問題編

10. 地上の 1 点から鉛直上方へ質量 m〔kg〕の小物体を打ち上げる．地球は半径 R〔m〕，質量 M〔kg〕の一様な球で，物体は地球から万有引力の法則に従う力を受けるものとする．図を参照して，次の問いに答えよ．ただし，地上での重力加速度の大きさ g〔m/s^2〕，万有引力定数を G〔N $\cdot$ m^2/kg^2〕とする．また，地球の自転および公転は無視するものとする．

問 1　地上での重力加速度の大きさ g を R，M，G を用いて表せ．

問 2　物体の速度が地球の中心 O から $2R$ の距離にある点 A で 0 になるためには，初速度の大きさ v_0〔m/s〕をどれだけにすればよいか，g，R を用いて表せ．

物体の速度が点 A で 0 になった瞬間，物体に大きさが v〔m/s〕で OA に垂直な方向の速度を与える．

問 3　物体が地球の中心 O を中心とする等速円運動をするためには，v をどれだけにすればよいか，g，R を用いて表せ．また，この円運動の周期を g，R を用いて表せ．

点 A で物体に与える速さ v が問 3 で求めた値からずれると，物体の軌道は，地球の中心を 1 つの焦点とするだ円となる．だ円軌道は v が大きくなるほど大きくなり，v がある値以上になると，物体は無限遠方に飛び去ってしまう．

問 4　物体が AB を長軸とするだ円を描くとき，次の問いに答えよ．ただし，点 B の地球の中心からの距離は $6R$ である．

(1)　点 A における面積速度と点 B における面積速度が等しいことから，点 B における物体の速さ V〔m/s〕を v を用いて表せ．

(2)　速さ v を g，R を用いて表せ．

問 5　物体が地球に衝突もせずかつ無限遠方に飛び去ることもなくだ円軌道を描き続けるためには，速さ v はどのような範囲になければならないか，不等式で表せ．

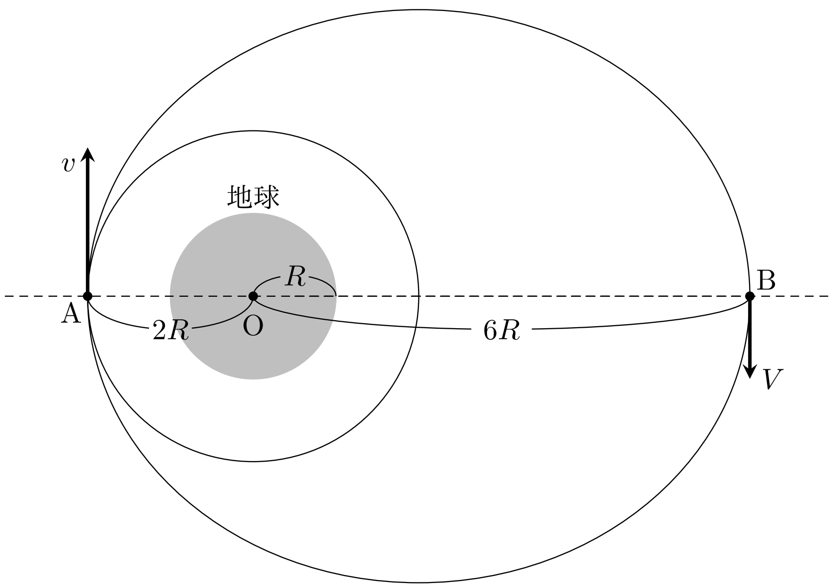
〔2002 年大阪市立大学，重問 51 対応〕

以下，追加問題．

問 6　問 4 の楕円軌道の周期を，

(1)　ケプラー第 3 法則を用いて計算せよ．

(2)　面積速度保存則を用いて計算せよ．


v
地球
R
B
A
2R
O
6R
V

11. 地球（質量 M）と月（質量 m）の運動を考える．地球と月との距離を r_0，万有引力定数を G として，次の問いに答えよ．なお，地球と月は，それら以外の天体から力を受けない都市，それぞれの大きさは無視できるものとする．

〔A〕 地球は静止しており，月は地球の周りを等速円運動するとして次の問いに答えよ．

(1) 月が地球から受ける万有引力の大きさを記せ．

(2) 月の運動の周期を m，M，G，r_0 のうち必要なものを用いて表せ．

(3) 月の運動エネルギーを m，M，G，r_0 のうち必要なものを用いて表せ．

(4) 月の力学的エネルギーを m，M，G，r_0 のうち必要なものを用いて表せ．なお，地球の万有引力による月の位置エネルギーの基準を無限遠に選ぶ．

(5) 何らかの原因で月の力学的エネルギーが減少したとする．月は，依然として等速円運動を行っているとした場合，地球と月の距離について，次の選択肢から正しいものを選べ．

①大きくなる． ②小さくなる． ③変わらない．

(6) その場合，月の速さはどのようになるか，次の選択肢から正しいものを選べ．

①速くなる． ②遅くなる． ③変わらない．

〔B〕 実際には，図のように地球と月は，地球と月を結ぶ線上のある点 O を中心として，同じ角速度で等速円運動を行っているとみなせる．この場合の，O から月までの距離を r_1，O から地球までの距離を r_2（ただし $r_0 = r_1 + r_2$）として以下の問いに答えよ．

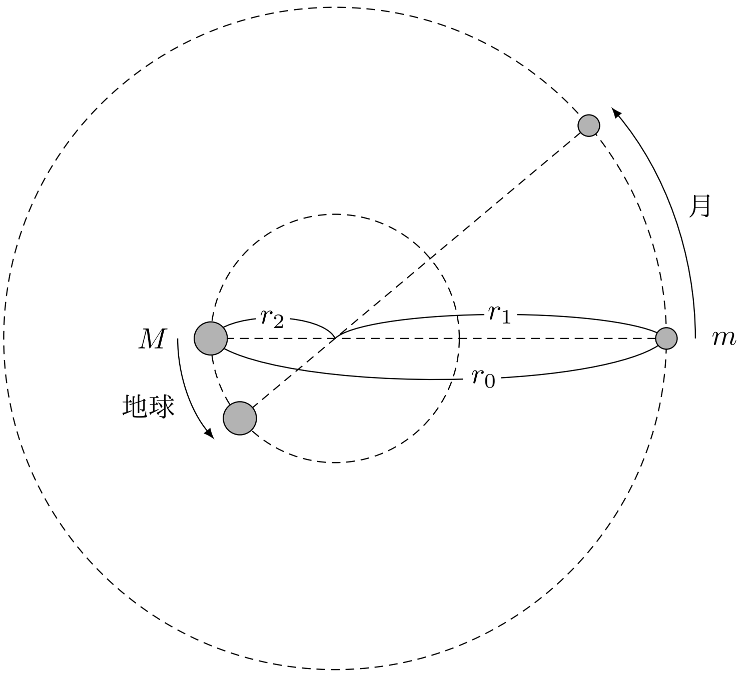
(1) 月の円運動の角速度を ω として，月の向心力の大きさを m，r_1，r_0，ω のうちから必要なものを用いて表せ．

(2) 月の受ける万有引力は〔A〕(1) の万有引力と同じであることに注意し，月の角速度を G，M，r_1，r_0 を用いて表せ．

(3) 地球と月は O を中心にして同じ角速度で等速円運動を行っていることに注意して，r_1 を M，m，r_0 を用いて表せ．

(4) 円運動の周期を G，M，m，r_0 を用いて表せ．

〔2012 年関西学院大学，重問 52 対応〕


月
r_2
r_1
M
m
r_0
地球

■略解

10. 天体の運動ー楕円軌道

問 1 $\dfrac{GM}{R^2}$

問 2 $\sqrt{gR}$

問 3 $\sqrt{\dfrac{gR}{2}}$　$4\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$

問 4 (1) $\dfrac{1}{3}v$　(2) $\dfrac{\sqrt{3gR}}{2}$

問 5 $\sqrt{\dfrac{gR}{3}} < v < \sqrt{gR}$

問 6 (1)(2) $16\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

11. 天体の運動ー等速円運動

〔A〕(1) $G\dfrac{Mm}{{r_0}^2}$　(2) $2\pi G\sqrt{\dfrac{r_0}{GM}}$　(3) $\dfrac{GMm}{2r_0}$

(4) $-\dfrac{GMm}{2r_0}$　(5) ②　(6) ①

〔B〕(1) $mr_1\omega^2$　(2) $\dfrac{1}{r_0}\sqrt{\dfrac{GM}{r_1}}$　(3) $\dfrac{M}{M+m}r_0$

(4) $2\pi r_0\sqrt{\dfrac{r_0}{G(M+m)}}$

解答編

10. 天体の運動ー楕円軌道

【メモ】

・円軌道は等速円運動となるため，等速円運動の定石に従う．

・非円軌道の定石は以下の通り．

$$\begin{cases} \text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{面積速度保存則} \end{cases}$$

求める文字が 1 文字だけの場合力学的エネルギー保存則だけでよい．また，楕円軌道の周期はケプラー第 3 法則で求めるのが基本，面積速度保存則を用いても決定できる．なお，ケプラー第 3 法則を用いる際は「楕円軌道=円軌道」で用いる．

【解答】

問 1　公式より，

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \qquad \therefore g = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{GM}{R^2}}.$$

問 2　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \left(-G\frac{Mm}{2R}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{gR}}.$$

問 3　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{2R} = G\frac{Mm}{(2R)^2} \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{2R}} = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{gR}{2}}}.$$

このとき，円運動の周期 T_0 は $\sqrt{\dfrac{gR}{2}}$ で $2\pi\cdot 2R$ 進む時間を求めて，

$$T_0 = \frac{4\pi R}{\sqrt{\dfrac{gR}{2}}} = \underset{\sim\sim\sim}{4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}}.$$

問 4 (1)　面積速度保存則より，

$$\frac{1}{2}\cdot 6RV = \frac{1}{2}\cdot 2Rv \qquad \therefore V = \underset{\sim\sim}{\frac{1}{3}v}.$$

(2) 面積速度保存則，および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\cdot 6RV = \dfrac{1}{2}\cdot 2Rv\,, \\ \dfrac{1}{2}mV^2 + \left(-G\dfrac{Mm}{6R}\right) = \dfrac{1}{2}mv^2 + \left(-G\dfrac{Mm}{2R}\right) \end{cases}$$

$$\therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\sqrt{3gR}}{2}}\,,\quad V = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gR}{3}}\,.$$

問 5 地球に衝突せず無限遠にも達しない条件ゆえ，①無限遠に達しない条件，②地球に衝突しない条件の 2 つを考えればよい．まず，①無限遠に達しない条件を考える．無限遠での速さ v_∞ が存在しない条件 $\frac{1}{2}m{v_\infty}^2 < 0$ を考えて*1，

$$\frac{1}{2}m{v_\infty}^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) < 0 \qquad \therefore v < \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}$$

と速さの上限値を得る．次に②地球に衝突しない条件を考える．**【補足】**に示した通り，点 A が遠地点，A と反対側にある地表を近地点とするような楕円軌道では近地点で地球と接するのみで，その軌道と地球の外周でそれ以外の共有点は持たない．つまり，長半径 $\frac{3}{2}R$ の楕円軌道から地球と接触するようになるので，この楕円軌道を取るときの速さを求め，その速さより大きく取れば地球とは接触しない．長半径 $\frac{3}{2}R$ の楕円軌道において，近地点での速さを u とすると，面積速度保存則，および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}Ru = \dfrac{1}{2}\cdot 2Rv\,, \\ \dfrac{1}{2}mu^2 + \left(-G\dfrac{Mm}{R}\right) = \dfrac{1}{2}mv^2 + \left(-G\dfrac{Mm}{2R}\right) \end{cases} \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{gR}{3}}\,,\quad u = 2\sqrt{\frac{gR}{3}}$$

であるから，v はこの値より大きく取ればよい．よって，①，②より，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{gR}{3}} < v < \sqrt{gR}}\,.$$

問 6 (1) 考える軌道は長半径 $4R$ の楕円軌道である．半径 $2R$ の円軌道に対してケプラー第 3 法則を利用して，

$$\frac{T^2}{(4R)^3} = \frac{{T_0}^2}{(2R)^3} \qquad \therefore T = 2^{\frac{3}{2}}T_0 = \underset{\sim\sim\sim\sim}{16\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}\,.$$

(2) ケプラー第 1 法則から，小物体は地球の中心 O を焦点の 1 つとした楕円軌道を行う．このとき楕円軌道の長半径は $a = 4R$ で，O を原点としたときの楕円の焦点は $(0, 0)$ と $(4R, 0)$ で

*1 （観測される）物理量は実数値を取るため，2 乗して負になるような速さは存在しない．

ある．楕円の定義「焦点からの距離の和が一定の点の集合」から，焦点 $(0,0)$，$(4R,0)$ から $(2R,b)$ までの距離の和が $8R$ であることを利用して，

$$2\sqrt{(2R)^2+b^2}=8R \qquad \therefore b=2\sqrt{3}\,R$$

を得る．以上から，面積速度保存則より楕円の面積が πab で与えられることを利用して，

$$\frac{\pi\cdot 4R\cdot 2\sqrt{3}\,R}{T}=\frac{1}{2}\cdot 2R\frac{\sqrt{3gR}}{2} \qquad \therefore T=16\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\,.$$

【補足】問 5 の楕円軌道と地球の共有点について

ケプラー第 1 法則から，小物体は地球の中心 O を焦点の 1 つとした楕円軌道を行う．楕円の長半径 a は $a=\dfrac{3}{2}R$ である．図の直線 AB に沿って x 軸を，x 軸と直交するように紙面下から上向きに y 軸を定め，O を原点とする．地球の外周を表す方程式は，

$$x^2+y^2=R^2$$

であり，楕円軌道の方程式は短半径を b とすれば，

$$\frac{(x+R/2)^2}{9R^2/4}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

と表せる．ここで，楕円の定義「焦点からの距離の和が一定の点の集合」から，焦点 $(0,0)$，$(-R,0)$ から $(-R/2,b)$ までの距離の和が $3R$ であることを利用して，

$$2\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2+b^2}=3R \qquad \therefore b=\sqrt{2}\,R$$

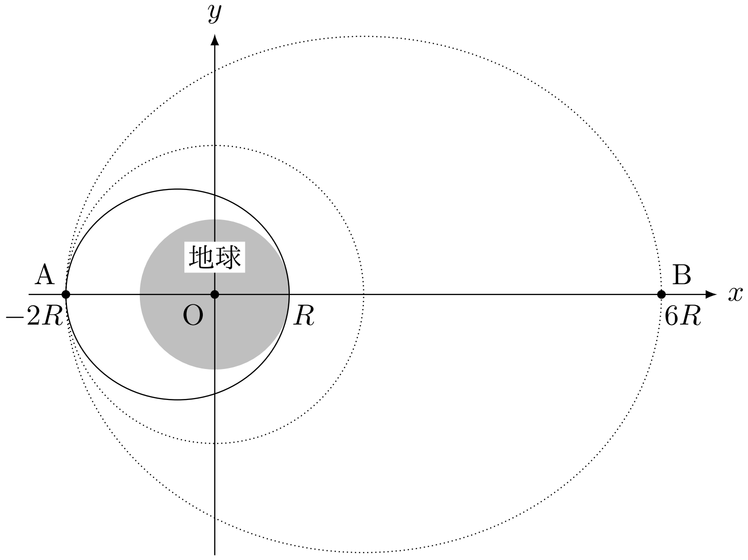
を得る．

よって，楕円の方程式は，

$$\frac{8}{9}\left(x+\frac{R}{2}\right)^2+y^2=2R^2$$

となり，楕円と円の共有点を求めれば，

$$\begin{aligned}2R^2-\frac{8}{9}\left(x+\frac{R}{2}\right)^2&=R^2-x^2\\x^2-8Rx+7R^2&=0\\(x-7R)(x-R)&=0\\\therefore x&=R\end{aligned}$$



となり，共有点が $(R, 0)$ のみであることが確認できる[*2].

なお，実際に図示してみると右図の実線のようになる.

[*2] $x = 7R$ は定義域 $-R \leq x \leq R$ の範囲外.

11. 天体の運動ー等速円運動

【解答】

〔A〕(1)　公式より $f = G\dfrac{Mm}{{r_0}^2}$.

(2)　等速円運動ゆえ，円運動の速さ v_0 は運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{{v_0}^2}{r_0} = G\frac{Mm}{{r_0}^2} \qquad \therefore v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

であるから，円運動の周期 T_0 は，

$$T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 2\pi\sqrt{\frac{r_0}{GM}}.$$

(3)　$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{GMm}{2r_0}.$$

(4)　運動エネルギーと位置エネルギーの和を計算して，

$$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \left(-G\frac{Mm}{r_0}\right) = -\frac{GMm}{2r_0}.$$

(5)　$E = -\dfrac{GMm}{2r_0}$ より，E が減少するとき r_0 も減少する[*3]．よって，② が適当.

(6)　$v_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{r_0}}$ より，r_0 が減少すると v_0 は増加する．よって，① が適当.

〔B〕　題意より，両物体とも角速度が等しい等速円運動を行っている[*4].

(1)　月の運動方程式（中心成分）は，

$$m\frac{(r_1\omega)^2}{r_1} = G\frac{Mm}{{r_0}^2} = f_{中心}$$

であり，$f_{中心}$ を向心力と呼ぶ．よって，

$$f_{中心} = G\frac{Mm}{{r_0}^2} = mr_1\omega^2.$$

(2)　月の運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{(r_1\omega)^2}{r_1} = G\frac{Mm}{{r_0}^2} \qquad \therefore \omega = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{GM}{r_1}}.$$

[*3] 分母が小さくなると，絶対値付きの数は大きくなる．E は負符号だからマイナス方向に大きくなる，つまり小さくなる.
[*4] 等速円運動となることは【背伸びした補足】で示す.

(3)　月と地球の運動方程式（中心成分）より[*5]，

$$\begin{cases} m\dfrac{(r_1\omega)^2}{r_1} = G\dfrac{Mm}{{r_0}^2}\,, \\ M\dfrac{\{(r_0-r_1)\omega\}^2}{r_0-r_1} = G\dfrac{Mm}{{r_0}^2} \end{cases} \qquad \therefore r_1 = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\dfrac{M}{M+m}r_0}\,.$$

(4)　角速度 ω で 2π 回転する時間を求めればよい．(2)，(3) を用いて，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi r_0\sqrt{\frac{r_1}{GM}} = \underset{\sim\sim\sim\sim}{2\pi r_0\sqrt{\frac{r_0}{G(M+m)}}}\,.$$

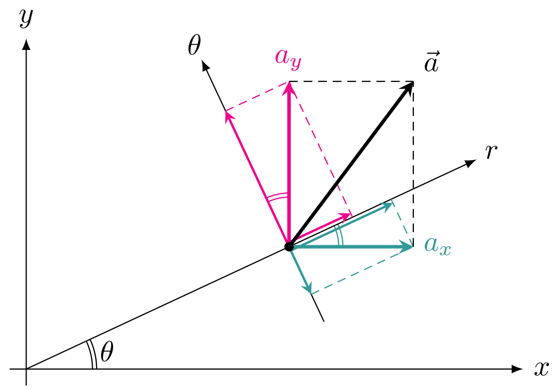
*5 2 物体系が静止していることから系の重心速度は 0，すなわち重心は静止している．このことから O が重心と分かり，重心の定義を用いても同様の結果となる（要するに，普通に運動方程式から決定できれば良い）．

【背伸びした補足】等速円運動を導出する[*6]

以下の Step1〜Step7 に分けて月と地球の軌道を導出する．

■ Step1. 加速度の極座標表示

デカルト座標における x 方向成分の単位ベクトルを $\vec{e}_x$，y 方向成分の単位ベクトルを $\vec{e}_y$ とし，極座標における r 方向成分の単位ベクトルを $\vec{e}_r$，θ 方向成分の単位ベクトルを $\vec{e}_\theta$ とする．このとき，加速度 $\vec{a}$ の x 成分を a_x，y 成分を a_y とすると，



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$$

と書ける．同様に，極座標においても加速度 $\vec{a}$ の r 成分を a_r，θ 成分を a_θ とすると，

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$$

と書ける．このとき，両者の関係は右図より以下のようになる．

$$\begin{cases} a_r = a_x\cos\theta + a_y\sin\theta\,, \\ a_\theta = -a_x\sin\theta + a_y\cos\theta\,. \end{cases}$$

さて，位置ベクトルの各成分 x，y の極座標表示は，

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\,, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

であるから，速度ベクトルの各成分 $v_x = \dot{x}$，$v_y = \dot{y}$ は，

$$\begin{cases} v_x = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\,, \\ v_y = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

となり，加速度ベクトル $a_x = \ddot{x}$，$a_y = \ddot{y}$ は，

$$\begin{cases} a_x = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta\,, \\ a_y = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \end{cases}$$

[*6] 高校範囲を逸脱しているので（と言っても大学 1 年生のレポート課題レベル）「わかったらなんか楽しそう！」くらいに見てくれればいいです．こういうのを書いている（計算している）とき，とても楽しいです．書いているとき，珍しく僕の目はキラキラしています．

となる．ここで，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に注意して整理すれば[*7]，

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\,, \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

を得る．これが加速度の（2 次元）極座標表示である．例えば，円運動では r が定数値を取ることから $\dot{r} = 0$ ゆえ，

$$\begin{cases} a_r = -r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2 = -\dfrac{v^2}{r}\,, \\ a_\theta = r\ddot{\theta} = r\dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$

となり，高校で習う円運動の加速度と一致する．

■ Step2. 連星系の運動方程式

月（質量 m）の位置ベクトルを $\vec{r}$，地球（質量 M）の位置ベクトルを $\vec{R}$ とすると，各物体の運動方程式は以下のようになる．

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = -\dfrac{GMm}{|\vec{r}-\vec{R}|^2}\dfrac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|}\,, \\ M\ddot{\vec{R}} = +\dfrac{GMm}{|\vec{r}-\vec{R}|^2}\dfrac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|}\,. \end{cases}$$

■ Step3. 連星の重心と相対座標，運動方程式の書き換え

2 式の運動方程式の和を取り，両辺を t で積分すれば

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} + M\ddot{\vec{R}} &= \vec{0} \\ \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}} + M\dot{\vec{R}}\right) &= \vec{0} \\ \therefore m\dot{\vec{r}} + M\dot{\vec{R}} &= m\dot{\vec{r}}(0) + M\dot{\vec{R}}(0) \\ \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}} + M\dot{\vec{R}}\right) &= m\dot{\vec{r}}(0) + M\dot{\vec{R}}(0) \\ \therefore m\vec{r} + M\vec{R} &= m\vec{r}(0) + M\vec{R}(0) + \{m\dot{\vec{r}}(0) + M\dot{\vec{R}}(0)\}t \end{aligned}$$

を得る．この両辺を $m+M$ で割れば，

$$\frac{m\vec{r} + M\vec{R}}{m+M} = \frac{m\vec{r}(0) + M\vec{R}(0)}{m+M} + \frac{m\dot{\vec{r}}(0) + M\dot{\vec{R}}(0)}{m+M}t$$

と重心が等速度で運動することも確認できる．

[*7] 速度の（2 次元）極座標表示は右の通り：$\begin{cases} v_r = \dot{r}\,, \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \iff \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\,.$

今，$t=0$ で重心座標が 0 にあり，系の運動量が 0（重心速度が 0）であるから，

$$m\vec{r}+M\vec{R}=\vec{0} \qquad \therefore \vec{R}=-\frac{m}{M}\vec{r}$$

を得る．よって，相対座標は，

$$\vec{r}-\vec{R}=\vec{r}-\left(-\frac{m}{M}\vec{r}\right)=\left(1+\frac{m}{M}\right)\vec{r}$$

と表され，月の運動方程式は $r=|\vec{r}|$ として，

$$\ddot{\vec{r}}=-\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

と書き直せる．

■ Step4. 運動方程式を極座標で記述する

加速度の極座標表示は

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

であり，位置ベクトル $\vec{r}$ は $\vec{r}=r\vec{e}_r$ であるから，月の運動方程式より，

$$(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta=-\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\frac{GM}{r^3}\vec{e}_r+0\cdot\vec{e}_\theta$$

と表され，各成分は以下の微分方程式に帰着する．

$$\begin{cases}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\left(\dfrac{M}{M+m}\right)^2\dfrac{GM}{r^3}\,, \\ 2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0\end{cases} \qquad \therefore \begin{cases}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\left(\dfrac{M}{M+m}\right)^2\dfrac{GM}{r^3}\,, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0\,.\end{cases}$$

■ Step5. $\boldsymbol{\theta}$ 方向の微分方程式を解く

動径方向の運動方程式は，

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0$$

である．$r^2\dot{\theta}$ を微分して 0 になることから，$r^2\dot{\theta}$ が定数値を取ることが分かり

$$h=r^2\dot{\theta}$$

と定義する[*8]．この h の値は初期条件によって決まり，この問題では $t=0$ で $r(0)=r_1=\dfrac{M}{M+m}r_0$，$r(0)\dot{\theta}(0)=r_1\omega=\dfrac{r_1}{r_0}\sqrt{\dfrac{GM}{r_1}}$ であるから，

$$h=r^2\dot{\theta}={r_1}^2\omega=\frac{{r_1}^2}{r_0}\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

となる．これは最終結果で用いる．

■ Step6. r 方向の微分方程式を解く

半径方向の微分方程式は，

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\frac{GM}{r^3}$$

である．ここで $\rho=\dfrac{1}{r}$ と変数変換することを考える．各項について，$\dot{\theta}$ は h の式から，

$$\dot{\theta}=\frac{h}{r^2}=h\rho^2$$

となる．続いて $\ddot{r}$ は，まず $\dot{r}$ が

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)h\rho^2=h\rho^2\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{d\rho}{d\theta}=-h\frac{d\rho}{d\theta}$$

となるので，

$$\ddot{r}=\frac{d}{dt}\left(-h\frac{d\rho}{d\theta}\right)=-h\frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)=-h\frac{d}{d\theta}\frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-h\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cdot h\rho^2=-h^2\rho^2\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$$

を得る．したがって，半径方向の微分方程式は，

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2}=-\rho+\frac{M}{M+m}\frac{GM}{h^2}$$

と角振動数 1，振動中心 $-\dfrac{M}{M+m}\dfrac{GM}{h^2}$ の単振動の微分方程式に帰着する．よって，積分定数を A，θ_0 と取れば[*9]，

$$\rho=\frac{M}{M+m}\frac{GM}{h^2}+A\cos\left(\theta-\theta_0\right)$$

を得て，これを r へ直せば，

$$r=\cfrac{1}{\cfrac{M}{M+m}\cfrac{GM}{h^2}+A\cos\left(\theta-\theta_0\right)}$$

*8 $\dfrac{1}{2}h$ を面積速度と呼ぶ．

*9 加法定理で分解すれば普段学習している通り sin と cos の線形結合となる．

と求まる．これは円錐曲線（二次曲線）を表す極方程式である．

■ **Step7. 初期条件を代入し $\boldsymbol{A}$ を求める，そして円軌道を示す**

Step6 の計算から

$$\rho = \frac{M}{M+m}\frac{GM}{h^2} + A\cos(\theta - \theta_0)$$

ゆえ，両辺を θ で微分すれば，

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -A\sin(\theta - \theta_0)$$

となる．ここで $\rho = \dfrac{1}{r}$，$\dfrac{d\rho}{d\theta} = -\dfrac{\dot{r}}{h}$ を用いれば，

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\rho - \frac{M}{M+m}\frac{GM}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{r} - \frac{M}{M+m}\frac{GM}{h^2}\right)^2 + \left(-\frac{\dot{r}}{h}\right)^2 \\
&= \frac{1}{r^2} + \frac{G^2M^2}{h^4}\left(\frac{M}{M+m}\right)^4 - \frac{2GM}{h^2}\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\frac{1}{r} + \left(\frac{\dot{r}}{h}\right)^2
\end{aligned}$$

と書ける．初期条件は $t = 0$ で $r = r_1$ であり，r 方向に運動していないことから $\dot{r} = 0$ である．$h = \dfrac{{r_1}^2}{r_0}\sqrt{\dfrac{GM}{r_1}}$，$\dfrac{r_1}{r_0} = \dfrac{M}{M+m}$ を用いて，

$$\begin{aligned}
A^2 &= \frac{1}{r^2} + \frac{G^2M^2}{h^4}\left(\frac{M}{M+m}\right)^4 - \frac{2GM}{h^2}\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\frac{1}{r} + \left(\frac{\dot{r}}{h}\right)^2 \\
&= \frac{1}{{r_1}^2} + \frac{G^2M^2}{\left(\dfrac{{r_1}^2}{r_0}\sqrt{\dfrac{GM}{r_1}}\right)^4}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^4 - \frac{2GM}{\left(\dfrac{{r_1}^2}{r_0}\sqrt{\dfrac{GM}{r_1}}\right)^2}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2\frac{1}{r_1} + 0^2 \\
&= \frac{1}{{r_1}^2} + \frac{1}{{r_1}^2} - \frac{2}{{r_1}^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

と求まる．よって，これを r の式へ代入すれば，

$$r = \frac{1}{\dfrac{M}{M+m}\dfrac{GM}{h^2}} = r_1$$

と求まり，月の軌道半径は一定値 r_1 を取る（すなわち円軌道である）ことが分かる．また，地球の軌道半径 $R = |\vec{R}|$ は，

$$R = \left|-\frac{m}{M}\vec{r}\right| = \frac{m}{M}r_1$$

と一定値を取ることが分かる．