表せ。

問 4  $\theta$  [rad] を電圧  $V$  の位相に対する電流の位相の遅れとして、 $I$  を  $V_0$ 、 $\omega$ 、 $C$ 、 $L$ 、 $R$ 、 $t$ 、 $\theta$  を用いて表せ。また、 $\tan \theta$  を  $\omega$ 、 $C$ 、 $L$ 、 $R$  を用いて表せ。以下の三角関数の公式を用いてもよい。

$$a \sin x - b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x - \theta)$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

問 5 図 1 の回路内の、コイル、コンデンサー、抵抗からなる並列回路の交流インピーダンス  $Z$  [ $\Omega$ ] を  $\omega$ 、 $C$ 、 $L$ 、 $R$  を用いて表せ。

以上の結果から、図 1 の回路における交流インピーダンス  $Z$  は、 $\frac{1}{\omega_0 L} - \omega_0 C = 0$  を満たす角振動数  $\omega_0$  [rad/s] のとき、最大値となる。このときの周波数  $f_0$  [Hz] =  $\frac{\omega_0}{2\pi}$  を共振周波数と呼び、ラジオの回路の一部として用いて、特定の放送局の周波数と回路の共振周波数を一致させることにより、その放送局からの電波を選択して受信できるようになる。

[2020 年福井大学 (問 6 以降削除)、重問 144 対応]

以下追加問題。

問 6 交流電源、コイル、コンデンサー、抵抗を直列に繋いだ図 2 のような回路を考える。回路を流れる電流  $I$  は、 $I = I_0 \sin(\omega t - \theta)$  のように書ける。 $I_0$  を、 $V_0$ 、 $\omega$ 、 $C$ 、 $L$ 、 $R$  を用いて表せ。また、 $\tan \theta$  を  $\omega$ 、 $C$ 、 $L$ 、 $R$  を用いて表せ。

問 7 図 2 の回路における平均消費電力  $P$  を、 $I_0$ 、 $V_0$ 、 $\theta$  を用いて表せ。

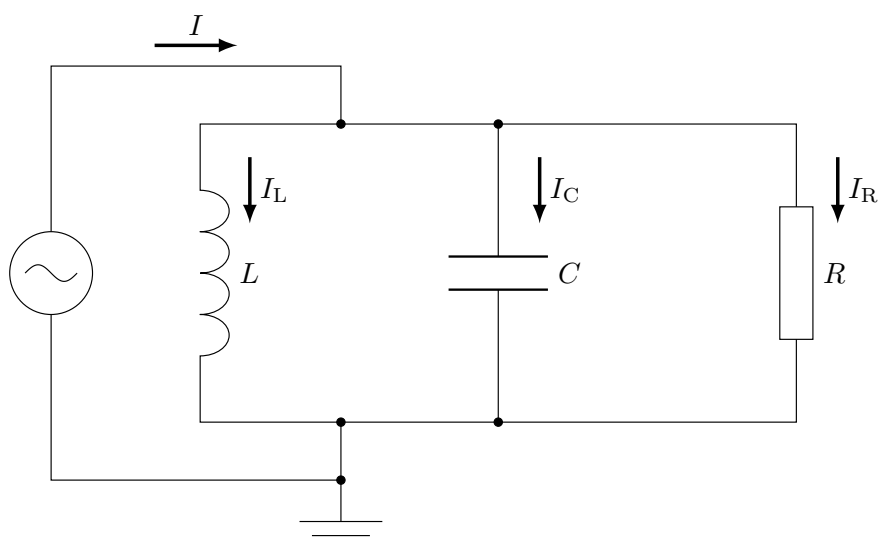


図 1

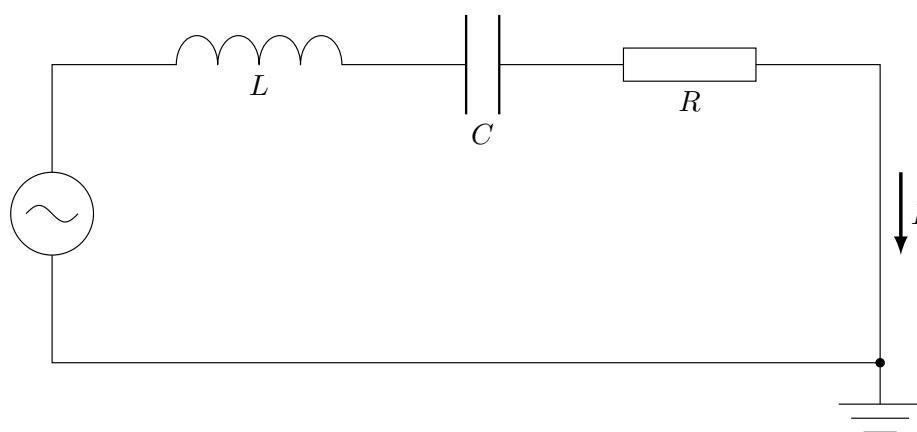


図 2

## ■略解

### 20. 荷電粒子の運動（静磁場）

問1  $\sqrt{\frac{2qV}{m}}$

問2 ローレンツ力

問3  $qvB$

問4  $\frac{mv}{qB}$

問5  $\frac{\pi m}{qB}$

問6  $\sqrt{\frac{6qV}{m}}$

問7  $\frac{mv_1}{qB}$

問8 ①, ④

問9  $\sqrt{\frac{2qV}{m}}n$

問10  $\frac{2}{(2N-1)B} \sqrt{\frac{2mV}{q}}$

### 21. 交流回路

問1  $I_{L0} = \frac{V_0}{L\omega}, I_{C0} = C\omega V_0, I_{R0} = \frac{V_0}{R}$

問2  $I_L = -I_{L0} \cos \omega t, I_C = I_{C0} \cos \omega t,$

$I_R = I_{R0} \sin \omega t$

問3  $I_L + I_C + I_R$

問4  $I = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} \sin(\omega t - \theta),$

$\tan \theta = R \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$

問5  $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}}$

問6  $I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}},$

$\tan \theta = \frac{1}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

問7  $\frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \theta$

## 解答編

---

## 20. 荷電粒子の運動（静磁場）ーサイクロトロン

【メモ】

・運動する物体が磁場から受ける力（ローレンツ力）は常に速度と直交しているため、ローレンツ力の仕事率は0である。つまり、ローレンツ力は仕事をしない。

【解答】

[1]問1 電極間の間に生じている電場の大きさ  $E$  は平行一様電場の公式から

$$E = \frac{V}{d}$$

である。よって、粒子のエネルギー収支の式より、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = \begin{pmatrix} qE \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = qEd = qV \quad \therefore v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}.$$

問2 ローレンツ力。

問3  $qvB$ 。

問4 運動方程式（中心成分）より、

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \quad \therefore r = \frac{mv}{\underline{qB}}.$$

問5 速さ  $v$  で  $\pi r$  進む時間を求めればよいので、

$$t = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{\underline{qB}}.$$

[2]問1  $D_L$  に入ったときの粒子の速さを  $v_0$  とする。粒子のエネルギー収支より、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = qV, \\ \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = qV, \\ \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = qV \end{cases} \quad \therefore \frac{1}{2}mv_1^2 = 3qV \quad \therefore v_1 = \sqrt{\frac{6qV}{m}}.$$

問2 運動方程式（中心成分）より、

$$m \frac{v_1^2}{r} = qv_1B \quad \therefore r_1 = \frac{mv_1}{\underline{qB}}.$$

問3 以上の議論から、物体の速さ（運動エネルギー）は電極間を通過するごとに大きくなる事が分かる。速さの増加に伴い軌道半径も増加する。しかし、電極内部の空洞中を通過する時間は  $\frac{\pi m}{qB}$  と質量、電荷、磁束密度だけで決まるので常に一定に保たれることが分かる。よって、この現象の適当な表現は ①, ④ である。



[3]問1 粒子のエネルギー収支より,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}mu_n^2 - \frac{1}{2}mu_{n-1}^2 = qV, \\ \frac{1}{2}mu_{n-1}^2 - \frac{1}{2}mu_{n-2}^2 = qV, \\ \vdots \\ \frac{1}{2}mu_1^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = qV \end{array} \right. \quad \therefore \frac{1}{2}mu_n^2 = nqV \quad \therefore v_n = \sqrt{\frac{2qV}{m}n}.$$

問2 半周にかかる時間は速さに依らず  $\frac{\pi m}{qB}$  である. この時間が電位差が  $+V \rightarrow -V \rightarrow +V \dots$  と変化する周期の  $\frac{1}{2}$  倍,  $\frac{3}{2}$  倍, ... と一致していればよいので,

$$\frac{2N-1}{2}T = \frac{\pi m}{qB} \quad \therefore T = \frac{2}{2N-1} \frac{\pi m}{qB}.$$

## 21. 交流回路

【メモ】

・ 交流回路の解法は以下のように分岐する.

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{素子が2種以上直列} \\ \rightarrow \text{電流/電圧の解を三角関数で仮定し, } t \text{ の恒等式として振幅と位相のずれを求める.} \\ \cdot \text{それ以外} \\ \rightarrow \text{通常の電気回路と同様.} \end{array} \right.$$

【解答】

問1 コンデンサの帯電量を  $Q$  とすると,  $I_C = \frac{dQ}{dt}$  である. キルヒホッフ則より,

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0 \sin(\omega t) - RI_R = 0, \\ V_0 \sin(\omega t) - \frac{Q}{C} = 0, \\ V_0 \sin(\omega t) - L \frac{dI_L}{dt} = 0, \end{array} \right. \quad \therefore \left\{ \begin{array}{l} I_R = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t), \\ I_C = \frac{dQ}{dt} = C\omega V_0 \cos(\omega t), \\ I_L = -\frac{V_0}{L\omega} \cos(\omega t). \end{array} \right.$$

よって,

$$I_{R0} = \frac{V_0}{R}, \quad I_{C0} = \underline{\underline{C\omega V_0}}, \quad I_{L0} = \underline{\underline{\frac{V_0}{L\omega}}}.$$

問2 前問より,

$$I_R = \underline{\underline{\frac{V_0}{R} \sin(\omega t)}}, \quad I_C = \underline{\underline{I_{C0} \cos(\omega t)}}, \quad I_L = \underline{\underline{-I_{L0} \cos(\omega t)}}.$$

問3 電荷保存則 (キルヒホッフ第1法則) より,

$$I = \underline{\underline{I_R + I_C + I_L}}.$$

問4 問2, 問3より,

$$\begin{aligned} I &= I_R + I_C + I_L \\ &= \frac{V_0}{R} \sin(\omega t) + \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) V_0 \cos(\omega t) \\ &= \underline{\underline{V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2} \sin(\omega t - \theta)}}, \quad \left( \tan \theta = \underline{\underline{R \left( \frac{1}{L\omega} - C\omega \right)}} \right). \end{aligned}$$

問5 インピーダンスの定義より,

$$Z = \frac{V \text{ の振幅}}{I \text{ の振幅}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2}}.$$

問6 解を  $I = I_0 \sin(\omega t - \theta)$  と仮定する．キルヒホッフ則より，

$$\begin{aligned} V_0 \sin(\omega t) - RI - \frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} &= 0 \\ V_0 \sin(\omega t) &= RI_0 \sin(\omega t - \theta) - \frac{I_0}{C\omega} \cos(\omega t - \theta) + L\omega I_0 \cos(\omega t - \theta) \\ &= I_0 \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \sin(\omega t - \theta + \alpha) \end{aligned}$$

ここで， $\tan \alpha = \frac{1}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$  である．この式が任意の時刻  $t$  で成り立つように  $I_0$ ， $\theta$  を選んで，

$$\begin{cases} V_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \\ 0 = -\theta + \alpha \end{cases}$$

$$\therefore I_0 = \frac{V_0}{\underbrace{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}}, \quad \tan \theta = \tan \alpha = \frac{1}{R} \underbrace{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}.$$

問7 定義より \*1，

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T IV \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T I_0 V_0 \sin(\omega t - \theta) \sin(\omega t) \, dt \\ &= \frac{I_0 V_0}{T} \int_0^T \{ \sin^2(\omega t) \cos \theta - \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin \theta \} \, dt \\ &= \frac{I_0 V_0}{T} \int_0^T \left\{ \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \sin \theta \right\} \, dt \\ &= \frac{I_0 V_0}{T} \left[ \frac{t}{2} \cos \theta - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \cos \theta + \frac{1}{4\omega} \cos(2\omega t) \sin \theta \right]_0^T \\ &= \frac{I_0 V_0}{T} \frac{T}{2} \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{I_0 V_0 \cos \theta}. \end{aligned}$$

\*1  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  である．