

問題編



8. 水平面で回転できる回転台があって、回転台水平面上の回転中心を点 O とする。質量 m [kg] で大きさの無視できる物体 A を、回転台上で点 O から ℓ_0 [m] の点 P に置く。

物体と回転台の間の静止摩擦係数を μ 、重力加速度の大きさを g [m/s²] として、次の問いに答えよ。

- (1) 回転台が回転していないとき、A にはたらいている力を図によって示せ。
- (2) 回転台を角速度 ω_0 [rad/s] で回転させる。A が点 P ですべらないで回転台とともに回転しているとき、A にはたらいている力を、回転台上でともに回転しながら観測するときと、回転台の外で観測するときとで、それぞれどういう力が観測されるか、図によって示せ。
- (3) 前問 (2) の状態から ω を徐々に上げていったら、 $\omega = \omega$ [rad/s] で A が点 P からすべり出した。 μ を ℓ_0 , g , ω_0 を使って表せ。
- (4) 長さ ℓ_0 [m] のつる巻き状のばねがあって、これに A をつるすと長さ ℓ [m] に伸びる。ばねの一端を点 O につけ、他端に A をつけて回転台に置いた。ばねの長さが ℓ [m] に伸びているとき、A が回転台上をすべらないで回転できる ω の大きさの範囲を答えよ。 μ は 1 より小さく、ばねと回転台の摩擦はないものとし、また、ばねの質量は無視できるものとする。

[年度不明福島県立医科大学，重問 45 対応]

9. 図1のような途中がループしているレールがある。レールの太さは無視できるものとし、ループ BCDE は鉛直面をなす半径 r の円軌道になっている。点 A から初速 0 で出発した質量 m の小球 P の運動を考える。点 A の水平面 GB からの高さを h として、以下の問 1～問 9 に答えなさい。ただし、重力加速度の大きさを g とし、摩擦や空気の抵抗は無視できるものとする。

問 1 最初に点 B を通過するときの小球 P の速さ v_B を g, h を用いて表しなさい。

その後、小球 P はレールに沿って点 C, D, E を通過して運動し、再び、点 B に到達した。以下の問 2～問 4 について、 m, g, h, r のうち必要な記号を用いて答えなさい。

問 2 ループ最高点 D における小球 P の速さ v_D を求めなさい。

問 3 点 D において、小球 P がレールから受ける垂直抗力の大きさ N_D を求めなさい。

問 4 小球 P がレールから離れずループを一周するための h の最小値 h_1 を求めなさい。

次に $h < h_1$ の場合の小球 P の運動を考える。そのとき、図 2 のように小球 P は点 F において、レールから離れ、放物運動を行ったとする。そのとき、FOC のなす角を θ とする ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)。小球 P がレールから離れた後はレールとは衝突せず、そのまま放物運動を続けるものとする。以下の問 5～問 7 について、 g, r, θ のうち必要な記号を用いて答えなさい。

問 5 小球 P が点 C に到達するための h の最小値 h_2 を求めなさい。

問 6 レールから離れる点 F における小球 P の速さ v_F を求めなさい。

問 7 このとき、点 A の高さは $h = h_F$ であった。高さ h_F を求めなさい。ただし、 $h_2 < h_F < h_1$ である。

図 2 において、 $\theta = 30^\circ$ であった。小球 P が点 F を離れた瞬間を時刻 $t = 0$ とし、その後の時刻 t における小球 P の運動について考える。以下の問 8～9 について、 g, r, t のうち必要な記号を用いて答えなさい。

問 8 図 3 のように点 B を原点とし、水平方向を x 軸 (図 3 の右方向を正とする)、鉛直方向を y 軸 (図 3 の上方向を正とする) とする。小球 P が点 F を離れた後の時刻 t における小球 P の x 座標と y 座標を求めなさい。

問 9 $t = T$ において $x = 0$ になった。このときの時刻 T と小球 P の y 座標を求めなさい。

[2016 年千葉大学, 重問 48 の類題]

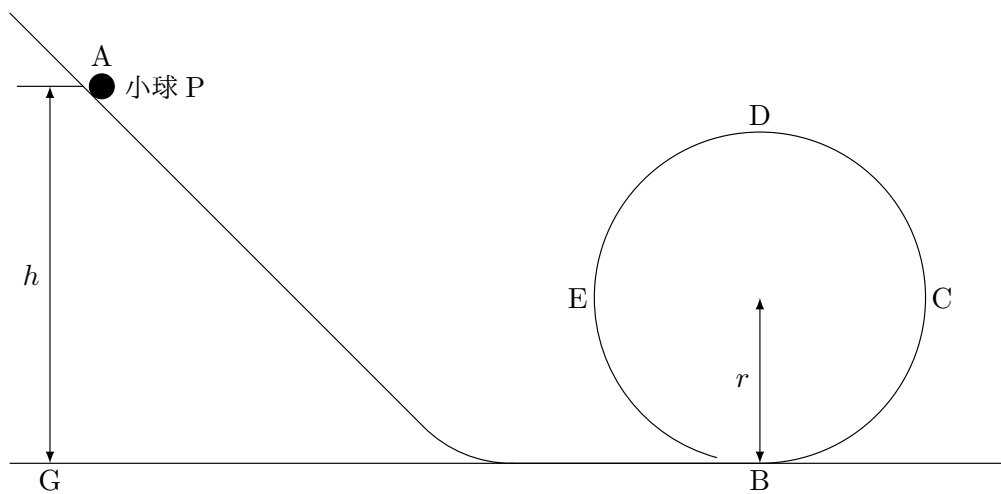


図 1

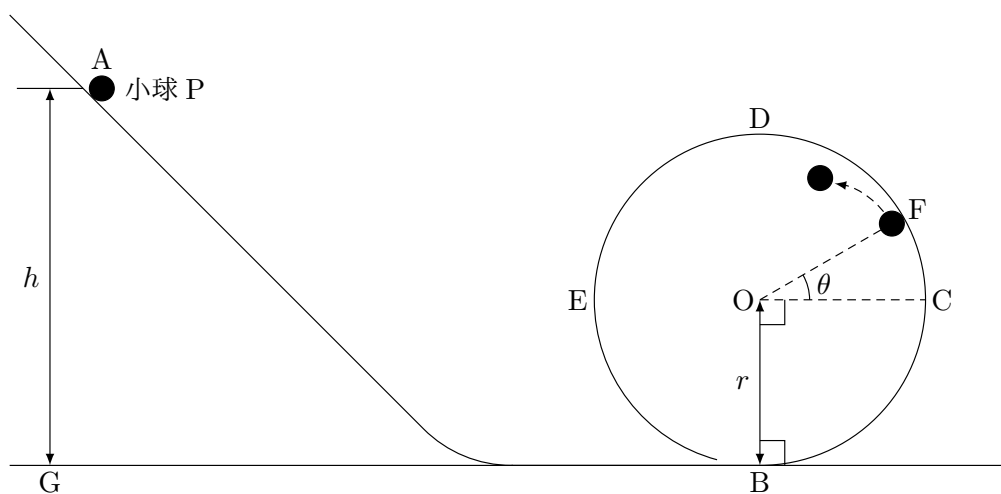


図 2

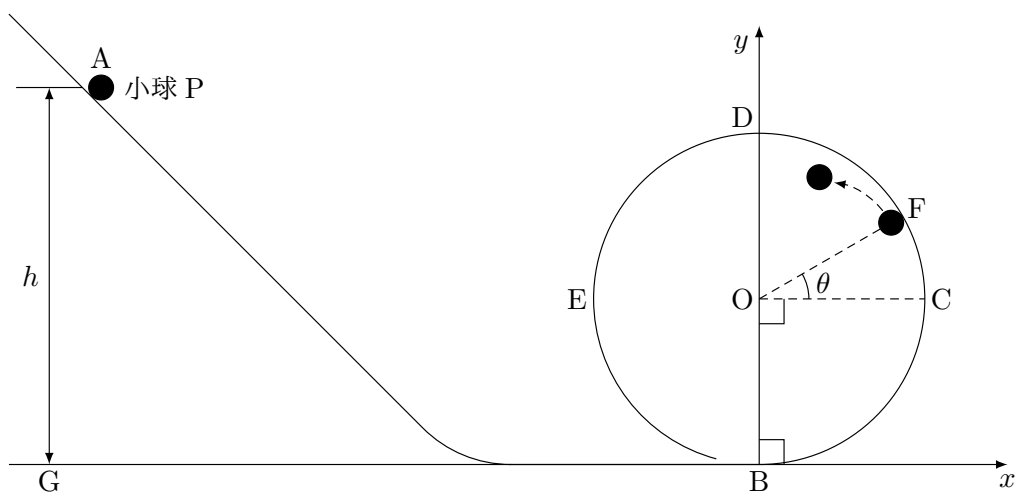
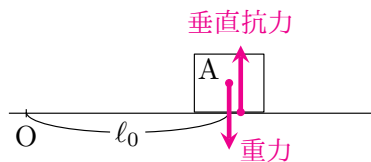


図 3

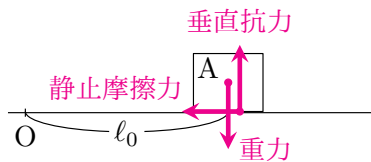
■略解

8. 等速円運動

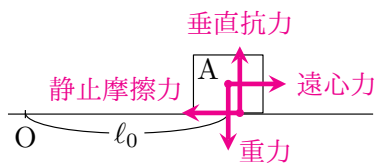
(1)



(2) 地面固定系：



回転座標系：



(3) $\frac{\ell_0 \omega_0^2}{g}$

(4) $\sqrt{(1-\mu)\frac{g}{\ell}} \leq \omega \leq \sqrt{(1+\mu)\frac{g}{\ell}}$

9. 非等速円運動

問 1 $\sqrt{2gh}$

問 2 $\sqrt{2g(h-2r)}$

問 3 $\left(\frac{2h}{r} - 5\right) mg$

問 4 $\frac{5}{2}r$

問 5 r

問 6 $\sqrt{gr \sin \theta}$

問 7 $r + \frac{3}{2}r \sin \theta$

問 8 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}r - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gr}{2}}t, \\ x = \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3gr}{2}}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

問 9 $T = \sqrt{\frac{6r}{g}}, \quad y = 0$

解答編

8. 等速円運動

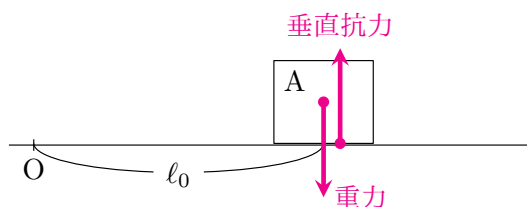
【メモ】

・等速円運動の定石は以下の通り.

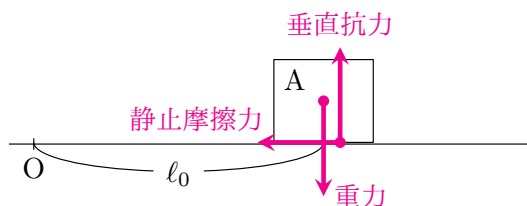
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{運動方程式 (中心成分)} \\ \text{つりあい} \leftarrow \text{使わないことも} \end{array} \right.$$

【解答】

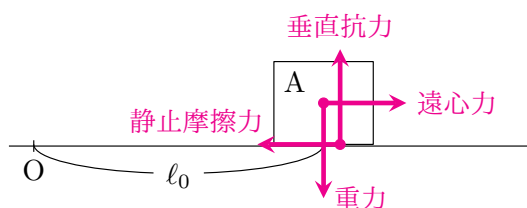
問1 回転していないとき面との滑りが生じる可能性はないので、重力、垂直抗力のみ生じる.



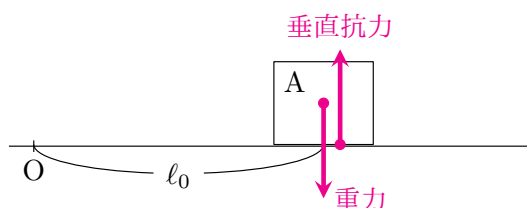
問2 回転し始めると面との滑りが生じる可能性があるため、重力、垂直抗力に加え静止摩擦力も生じる.



また、回転座標系では加速度の中心成分に対応する慣性力（遠心力）が生じる．これも加えて図示すればよい．



問3 回転していないとき面との滑りが生じる可能性はないので、重力、垂直抗力のみ生じる.



問4 運動方程式, および鉛直方向のつりあいより,

$$\begin{cases} m \frac{(\ell_0 \omega)^2}{\ell_0} = R, \\ m \cdot 0 = N - mg \end{cases} \quad \therefore N = mg, \quad R = m\ell_0 \omega^2.$$

ここで, $\omega = \omega_0$ のとき滑りが生じることから $R = \mu N$ を考えて,

$$m\ell_0 \omega_0^2 = \mu mg \quad \therefore \mu = \frac{\ell_0 \omega_0^2}{\underbrace{g}}.$$

問5 題意より, ばね定数 k はつりあいより,

$$0 = k(\ell - \ell_0) - mg \quad \therefore k = \frac{mg}{\ell - \ell_0}$$

と求まる. 角速度 ω のときの静止摩擦力の大きさは, 外側へ滑り出そうとするとき (静止摩擦力は中心向き), 中心側へ滑り出そうとするとき (静止摩擦力は中心向き) それぞれの運動方程式 (中心成分) から,

$$\begin{cases} \text{外側: } m \frac{(\ell \omega)^2}{\ell} = R_{\text{外}} + \frac{mg}{\ell - \ell_0}(\ell - \ell_0), \\ \text{中心: } m \frac{(\ell \omega)^2}{\ell} = -R_{\text{内}} + \frac{mg}{\ell - \ell_0}(\ell - \ell_0) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} R_{\text{外}} = m\ell \omega^2 - mg, \\ R_{\text{内}} = -m\ell \omega^2 + mg \end{cases}$$

と求まる. 両方で滑らない条件を考えて,

$$\begin{cases} R_{\text{外}} = m\ell \omega^2 - mg < \mu mg, \\ R_{\text{内}} = -m\ell \omega^2 + mg < \mu mg \end{cases} \quad \therefore \underbrace{\sqrt{(1 - \mu)\frac{g}{\ell}} \leq \omega \leq \sqrt{(1 + \mu)\frac{g}{\ell}}.}$$

9. 非等速円運動

【メモ】

・非等速円運動の定石は以下の通り.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{運動方程式 (中心成分)} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{array} \right.$$

・最後 2 問は等加速度運動の時間追跡.

【解答】

問 1 力学的エネルギー保存則より^{*1},

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mgh \quad \therefore v_B = \sqrt{2gh}.$$

問 2 運動方程式 (中心成分), 力学的エネルギー保存則より,

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{v_D^2}{r} = N_D + mg, \\ \frac{1}{2}mv_D^2 + mgr = mg(h - r) \end{array} \right. \quad \therefore v_D = \sqrt{2g(h - 2r)}, \quad N_D = \left(\frac{2h}{r} - 5 \right) mg.$$

問 3 前問に示した.

問 4 P がレールから受ける垂直抗力の大きさは D で最小値となるから, $N_D > 0$ であれば接触を保ったまま運動を続ける. よって,

$$\left(\frac{2h}{r} - 5 \right) mg > 0 \quad \therefore h > \frac{5}{2}r (= h_1)$$

と下限 (最小値) が求まる.

問 5 CF 間の角度 ϕ ($0 \leq \phi \leq \theta$) にあるときを考える. 運動方程式 (中心成分), 力学的エネルギー保存則は,

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{v^2}{r} = N + mg \sin \phi, \\ \frac{1}{2}mv^2 + mgr \sin \phi = mg(h - r). \end{array} \right.$$

C に達する条件ゆえ, $\phi = 0$ で $v > 0$ となればよく,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - r) > 0 \quad \therefore h > r (= h_2).$$

^{*1} エネルギー収支: $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ -h \end{pmatrix} = mgh$

問 6 点 F で面から離れることから, $\phi = \theta$ で $N = 0$ である. よって,

$$\begin{cases} m \frac{v_F^2}{r} = 0 + mg \sin \theta, \\ \frac{1}{2} m v_F^2 + mgr \sin \theta = mg(h_F - r). \end{cases} \quad \therefore v_F = \sqrt{gr \sin \theta}, \quad h_F = r + \frac{3}{2} r \sin \theta.$$

問 7 前問に示した.

問 8 離れた瞬間の速さは $v_F = \sqrt{gr \sin \frac{\pi}{6}} = \sqrt{\frac{gr}{2}}$ である. よって, 時刻 t での位置は,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} r - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gr}{2}} t, \\ y = \frac{3}{2} r + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{gr}{2}} t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

問 9 $x = 0$ を満たす時刻 $t = T$ は,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} r - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gr}{2}} t = 0 \quad \therefore T = \sqrt{\frac{6r}{g}}$$

であり, このとき,

$$y = \frac{3}{2} r + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{gr}{2}} \sqrt{\frac{6r}{g}} - \frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{6r}{g}} \right)^2 = 0.$$