

問題編



6. 図1のように、なめらかな水平面に壁があり、その壁にばね定数 k のばねが取り付けられている。水平面上に置かれた質量 $2m$ の小物体 A をばねに接触させてばねを自然長から長さ x だけ縮め、静かに手を離した。すると小物体 A はばねから離れ、その後、水平面上を右向きに一定速度 v_a で運動し、静止していた質量 m の小物体 B と衝突した。ただし、右向きを正、重力加速度の大きさを g とする。

- (1) 自然長から x 縮められたばねに蓄えられた弾性エネルギーを求めなさい。
- (2) 小物体 A の速度 v_a を求めなさい。
- (3) 小物体 A と B の反発係数が e ($0 < e < 1$) のとき、衝突後の小物体 B の速度 v_b' を v_a を用いて表しなさい。
- (4) 衝突後の小物体 A の運動の向きを答えなさい。

図2のように、衝突後、右向きに速度 v_b' で運動していた小物体 B が上面で水平面と同じ高さの台車に乗り移ると、台車は右向きに動き出した。小物体 B は台車上で ℓ だけすべり、その後は台車と一体になって水平面を右向きに速度 V で運動した。台車の質量は M で、台車と床の間には摩擦ははたらかず、小物体 B と台車の間の動摩擦係数は μ' である。また右向きを正、重力加速度の大きさを g とする。

- (5) 小物体 B が台車の上をすべっているときの小物体 B および台車の床に対する加速度をそれぞれ求めなさい。
- (6) 速度 V を M , m , v_b' を用いて表しなさい。
- (7) 小物体 B が台車の上をすべっていた時間 t を g , μ' , V , M , m を用いて表しなさい。
- (8) 小物体 B が台車の上ですべる間に失われた全力学的エネルギー ΔE を M , m , v_b' を用いて表しなさい。
- (9) 小物体 B が台車の上をすべった距離 ℓ を g , μ' , ΔE , m を用いて表しなさい。
- (10) 小物体 B が台車に乗ってからの台車の速度と時間の関係の概略図をグラフ上に描きなさい。ただし、小物体 B が台車に乗った瞬間の時刻を 0、小物体 B が台車の上で停止した時刻を t とする。

[2020 年大分大学, 重問 37 対応]

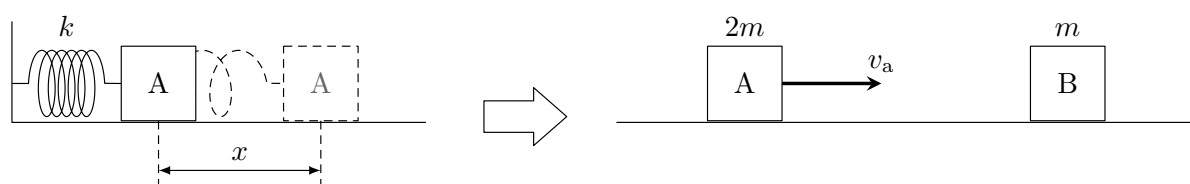


図 1

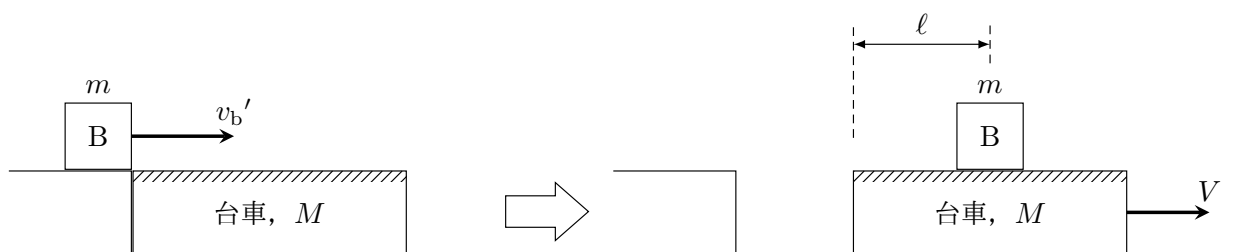


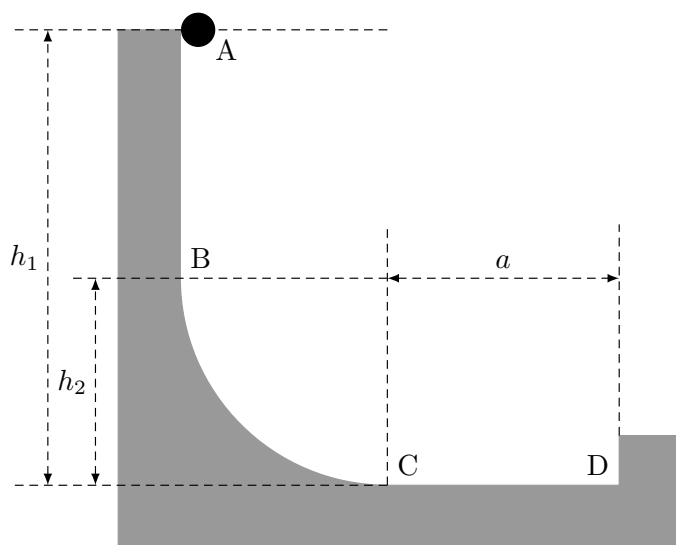
図 2

7. なめらかで水平な床の上に、図のような質量 M [kg] の台が静止している．台上の点 A～D は鉛直な同一平面内にあり，点 A から点 B にかけて鉛直，点 B から点 C にかけてなめらかな曲面が続く，点 C から点 D にかけて水平となっている．点 A, B はそれぞれ曲面の最下点 C より h_1, h_2 [m] の高さであり，CD 間の距離は a [m] である．

点 A で質量 m [kg] の小球を静かにはなした．小球は点 B と点 C を通過して点 D にある鉛直な壁に衝突してはね返り，点 C と点 B を再び通過してある高さの最高点まで到達した．この間，小球は台から離れることなく点 A～D を含む鉛直な同一平面内のみを運動した．小球と台，および台と床の間には摩擦はないものとし，重力加速度の大きさを g [m/s²]，点 D にある壁と小球のはね返り係数を e とする．また，以下で求める小球と台の速さは，床に対する速さとする．

- (1) 小球が最初に点 B を通過するときの小球の速さ v_B [m/s] を g, h_1, h_2 を用いて表せ．
- (2) 小球が最初に点 C を通過するときの小球の速さ v_C [m/s] と台の速さ V_C [m/s] を g, h_1, M, m を用いて表せ．
- (3) 小球が点 C を通過してから点 D に到達するまでの時間 t [s] を g, h_1, M, m, a を用いて表せ．
- (4) 小球が点 D にある壁と衝突した直後の小球の速さ v'_D [m/s] と台の速さ V'_D [m/s] をそれぞれ g, h_1, M, m, e を用いて表せ．
- (5) 小球が曲面を上がり点 B を超えて最高点に達したときの，小球の点 C からの高さ h_3 [m] を g, h_1, M, m, e のうち必要なものを用いて表せ．

[2023 年京都府立大学，重問 41 対応]



没

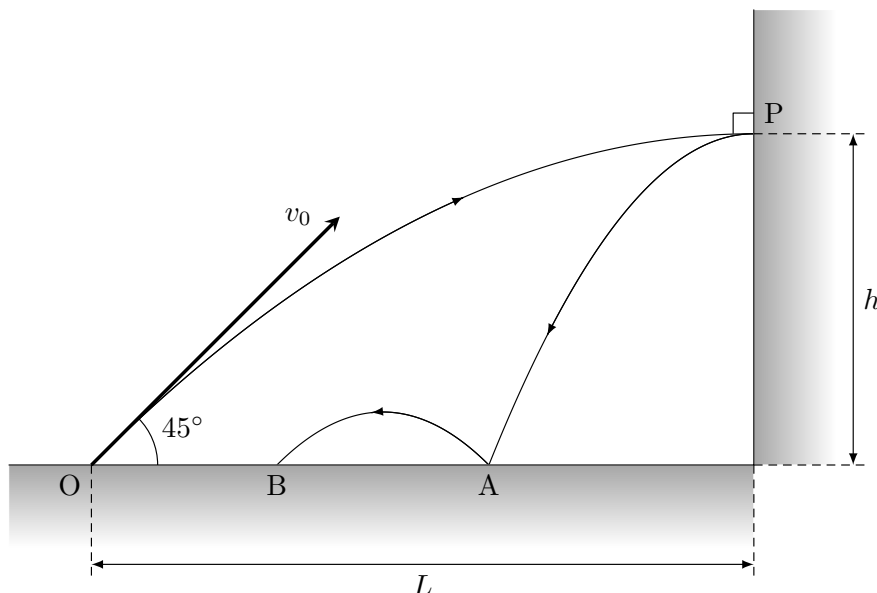
*1 図に示すように、水平な床と、鉛直方向に置かれた壁がある。壁から距離 L 離れた床上の点 O から 45° をなす向きに、小球を大きさ v_0 の初速度で投げた。小球は壁上の点 P (床からの高さ h) で、壁に対して垂直に衝突し、はね返った小球は床上の点 A に落ち、はね返って上昇し、床上の点 B に衝突した。小球の質量は m 、小球の床や壁との間の反発係数は e ($0 < e < 1$)、重力加速度の大きさは g である。なお、床と壁は、なめらかでかたいものとする。

- (1) 床から点 P までの高さ h を、 v_0 , m , g のうち、必要なものを用いて表せ。
- (2) 壁から点 O までの距離 L を、 v_0 , m , g のうち、必要なものを用いて表せ。
- (3) 点 P における衝突前後で小球が失った力学的エネルギーの大きさ E を、 v_0 , m , e , g のうち、必要なものを用いて表せ。
- (4) 点 O と点 B が一致するとき、 e の数値を求めよ。

[2024 年長崎大学, 重問 39 対応]

以下、追加問題。

- (5) (4) のとき、打ち出してから小球のはね返りが収まるまでの時間 T を求めよ。

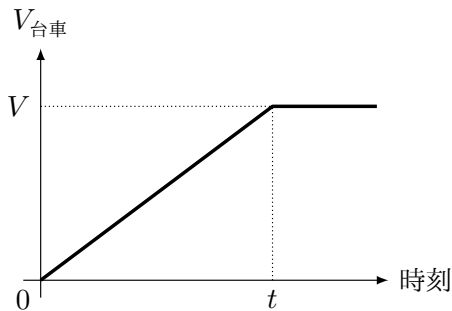


*1 補講問題 1 と被りすぎていたし、こっちの方が簡単で.... まだ間に合うのなら問題 1 をこちらに差し替えたい気持ちです。

■ 略解

6. 衝突，摩擦を介する 2 物体

- (1) $\frac{1}{2} kx^2$
- (2) $x\sqrt{\frac{k}{2m}}$
- (3) $\frac{2(1+e)}{3}v_a$
- (4) 右方向
- (5) B: $-\mu'g$ 台車: $\mu'\frac{m}{M}g$
- (6) $\frac{m}{M+m}v_b'$
- (7) $\frac{MV}{\mu'mg}$
- (8) $\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v_b'^2$
- (9) $\frac{\Delta E}{\mu'mg}$
- (10)



7. 多体系，衝突

- (1) $\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$
- (2) $v_C = \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}$
 $V_C = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}$
- (3) $a\sqrt{\frac{M}{2(M+m)gh_1}}$
- (4) $v'_D = e\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}$
 $V'_D = e\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}$
- (5) e^2h_1

没 衝突と等加速度運動の時間追跡

- (1) $\frac{v_0^2}{4g}$
- (2) $\frac{v_0^2}{2g}$
- (3) $\frac{1-e^2}{4}mv_0^2$
- (4) $\frac{1}{2}$
- (5) $\frac{\sqrt{2}}{1-e}\frac{v_0}{g}$

解答編

6. 衝突，摩擦を介する 2 物体

【メモ】

・衝突は以下 2 種の式を連立．条件が明示的でないものもあるが，日々の演習では，衝突時の条件は何かを必ず確認したい．

$$\begin{cases} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{cases}$$

なお，固定面との衝突など外力制御がある場合の衝突では運動量保存則は成り立たないので注意．・内力の仕事は個々のエネルギー収支に注目する．

【解答】

(1) 公式より，

$$U = \frac{1}{2} kx^2.$$

(2) 物体 A とばねからなる系の力学的エネルギー保存則より*2，

$$\frac{1}{2} \cdot 2mv_a^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \therefore v_a = x\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

(3) 運動量保存則，および条件（はね返り係数の式）より，

$$\begin{cases} 2mv_a' + mv_b' = 2mv_a, \\ v_a' - v_b' = -e(v_a - 0) \end{cases} \quad \therefore v_a' = \frac{2-e}{3}v_a \quad v_b' = \frac{2(1+e)}{3}v_a.$$

(4) 前問の計算より $v_a' > 0$ であるから 右方向 へ運動する．

(5) B が台から受ける垂直抗力の大きさ N は，B の鉛直方向の運動方程式より $N = mg$ と求まる．

よって，B の加速度を a ，台の加速度を A としたとき，各物体の運動方程式から*3，

$$\begin{cases} ma = -\mu' mg, \\ MA = \mu' mg \end{cases} \quad \therefore a = -\mu' g, \quad A = \mu' \frac{m}{M} g.$$

*2 エネルギー収支： $\frac{1}{2} \cdot 2mv_a^2 - \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 0^2 = \int_x^0 (-kx_A) dx_A = \frac{1}{2}kx^2$

時間追跡： $\begin{cases} x_A = -x \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t\right), \\ v_A = x\sqrt{\frac{k}{2m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t\right). \end{cases}$

*3 摩擦の向きは滑りが生じる向きと逆向き．

- (6) 滑りが生じなくなったことから 2 物体の速度は等しい．運動量保存則より^{*4}，

$$MV + mV = mv_b' \quad \therefore V = \frac{m}{M+m} v_b'.$$

- (7) B の速度が V となる時刻 t を求めて，

$$V = v_b' - \mu'gt \quad \therefore t = \frac{v_b' - V}{g} = \frac{M}{\mu'mg} \frac{m}{M+m} v_b' = \frac{MV}{\mu'mg}.$$

- (8) 全体の力学的エネルギーの変化量を $\Delta E_{\text{全体}}$ とすると，

$$\Delta E_{\text{全体}} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_b'^2 = -\frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} v_b'^2.$$

よって，問題文の意味する力学的エネルギーの減少量 ΔE は $\Delta E = -\Delta E_{\text{全体}}$ ゆえ，

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} v_b'^2.$$

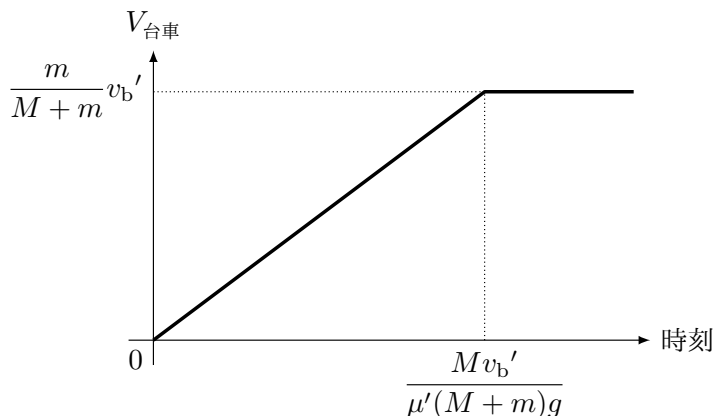
- (9) B の変位を Δx ，台の変位を ΔX とする．このとき，状況から $\Delta x - \Delta X = \ell$ である．各物体のエネルギー収支の式は，

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_b'^2 = \mu'mg\Delta x \cos \pi, \\ \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}M \cdot 0^2 = \mu'mg\Delta X \cos 0 \end{cases}$$

であり，この 2 式の和を取ることで，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_b'^2 &= -\mu'mg(\Delta x - \Delta X) = -\mu'mg\ell \\ \therefore \ell &= \frac{Mv_b'^2}{2\mu'(M+m)g} = \frac{\Delta E}{\mu'mg}. \end{aligned}$$

- (10) 台が動摩擦力を受け運動を始めてからは等加速度運動を行う．このとき，時刻 t における台の速度は $V_{\text{台}} = \mu' \frac{m}{M} gt$ と表される．その後 $t = \frac{Mv_b'}{\mu'(M+m)g}$ で滑りが生じなくなり（すなわち動摩擦力が働かなくなり），速度は一定に保たれる．よって，グラフは以下ようになる．



^{*4} 運動方程式の和を取れば運動量保存則が導出される．詳しい計算は Day2 で扱った問題 5 の解答を参照．

7. 多体系, 衝突

【メモ】

・多体系の基本は以下 2 式の連立. 運動方程式が解ける場合など例外も損 z 内するが以下 2 式の連立が発想の基本である.

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{全体の力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

【解答】

- (1) 物体のエネルギー収支より,

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mg(h_1 - h_2) \cos 0 \quad \therefore v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

- (2) 運動量保存則, および 2 物体と重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases} mv_C + MV_C = m \cdot 0 + M \cdot 0, \\ \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}MV_C^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}M \cdot 0^2 + mgh_1 \end{cases}$$

$$\therefore v_C = \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}, \quad V_C = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}.$$

- (3) 小球が台上の D を通過するときの小球の位置 x , および台の位置 X を $x = X = 0$ となるように水平右向き x 軸の原点を定める. 衝突以前の小球, および台の位置座標は,

$$\begin{cases} x = v_C t, \\ X = V_C t \end{cases}$$

と書ける. $x - X = a$ となる時刻 t を計算して,

$$x - X = v_C t - V_C t = a \quad \therefore t = \frac{a}{v_C - V_C} = a \sqrt{\frac{M}{2(M+m)gh_1}}.$$

- (4) 小球, および台の衝突直後の速度をそれぞれ v_D, V_D とする. 運動量保存則, および条件 (はね返り係数の式) より,

$$\begin{cases} mv_D + MV_D = 0, \\ v_D - V_D = -e(v_C - V_C) \end{cases} \quad \therefore v_D = -e \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}, \quad V_D = e \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}$$

と求まる. よって, 衝突直後の各物体の速さは,

$$v'_D = |v_D| = e \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}, \quad V'_D = |V_D| = e \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}.$$

- (5) 折り返す瞬間の小球, および台の速度をそれぞれ v , V , 小球の C からの高さを h^* とする. このとき, 折り返しゆえ $v = V$ である^{*5}. 運動量保存則, および 2 物体と重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases} mv + MV = 0, \\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + mgh^* = \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}MV_D^2, \\ v = V \end{cases} \quad \therefore h^* = \underline{\underline{e^2 h_1}}.$$

^{*5} 小球も台も速度の鉛直成分は持たない.

没

【解答】

- (1) O を原点とし、水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸を定める。小球は重力だけを受けて運動するので、加速度は y 軸負方向に大きさ g のみを持つ。したがって、壁と衝突するまでの小球の位置 $\vec{r} = (x, y)$ は、

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0t, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

速度 $\vec{v} = (v_x, v_y)$ は、

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0, \\ v_y = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 - gt \end{cases}$$

と表される。点 P で速度の y 成分が 0 であることから、 $v_y = 0$ を満たす時刻 t を求めて、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}v_0 - gt = 0 \quad \therefore t = \frac{v_0}{\sqrt{2}g}$$

である。この時刻での y 座標が h に等しいので、

$$h = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{\sqrt{2}g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{4g}.$$

- (2) 前問で計算した時刻での x 座標を求めればよいので、

$$L = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{\sqrt{2}g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

- (3) 衝突時 y 方向には力積を受けないので衝突は x 方向のみを考えればよい。固定面との衝突ゆえ運動量は保存せず、条件（はね返り係数の式、 x 方向のみの衝突）だけを考えると、衝突直後の x 方向の速度成分を v_x とすれば、

$$v_x - 0 = -e \left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_0 - 0 \right) \quad \therefore v_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}ev_0$$

と求まる。よって、衝突の前後での小球の運動エネルギー変化は*6、

$$\Delta E = \frac{1}{2}m \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}ev_0 \right)^2 + 0^2 \right\} - \frac{1}{2}m \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_0 \right)^2 + 0^2 \right\} = \frac{1-e^2}{4}mv_0^2.$$

*6 小球と重力場からなる系の力学的エネルギー変化を考えても、衝突の直前・直後で位置エネルギーが変化しないため結果は等しい。

- (4) P で衝突した時刻を改めて $t = 0$ とする. P から A に達する間の位置 $\vec{r} = (x, y)$, 速度 $\vec{c} = (v_x, v_y)$ はそれぞれ,

$$\begin{cases} x = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{\sqrt{2}}ev_0t, \\ y = \frac{v_0^2}{4g} - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}ev_0, \\ v_y = -gt \end{cases}$$

と表される. $y = 0$ となる時刻 t は,

$$\frac{v_0^2}{4g} - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \therefore t = \frac{v_0}{\sqrt{2}g}$$

であり, このときの x 座標を x_1 とすると,

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{ev_0}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{\sqrt{2}g} = \frac{1-e}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

と求まる. A での衝突は y 方向にのみ行われ, 衝突直前の速度の y 成分が $v_y = -g \frac{v_0}{\sqrt{2}g} = -\frac{1}{\sqrt{2}}v_0$ であることから, 衝突直後の速度の y 成分は $v_y = \frac{1}{\sqrt{2}}ev_0$ となる. この時刻を再度 $t = 0$ とし AB 間の運動を考えると, B に達する間の位置 $\vec{r} = (x, y)$, 速度 $\vec{c} = (v_x, v_y)$ はそれぞれ,

$$\begin{cases} x = \frac{1-e}{2} \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{\sqrt{2}}ev_0t, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}ev_0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}ev_0, \\ v_y = \frac{1}{\sqrt{2}}ev_0 - gt \end{cases}$$

と表される. $y = 0$ となる時刻 t は,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}ev_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \therefore t = \frac{\sqrt{2}ev_0}{g}$$

であるから, この時刻での x 座標 x_2 は,

$$x_2 = \frac{1-e}{2} \frac{v_0^2}{g} - \frac{ev_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}ev_0}{g} = \frac{1-e-2e^2}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

となる. $x_2 = 0$ となるような e を求めればよいので,

$$1 - e - 2e^2 = 0 \quad \therefore e = \frac{1}{2} (\because e > 0).$$

- (5) 前問の計算より, AB 間の衝突時間間隔は $\frac{\sqrt{2}ev_0}{g}$ であった. A での衝突を 1 回目の衝突と呼ぶことにする. n 回目の衝突から $n+1$ 回目の衝突直前までを考える. n 回目の衝突直前の速度の y 成分を $-v_{n-1} (< 0)$ とすると, n 回目の衝突直後の速度の y 成分は,

$$v_y - 0 = -e(-v_{n-1} - 0) = ev_{n-1}$$

である． n 回目の時刻を $\tau = 0$ とするような時刻 τ を改めて定義すれば，次の衝突までの小球の y 座標，および速度の y 成分は，

$$\begin{cases} y = ev_{n-1}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2, \\ v_y = ev_{n-1} - g\tau, \end{cases}$$

と書け， $n+1$ 回目の衝突時刻 τ は $y = 0$ を解いて，

$$ev_{n-1}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = 0 \quad \therefore \tau = \frac{2ev_{n-1}}{g}$$

と求まる．よって， $n+1$ 回目の衝突直前の小球の速度の y 成分 $-v_n$ は，

$$\begin{aligned} v_y = -v_n &= ev_{n-1} - g\frac{2ev_{n-1}}{g} = -ev_{n-1} \\ \therefore v_n &= ev_{n-1} = e^2v_{n-2} = \cdots = e^{n-1}v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{n-1}v_0 \end{aligned}$$

と v_n が求まる．よって， n 回目の衝突から $n+1$ 回目の衝突までの時間は改めて，

$$\tau = \frac{2e}{g} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{n-1}v_0 = \frac{\sqrt{2}v_0}{g} e^n$$

と求まる．以上から，A で衝突してから小球のはね返りが収まるまでの時間 t_∞ は，

$$t_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}v_0}{g} e^n = \frac{\sqrt{2}e}{1-e} \frac{v_0}{g}$$

よって，打ち出してから A に達するまでの時間も加えて，

$$T = \frac{\sqrt{2}v_0}{g} + t_\infty = \frac{\sqrt{2}}{1-e} \underbrace{\frac{v_0}{g}}.$$