

問題編



**12.** 図のように、水平な粗い床の上に質量  $m$  の物体が置かれている。物体はばね定数  $k$  のばねで壁とつながっている。右向きに  $x$  軸をとり、ばねが自然長のときの物体の位置を原点とする。この物体の運動に関する以下の問いに答えなさい。ただし、重力加速度の大きさを  $g$  とする。

物体を原点より右側で静かにはなす実験を行った。物体を位置  $d (> 0)$  より左側ではなすとそのまま静止していたが、右側ではなすと動き出した。

- (1) 物体と床の間の静止摩擦係数  $\mu$  を求めなさい。

物体を位置  $x_0 (> d)$  から静かにはなすと、物体は左向きに動き出した。その後、物体の速さは位置  $x_1 (< -d)$  で初めて 0 となった。

- (2) 物体と床の間の動摩擦係数  $\mu'$  を求めなさい。  
(3) 物体の加速度を  $a$  として、左向きに運動している物体の運動方程式を示しなさい。  
(4) 物体が  $x_0$  から  $x_1$  に移動するまでにかかった時間  $t_1$  を求めなさい。  
(5) 物体が  $x_0$  から  $x_1$  に移動する間で、物体の速さが最大となるときの位置と速さを求めなさい。

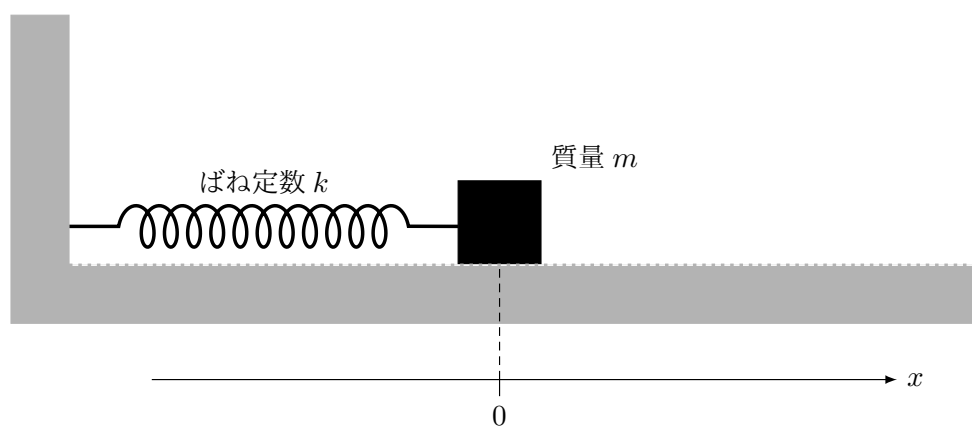
その後、物体は右向きに動き出し、ある位置 ( $> d$ ) で再び速さが 0 となった。

- (6)  $x_1$  から再び速さが 0 となった位置に移動する間で、物体の速さが最大となるときの位置を求めなさい。  
(7) 物体の速さが再び 0 となった位置  $x_2$  を  $x_0$  と  $x_1$  を用いて表しなさい。

ある実験では  $x_0 = \frac{7}{2}d$ ,  $x_1 = -\frac{5}{2}d$  だった。この場合、物体は 3 回目に速さが 0 になった位置  $x_3$  で、そのまま静止し続けた。

- (8)  $x_3$  を求めなさい。  
(9) 物体が動きだしてから最終的に静止するまでの物体の位置  $x$  と、時間  $t$  の関係を、横軸に  $t$ 、縦軸に  $x$  をとったグラフに示しなさい。

[2023 年横浜市立大学, 重問 56 対応]



**13.** 図 1 のように、なめらかな水平面上に一端が固定されたばね定数  $k$  のばねが置かれている。ばねの他端には質量  $m$  の物体 A がつけられている。はじめ、ばねは自然長になっており、物体 A は静止している。図のように水平方向に  $x$  軸をとり、紙面に向かって右向きを正とする。物体 A のはじめの位置を  $x = 0$  とする。

質量  $M$  ( $M > m$ ) の物体 B を、速度  $v_0$  ( $v_0 > 0$ ) で物体 A に衝突させた。物体 A と物体 B は弾性衝突し、衝突直後、両物体は右方向へ進み、その後、物体 A と物体 B はばねが最も縮んだ後に再衝突を起こした。ばねは弾性力がフックの法則に従う範囲で伸縮し、また、ばねの質量、および物体の大きさは無視できるものとする。

はじめの衝突の瞬間を時刻  $t = 0$  とし、再衝突の起きる時刻を  $t_1$  とする。はじめの衝突から再衝突が起きるまでの間、物体 A は単振動を行った。以下の問いに答えよ。必要であれば、円周率  $\pi$  を用いよ。

問 1 はじめの衝突直後の物体 A、物体 B の速度をそれぞれ  $v_A$ ,  $v_B$  とする。

(ア) はじめの衝突前後で成り立つ運動量保存の法則を表す式を書け。

(イ)  $v_A$ ,  $v_B$  を、 $m$ ,  $M$ ,  $v_0$  を用いて表せ。また導き方も示せ。

(ウ) はじめの衝突直後の物体 A と物体 B の速度の比  $\frac{v_B}{v_A}$  を、物体 A と物体 B の質量比  $p = \frac{M}{m}$  を用いて表せ。

問 2 ばねが最も縮んだとき、物体 A は、 $x = L$  の位置にあった。 $L$  を  $v_A$ ,  $k$ ,  $m$  を用いて表せ。また導き方も示せ。

問 3 はじめの衝突から再衝突までの間の任意の時刻  $t$  ( $0 \leq t \leq t_1$ ) における物体 A、物体 B の位置を  $x_A$ ,  $x_B$  とする。

(ア)  $x_A$  を  $v_A$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $k$ ,  $t$  のうち必要なものを用いて表せ。

(イ)  $x_B$  を  $v_B$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $k$ ,  $t$  のうち必要なものを用いて表せ。

問 4 ばねが最も縮んだ後、物体 A と物体 B は、 $x = \frac{L}{2}$  の位置で再衝突した。

(ア) この場合の再衝突が起こる時刻  $t_1$  を、 $m$ ,  $k$  を用いて表せ。また導き方も示せ。

(イ) この場合の物体 A と物体 B の質量比  $p = \frac{M}{m}$  の値を求めよ。また導き方も示せ。

問 5 問 4 の場合の物体 A、物体 B の速度の時間変化を表すグラフとして正しいものを図 2 の解答群の中から選び、記号で答えよ。ただし、物体 A の速度を実線、物体 B の速度を破線を用いて  $0 < t < t_1$  の範囲で示してある。

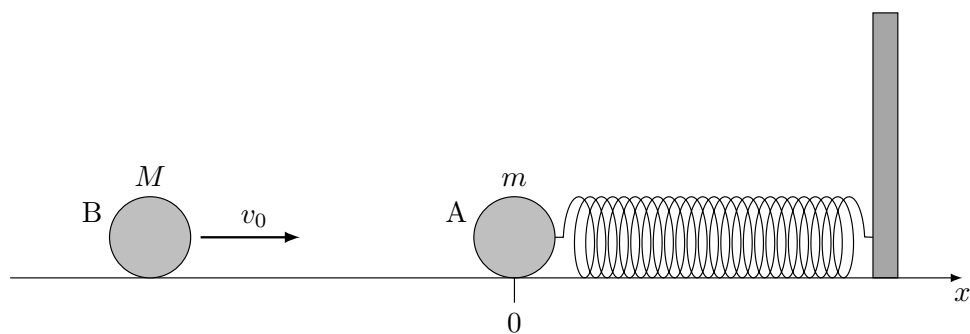
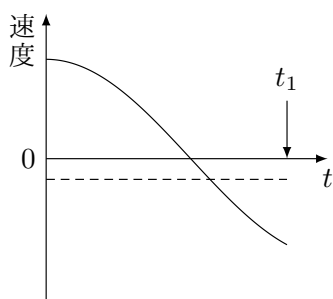
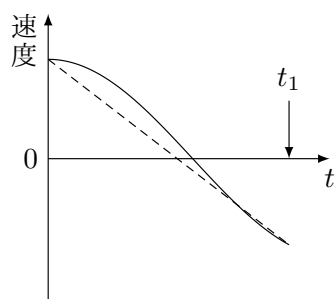


図 1

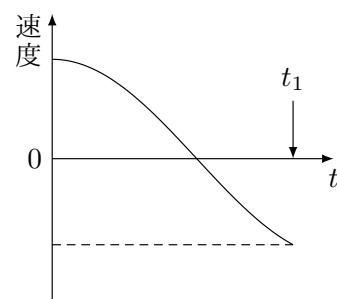
(ア)



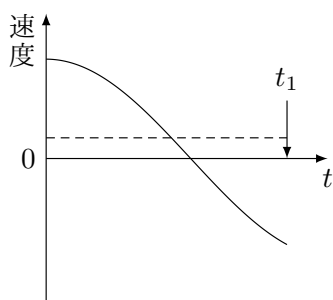
(イ)



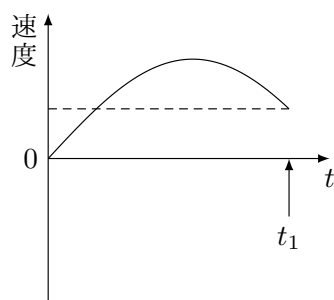
(ウ)



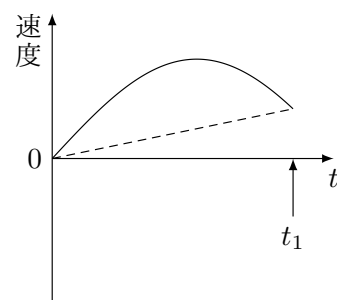
(エ)



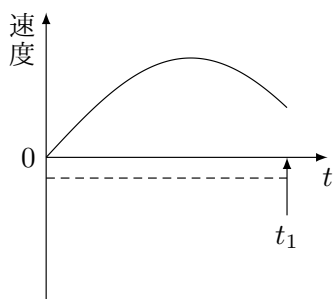
(オ)



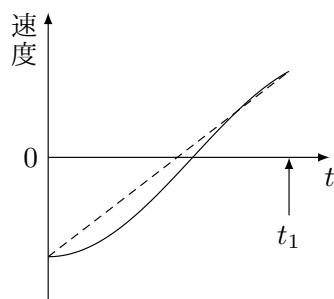
(カ)



(キ)



(ク)



(ケ)

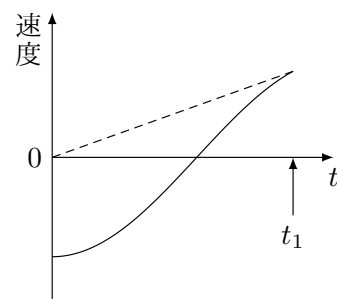
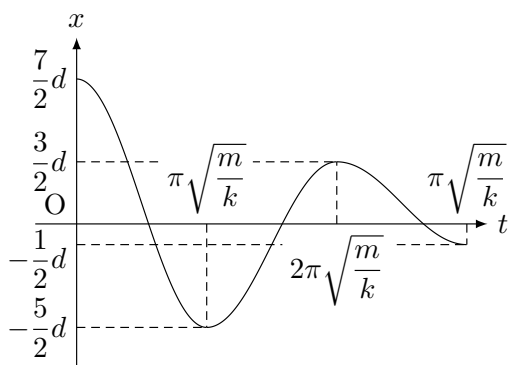


図 2

## ■略解

### 12. 単振動

- (1)  $\frac{kd}{mg}$  (2)  $\frac{k(x_0 + x_1)}{2mg}$   
 (3)  $ma = -k\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right)$   
 (4)  $\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  (5)  $\frac{x_0 - x_1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$  (6)  $-\frac{x_0 + x_1}{2}$   
 (7)  $-x_0 - 2x_1$  (8)  $-\frac{d}{2}$   
 (9)



### 13. 単振動の時間追跡, 衝突

問1 ア:  $mv_A + Mv_B = Mv_0$

イ:  $v_A = \frac{2M}{M+m}v_0, \quad v_B = \frac{M-m}{M+m}v_0$

ウ:  $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

問2  $v_A\sqrt{\frac{m}{k}}$

$V_C = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh_1}$

問3 ア:  $v_A\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$  イ:  $x_B = v_B t$

問4 ア:  $\frac{5}{6}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  イ:  $\frac{5\pi}{5\pi-6}$

問5 (エ)

## 解答編

---

## 12. 単振動

### 【メモ】

- ・ 高校範囲で時間追跡可能な運動は①等加速度運動，②単振動，③空気抵抗型（指数関数型）の3通りである．特に①，②については時間追跡とエネルギーの両方で解くことができる．
- ・ 解答は最短経路で書いたが，理想的な解答は【補足1】，【補足2】の計算である．これを自らの手で再現することで基礎の定着を徹底したい．
- ・ 今回の場合，(3)～(5)については時刻  $t$  を問われているため時間追跡で考えるのが良い．(6)～(8)に関しては  $t$  が問われていないのでエネルギーで考えるのが楽．
- ・ 仕事  $W$  の計算は以下のように分類される．

$$W = \begin{cases} \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が既知} \rightarrow \text{定義から直接計算} \\ \rightarrow \begin{cases} f \text{ 一定の場合} : \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} = |f| |\Delta x| \cos \theta (\Delta x : \text{変位}) \\ f \text{ が一定出ない場合} : (f \text{ の } x \text{ 積分}) = (f - x \text{ グラフの面積}) \end{cases} \\ \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が不明} \rightarrow \text{エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

### 【解答】

- (1) 垂直抗力の大きさを  $N$ ，静止摩擦力の大きさを  $R$  とする． $x = d$  で静止摩擦力の大きさは最大静止摩擦力に等しくなることから  $R = \mu N$  で，物体のつりあいより，

$$\begin{cases} m \cdot 0 = -kd + R, \\ m \cdot 0 = N - mg \end{cases} \quad \therefore \mu = \frac{R}{N} = \frac{kd}{\underline{mg}}.$$

- (2) 物体が左向きに滑るときの運動方程式は，

$$ma = -kx + \mu' N = -kx + \mu' mg$$

である．よって，物体のエネルギー収支より  $x = x_0$  で  $v = 0$ ， $x = x_1$  で  $v = 0$  であることから，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= \int_{x_0}^{x_1} (-kx + \mu' mg) dx \\ 0 &= -\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_0^2) + \mu' mg(x_1 - x_0) \\ \therefore \mu' &= \frac{k(x_0 + x_1)}{\underline{2mg}}. \end{aligned}$$

- (3) 前問に記した運動方程式に  $\mu'$  を代入して，

$$\underline{ma = -kx + \frac{1}{2}k(x_0 + x_1)}.$$



(4) 運動方程式より

$$ma = -k \left( x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right) \quad \therefore a = -\frac{k}{m} \left( x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right)$$

であるから、 $x$  軸負方向へ滑るときは角振動数  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 、振動中心  $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$  の単振動の一部分の運動を行う。考える時間は単振動の半周期だから、

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

(5) 振動中心で速さが最大となることから求める位置は  $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$  である。よって、振動の振幅  $A_1$  は最大変位  $x = x_0$  (または  $x = x_1$ ) と振動中心の差から計算して、

$$A_1 = x_0 - \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{x_0 - x_1}{2}$$

である。速さの最大値は「(振幅) × (角振動数)」と計算できるから、

$$|v|_{\max} = A_1 \omega = \frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

(6) 振動中心で速さが最大となることから、運動方程式より  $x = -\frac{x_0 + x_1}{2}$  で速さは最大となる。

(7) 振動の振幅  $A_2$  は最大変位  $x = x_1$  と振動中心の差から計算して、

$$A_2 = -\frac{x_0 + x_1}{2} - x_1 = -\frac{x_0 + 3x_1}{2}$$

である。よって、折り返す位置  $x_2$  は、

$$x_2 = -\frac{x_0 + x_1}{2} + A_2 = -x_0 - 2x_1.$$

(8)  $x_0 = \frac{7}{2}d$ ,  $x_1 = -\frac{5}{2}d$  のとき,  $\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{d}{2}$ ,  $x_2 = \frac{3}{2}d$  である。このとき  $x$  軸正方向へ滑るときの運動方程式は、

$$ma = -kx + \mu' mg = -kx + \frac{1}{2}k(x_0 + x_1) = -k \left( x - \frac{d}{2} \right)$$

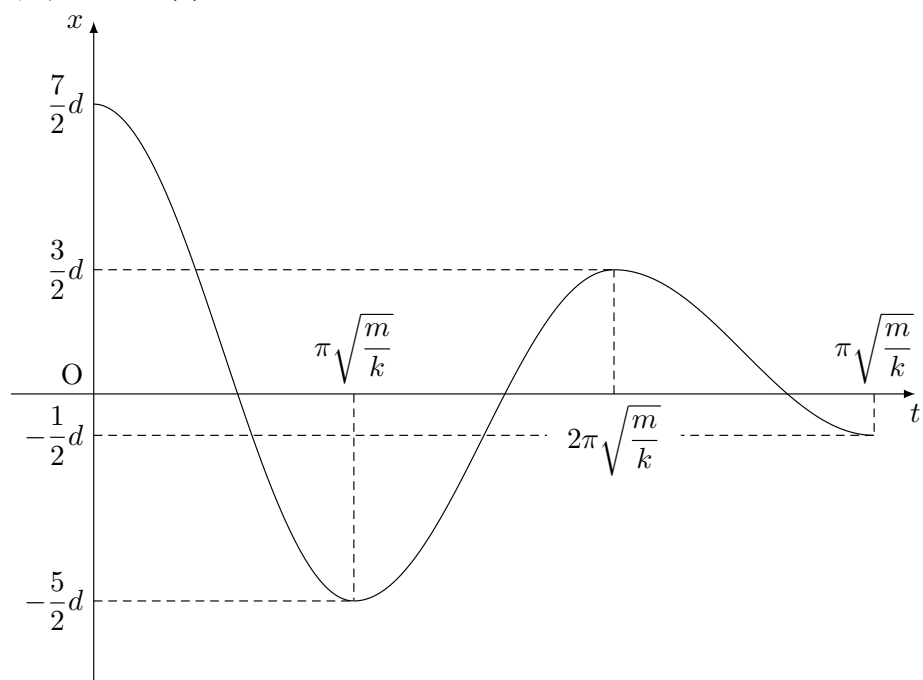
であるから、物体のエネルギー収支より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= \int_{\frac{3}{2}d}^{x_3} \left\{ -k \left( x - \frac{d}{2} \right) \right\} dx \\ 0 &= -\frac{1}{2}k \left( x_3 - \frac{d}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}kd^2 \quad \therefore x_3 = -\frac{d}{2}, \frac{3}{2}d \end{aligned}$$

であり、 $x \neq x_2 = \frac{3}{2}d$  より、

$$x = -\frac{d}{2}.$$

- (9)  $|x_3| < d$  より  $x_3$  に達した後物体は静止する．運動方程式より， $x$  軸負方向へ滑るときの振動中心は  $x = \frac{d}{2}$ ， $x$  軸正方向へ滑るときの振動中心は  $x = -\frac{d}{2}$  であり，これまでの結果を踏まえれば以下のような図になる．



## 【補足1】各設問を時間追跡で解く

(2): 運動方程式より

$$ma = -kx + \mu' mg \quad \therefore a = -\frac{k}{m} \left( x - \frac{\mu' mg}{k} \right)$$

であり, 角振動数  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 振動中心  $x = \frac{\mu' mg}{k}$  と求まる. 初期条件  $x = x_0$ ,  $v = 0$  より, 物体の位置  $x$ , および速度  $v$  は,

$$\begin{cases} x = \frac{\mu' mg}{k} + \left( x_0 - \frac{\mu' mg}{k} \right) \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = - \left( x_0 - \frac{\mu' mg}{k} \right) \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

と表される.  $v = 0$  となる時刻  $t$  での位置  $x$  が  $x_1$  であるから, まず  $v = 0$  となる  $t$  を求め,

$$- \left( x_0 - \frac{\mu' mg}{k} \right) \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) = 0 \quad \therefore t = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

よって, このとき  $x = x_1$  で,

$$x_1 = \frac{\mu' mg}{k} + \left( x_0 - \frac{\mu' mg}{k} \right) \cos \pi \quad \therefore \mu' = \frac{k(x_0 + x_1)}{\underbrace{2mg}}.$$

(4): 運動方程式より,

$$ma = -k \left( x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right) \quad \therefore a = -\frac{k}{m} \left( x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right)$$

であり,  $x$  軸負方向へ滑るときは角振動数  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 振動中心  $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$  の単振動の一部分の運動を行う. したがって, 未知定数を  $C$ ,  $D$  とすれば時刻  $t$  における物体の位置  $x$ , および速度  $v$  は,

$$\begin{cases} x = \frac{x_0 + x_1}{2} + C \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + D \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = C \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - D \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

と書ける. 未知定数  $C$ ,  $D$  は初期条件  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = 0$  より決定され,

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x_0 + x_1}{2} + D, \\ 0 = C \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad \therefore C = 0, \quad D = \frac{x_0 - x_1}{2}$$

と求まる. よって, 位置  $x$ , 速度  $v$  はそれぞれ以下のようになる.

$$\begin{cases} x = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = -\frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

$x = x_1$  を満たす時刻  $t$  ( $v = 0$  を満たす時刻  $t$ ) を求めて\*1,

$$\begin{aligned} \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) &= x_1 \\ \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) &= -1 \quad \therefore t_1 = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} (= t_1). \end{aligned}$$

(5): 前問の計算から時刻  $t$  における物体の位置  $x$ , および速度  $v$  は,

$$\begin{cases} x = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = -\frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

と表せた. よって, 速さ  $|v|$  が最大値 (振幅値)  $|v|_{\max} = \frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$  を取る時刻は,

$$\begin{aligned} -\frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) &= \pm \frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) &= 1 \quad \therefore t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

であり\*2, このときの位置  $x$  は,

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{x_0 + x_1}{2}.$$

(6): 考えている時間は  $t \geq t_1$  である. 運動方程式より,

$$ma = -kx - \mu' mg = -k \left( x + \frac{x_0 + x_1}{2} \right) \quad \therefore a = -\frac{k}{m} \left( x + \frac{x_0 + x_1}{2} \right)$$

であり,  $x$  軸正方向へ滑るときは角振動数  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 振動中心  $x = -\frac{x_0 + x_1}{2}$  の単振動の一部分の運動を行う. したがって, 未知定数を  $C, D$  とすれば時刻  $t$  における物体の位置  $x$ , および速度  $v$  は,

$$\begin{cases} x = -\frac{x_0 + x_1}{2} + C \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} + D \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\}, \\ v = C \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} - D \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} \end{cases}$$

\*1  $v = 0 : \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t_1 \right) = 0 \quad \therefore t_1 = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$

\*2 1 回目に速さが最大となった時刻が求める時刻である. 折り返し後は運動方程式が変わるため, 時刻  $t$  における物体の位置  $x$  や速度  $v$  の表式も変わることに注意.

と書ける\*3. 未知定数  $C, D$  は初期条件  $x(t_1) = x_1, v(t_1) = 0$  より決定され,

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{x_0 + x_1}{2} + D, \\ 0 = C\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad \therefore C = 0, \quad D = \frac{x_0 + 3x_1}{2}$$

と求まる. よって, 位置  $x$ , 速度  $v$  はそれぞれ以下のようになる.

$$\begin{cases} x = -\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 + 3x_1}{2} \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\}, \\ v = -\frac{x_0 + 3x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} \end{cases}$$

以上から,  $|v|$  が最大値 (振幅値) を取る時刻は,

$$-\frac{x_0 + 3x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} = \pm \frac{x_0 + 3x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore t = t_1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

であり\*4, このとき,

$$x = -\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 + 3x_1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \underbrace{-\frac{x_0 + x_1}{2}}_{\text{}}.$$

(7): 前問の計算から時刻  $t$  における物体の位置  $x$ , および速度  $v$  は,

$$\begin{cases} x = -\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 + 3x_1}{2} \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\}, \\ v = -\frac{x_0 + 3x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} \end{cases}$$

と表せた. よって,  $v = 0$  となる時刻は,

$$-\frac{x_0 + 3x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1) \right\} = 0 \quad \therefore t = t_1 + \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

であり, このとき,

$$x = -\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 + 3x_1}{2} \cos \pi = \underbrace{-x_0 - 2x_1}_{\text{}}.$$

\*3  $t - t_1$  の表現が分かりにくい場合は,  $x = x_1$  に達した瞬間 ( $t = t_1$  のとき) を再度  $t = 0$  として考えてもよい. その場合, 位置  $x$ , 速度  $v$  は以下のようになる.

$$\begin{cases} x = -\frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 + 3x_1}{2} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = -\frac{x_0 + 3x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

\*4 先ほど同様, 1 回目に速さが最大となった時刻が求める時刻である.

(8): 考えている時間は  $t \geq 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} (= t_2)$  である. また,  $x_0 = \frac{7}{2}d$ ,  $x_1 = -\frac{5}{2}d$  より  $\frac{x_0+x_1}{2} = \frac{d}{2}$ ,  $x_2 = \frac{3}{2}d$  である.  $x$  軸負方向へ滑ることから (2)~(5) と同じ運動方程式となり, 角振動数  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 振動中心  $x = \frac{d}{2}$  の単振動の一部分の運動を行う. したがって, 未知定数を  $C, D$  とすれば時刻  $t$  における物体の位置  $x$ , および速度  $v$  は,

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2} + C \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\} + D \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\}, \\ v = C \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\} - D \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\} \end{cases}$$

と書ける<sup>\*5</sup>. 未知定数  $C, D$  は初期条件  $x(t_2) = x_2 = -x_0 - 2x_1$ ,  $v(t_2) = 0$  より決定され,

$$\begin{cases} \frac{3}{2}d = \frac{d}{2} + D, \\ 0 = C \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad \therefore C = 0, \quad D = d$$

と求まり, 位置  $x$ , 速度  $v$  はそれぞれ以下のようにになる.

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2} + d \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\}, \\ v = d \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\} \end{cases}$$

以上から,  $v = 0$  となる時刻は,

$$d \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\} = 0 \quad \therefore t = t_2 + \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 3\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

であり<sup>\*6</sup>, このとき,

$$x = \frac{d}{2} + d \cos \pi = \underbrace{-\frac{d}{2}}$$

<sup>\*5</sup>  $t - t_2$  の表現が分かりにくい場合は,  $x = x_2$  に達した瞬間 ( $t = t_2$  のとき) を再度  $t = 0$  として考えてもよい. その場合, 位置  $x$ , 速度  $v$  は以下のようにになる.

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2} + d \cos \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\}, \\ v = d \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_2) \right\} \end{cases}$$

<sup>\*6</sup> これまで同様, 1 回目に速さが最大となった時刻が求める時刻である.

【補足2】各設問を物体のエネルギー収支で解く

(2) : 解答をエネルギー収支で書いた.

(4) : 時刻  $t$  はエネルギー収支では求まらない.

(5) : 物体が左へ滑るとき, 運動方程式は,

$$ma = -kx + \mu' mg = -kx - \frac{1}{2}k(x_0 + x_1) = -k\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right).$$

よって, 位置  $x$  にあるときの物体の速さを  $v$  とすると, 物体のエネルギー収支より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= \int_{x_0}^x \left\{ -k\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right) \right\} dx \\ \frac{1}{2}mv^2 &= -\frac{1}{2}k\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_0 - x_1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

と求まる. 第1項が0となるとき速さ  $v$  (左辺) は最小値となるので, 求める位置は  $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$  である. このとき

$$\frac{1}{2}mv^2 = 0 + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_0 - x_1}{2}\right)^2 \quad \therefore |v| = \frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

(6) : 物体が右へ滑るとき, 物体の運動方程式は,

$$ma = -kx - \mu' mg = -kx - \frac{1}{2}k(x_0 + x_1) = -k\left(x + \frac{x_0 + x_1}{2}\right).$$

よって, 位置  $x$  にあるときの物体の速さを  $v$  とすると, 物体のエネルギー収支より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= \int_{x_1}^x \left\{ -k\left(x + \frac{x_0 + x_1}{2}\right) \right\} dx \\ \frac{1}{2}mv^2 &= -\frac{1}{2}k\left(x + \frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_0 + 3x_1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

と求まる. 第1項が0となるとき速さ  $v$  (左辺) は最小値となるので, 求める位置は  $x = -\frac{x_0 + x_1}{2}$  である.

(7) : 前問より, 位置  $x$  にあるときの物体の速さを  $v$  としたとき物体のエネルギー収支を計算すると

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}k\left(x + \frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_0 + 3x_1}{2}\right)^2$$

であった. 題意より  $v = 0$  を解いて,

$$0 = -\frac{1}{2}k\left(x + \frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_0 + 3x_1}{2}\right)^2 \quad \therefore x = \underline{\underline{-x_0 - 2x_1}} (= x_2).$$

(8) :  $x_2 = -x_0 - 2x_1 = \frac{3}{2}d$ ,  $\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{d}{2}$  である. 再度物体が左へ滑るときを考えるので, 物体のエネルギー収支より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= \int_{\frac{3}{2}d}^{x_3} \left\{ -k \left( x - \frac{d}{2} \right) \right\} dx \\ 0 &= -\frac{1}{2}k \left( x_3 - \frac{d}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}kd^2 \quad \therefore x_3 = \underbrace{-\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

【補足3】各設問を力学的エネルギー収支で解く

(2) : 物体とばねからなる系の力学的エネルギー収支より,

$$\begin{aligned} \underbrace{\left( \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 \right)}_{\text{運動エネルギー変化}} + \underbrace{\left( \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 \right)}_{\text{弾性エネルギー変化}} &= \vec{f}_{\text{摩擦}} \cdot \Delta x \\ &= \begin{pmatrix} \mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mu' mg(x_1 - x_0) \\ \therefore \mu' &= \underbrace{\frac{k(x_0 + x_1)}{2mg}}. \end{aligned}$$

(4) : 時刻  $t$  は力学的エネルギー収支では求まらない.

(5) : 位置  $x$  にあるときの物体の速さを  $v$  とすると, 物体とばねからなる系の力学的エネルギー収支は,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 \right) + \left( \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 \right) &= \begin{pmatrix} \mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mu' mg(x - x_0) \\ &= \frac{k}{2}(x_0 + x_1)(x - x_0) \\ \therefore \frac{1}{2}mv^2 &= -\frac{1}{2}k \left( x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}k \left( \frac{x_0 + x_1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

と整理できる. 第1項が0となるとき速さ  $v$  (左辺) は最小値となるので, 求める位置は  $x = \underbrace{\frac{x_0 + x_1}{2}}$  で

ある. このとき

$$\frac{1}{2}mv^2 = 0 + \frac{1}{2}k \left( \frac{x_0 - x_1}{2} \right)^2 \quad \therefore |v| = \underbrace{\frac{x_0 - x_1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$



(6) : 位置  $x$  にあるときの物体の速さを  $v$  とすると, 物体とばねからなる系の力学的エネルギー収支は,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 \right) + \left( \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \right) &= \begin{pmatrix} -\mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\mu' mg(x - x_1) \\ &= -\frac{k}{2}(x_0 + x_1)(x - x_1) \\ \therefore \frac{1}{2}mv^2 &= -\frac{1}{2}k \left( x + \frac{x_0 + x_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}k \left( \frac{x_0 + 3x_1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

と整理できる. 第 1 項が 0 となるとき速さ  $v$  (左辺) は最小値となるので, 求める位置は  $x = -\frac{x_0 + x_1}{2}$  である.

(7) : 物体とばねからなる系の力学的エネルギー収支より,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 \right) + \left( \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \right) &= \begin{pmatrix} -\mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\mu' mg(x_2 - x_1) \\ &= -\frac{k}{2}(x_0 + x_1)(x_2 - x_1) \\ \therefore x_2 &= \underline{\underline{-x_0 - 2x_1}}. \end{aligned}$$

(8) :  $x_2 = -x_0 - 2x_1 = \frac{3}{2}d$ ,  $\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{d}{2}$  である. 物体とばねからなる系の力学的エネルギー収支より,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 \right) + \left( \frac{1}{2}kx_3^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \right) &= \begin{pmatrix} \mu' mg \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mu' mg(x_3 - x_2) \\ &= \frac{k}{2}(x_0 + x_1)(x_3 - x_2) \\ \therefore x_3 &= \underline{\underline{-\frac{d}{2}}}. \end{aligned}$$

### 13. 単振動の時間追跡, 衝突

【メモ】

・衝突は以下2種の式を連立.

$$\begin{cases} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{cases}$$

【解答】

問1(ア) 運動量保存則は,

$$\underline{mv_A + Mv_B = Mv_0}.$$

(イ) 運動量保存則, および条件(1次元弾性衝突<sup>\*7</sup>)より,

$$\begin{cases} mv_A + Mv_B = Mv_0, \\ v_A - v_B = -(0 - v_0) \end{cases} \quad v_A = \frac{2M}{M+m}v_0, \quad v_B = \frac{M-m}{M+m}v_0.$$

(ウ) 題意より,

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{M-m}{2M} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m}{M}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

問2 物体Aのエネルギー収支より<sup>\*8\*9</sup>,

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_0^L (-kx) dx = -\frac{1}{2}kL^2 \quad \therefore L = \underline{v_A \sqrt{\frac{m}{k}}}.$$

問3(ア) 物体Aの運動方程式よりAの加速度 $a$ は,

$$ma_A = -kx \quad \therefore a_A = -\frac{k}{m}x.$$

よって, 初期条件 $x_A(0) = 0, v_A(0) = v_A$ より,

$$\underline{x_A(t) = v_A \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}.$$

<sup>\*7</sup> 1次元弾性衝突ははね返り係数1の式を使ってよい. 単に弾性衝突をそのまま読んで以下のように立式をしても解ける.

<sup>\*8</sup> 時間追跡 $v_A(t) = 0$ を解いて $x_A$ へ代入: 
$$\begin{cases} x_A(t) = v_A \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \\ v_A(t) = v_A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{cases}$$

<sup>\*9</sup> 力学的エネルギー保存則:  $\frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2$

- (イ) 物体 B は水平方向に外力を受けないので加速度の水平成分は 0 である.  $t = 0$  で  $x_B(0) = 0$ ,  $v_B(0) = 0$  より,

$$x_B(t) = \underbrace{v_B t}.$$

問 4(ア)  $x_A = \frac{L}{2}$  より,  $L = v_A \sqrt{\frac{m}{k}}$  を踏まえて,

$$\begin{aligned} v_A \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) &= \frac{v_A}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \\ \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) &= \frac{1}{2} \quad \therefore t = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{m}{k}}, \frac{5\pi}{6} \sqrt{\frac{m}{k}}, \dots \end{aligned}$$

を得る. ばねが最も縮んだ後再衝突をしたことから求める時刻  $t$  は  $\frac{1}{4}$  周期後, すなわち  $t \geq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$  であるから求める時刻は

$$t = \frac{5}{6} \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

- (イ) このとき B の位置も  $x_B = \frac{L}{2} = \frac{v_A}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$  で,  $v_A = \frac{2M}{M+m} v_0$ ,  $v_B = \frac{M-m}{M+m} v_0$  より,

$$\frac{M-m}{M+m} v_0 \cdot \frac{5}{6} \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{M}{M+m} v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \therefore p = \frac{M}{m} = \frac{5\pi}{\underbrace{5\pi-6}}.$$

問 5 問 3 より時刻  $t$  における各物体の速度  $v_A(t)$ ,  $v_B(t)$  は, それぞれの位置を時刻  $t$  で微分して,

$$\begin{cases} v_A(t) = v_A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v_B(t) = v_B. \end{cases}$$

$v_A$  が  $+\cos$  型で,  $v_B > 0$  のものを選択すれば (エ) となる.

なお, 改めて確認しなくてもよいが,  $p = \frac{5\pi}{5\pi-6}$  の下では,

$$v_A = \frac{2M}{M+m} v_0 = \frac{5\pi}{5\pi-3} v_0, \quad v_B = \frac{M-m}{M+m} v_0 = \frac{3}{5\pi-3} v_0$$

であるから,

$$\begin{cases} v_A(t) = \frac{5\pi}{5\pi-3} v_0 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v_B(t) = \frac{3}{5\pi-3} v_0 \end{cases}$$

と  $v_B$  が確認できる\*10.

\*10  $x = \frac{L}{2}$  で衝突している時点で  $v_B > 0$  は明らか.