

問題編



14. 真空中で、鉛直上向きに直交座標系の z 軸をとる. x 軸の正の向きに強さ E [N/C] の一様な電場^{*1}がかけられている. この電場中において、質量が m [kg] で正の電荷 q [C] をもつ荷電粒子を考える. 重力加速度の大きさを g [m/s²] として、以下の問いに答えよ.

問1 図1のように、 x 軸と y 軸上の原点 O から d [m] の距離にある点を、それぞれ P , Q とする. 原点 O の電位を 0 V として、点 P と点 Q の電位をそれぞれ求めよ.

問2 図1に示された円弧 PQ 上にある点を R とする. OR が x 軸となす角は θ [rad] である. 直線 OR に沿って荷電粒子を点 O から点 R まで移動したとき、静電気力がした仕事を求めよ.

問3 荷電粒子を、図1のように円周に沿って点 R から点 P まで移動した. このとき、静電気力がした仕事を求めよ.

問4 z 軸上の高さ h [m] の点 A から、荷電粒子を静かに離した. 図2のように、粒子は静電気力と重力を受けて xz 平面内を直線運動し、 x 軸上の点 B を通過した.

- (1) 粒子を離してから点 B に達するまでに要する時間を求めよ.
- (2) OB 間の距離はいくらか.
- (3) 粒子が点 B を通過したときの運動エネルギーを求めよ.

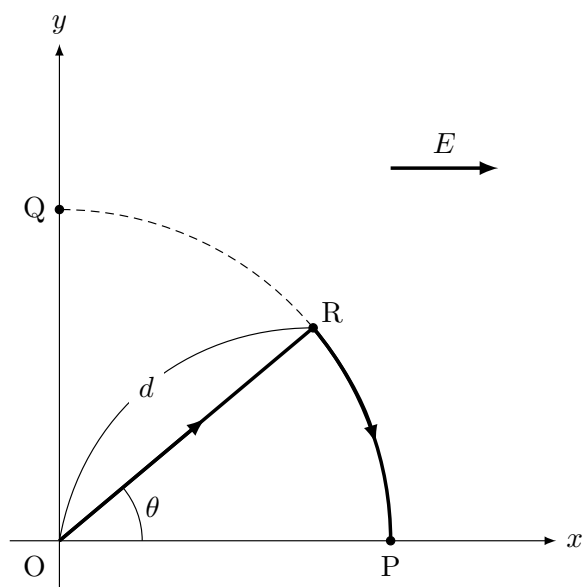
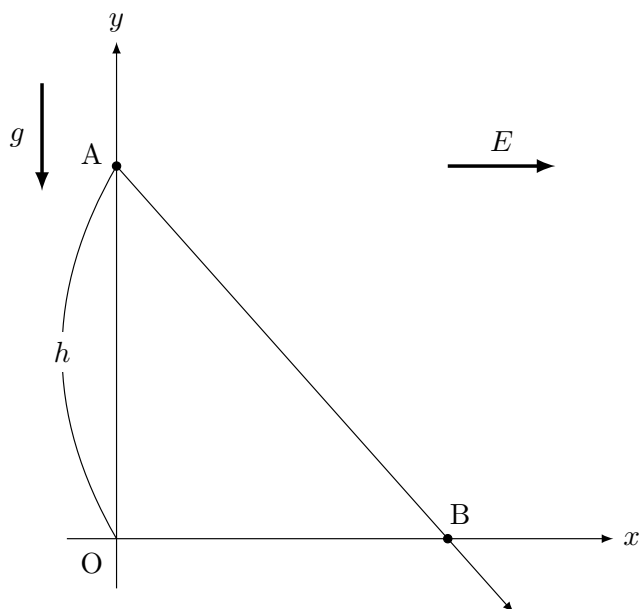
[2008 年静岡大学, 重問 102 対応]

以下、追加問題.

問5 荷電粒子が点 A から点 B へ移動する間にされた仕事 W を求めよ.

問6 荷電粒子が点 O にある場合の系の位置エネルギーを 0 とする. 荷電粒子が点 A , 点 B それぞれの点にあるときの位置エネルギー U_A , U_B をそれぞれ求めよ.

^{*1} 原文は「電界」と表現されていましたが、宗教上の都合により「電場」としました.

図1 xy 平面図2 xz 平面

15. 図 1 に示すように、水平面上に直行した x, y 軸をとり、原点を O とする。正電荷 Q の 2 つの点電荷をそれぞれ点 $A(a, 0)$, 点 $B(-a, 0)$ に固定する ($a > 0$)。以下の問いに答えよ。ただし、クーロンの法則の比例定数を k , 無限遠における電位を 0 とする。解答はすべて解答用紙の所定の欄に記入し、問 3 以外は考え方や計算の要点も記入すること

問 1 点 $C(0, b)$ における電場の大きさを a, b, Q, k のうち必要なものを用いて表せ。また、この電場の向きを答えよ。ただし、 $b > 0$ とする。

問 2 点 A と点 B の点電荷による、 x 軸上の電位 $V(x)$ を、 $|x| < a$, $|x| > a$ の場合に分けて x, a, Q, k を用いて表せ。また、 $V(x)$ のグラフの概略を描け。グラフには、原点 O における電位 $V(0)$ の値を記入せよ。

次に、図 1 の水平面内に質量 m , 正電荷 q を持つ質点 P を加える。ただし、質点 P には静電気力のみはたらくものとする。

問 3 問 1 の点 C に質点 P を置いた。質点 P が受ける静電気力の大きさを m, a, b, q, Q, k のうち必要なものを用いて表せ。また、この静電気力の向きを答えよ。

問 4 $b = \frac{3}{4}a$ とする。外力を加えて質点 P を点 $C\left(0, \frac{3}{4}a\right)$ から点 $D\left(-\frac{a}{3}, 0\right)$ まで静かにゆっくり運んだ^{*2}。このときの外力が質点 P にした仕事を m, a, q, Q, k のうち必要なものを用いて表せ。

問 5 点 $D\left(-\frac{a}{3}, 0\right)$ にある質点 P を静かに放したところ、質点 P は x 軸上を動いた。質点 P の速さが最大になる x 軸上の点の座標を求めよ。また、このときの速さを m, a, q, Q, k のうち必要なものを用いて表せ。

[2022 年筑波大学, 重問 103 対応]

^{*2} 「静かに」, 「ゆっくり」はともに「力のつりあいを保ちながら」を表す表現。

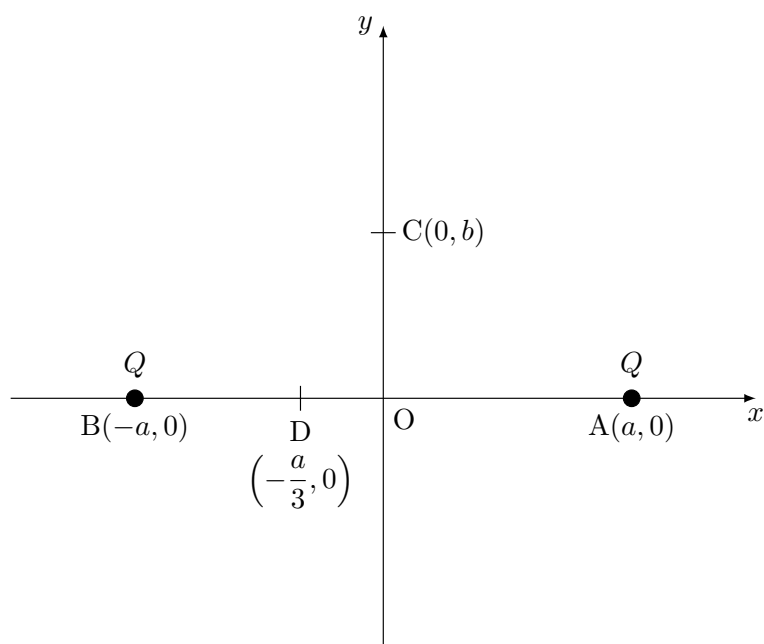


図 1

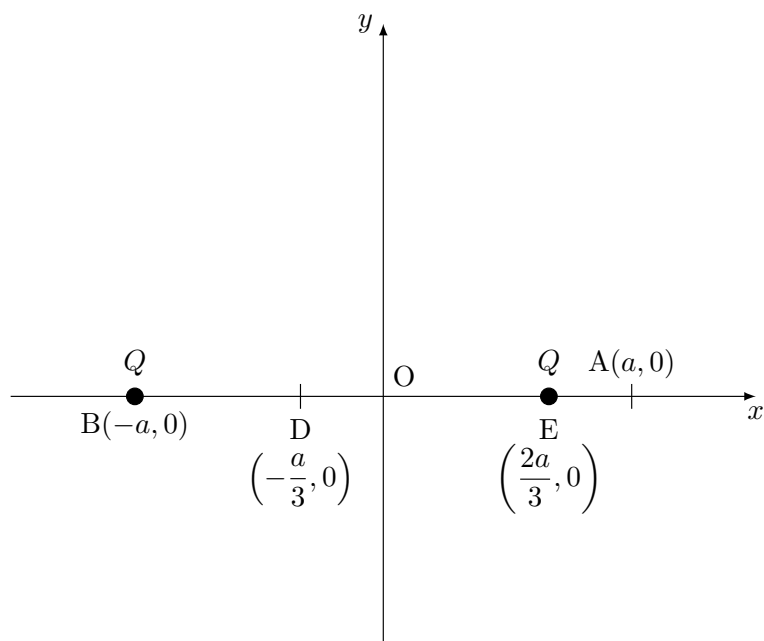


図 2

■略解

14. 荷電粒子の運動（静電場）

問 1 $P : -Ed \quad Q : 0$

問 2 $qEd \cos \theta$

問 3 $qEd(1 - \cos \theta)$

問 4 (1) $\sqrt{\frac{3h}{g}} \quad (2) \frac{qE}{mg} h$
 (3) $\left\{ 1 + \left(\frac{qE}{mg} \right)^2 \right\} mgh$

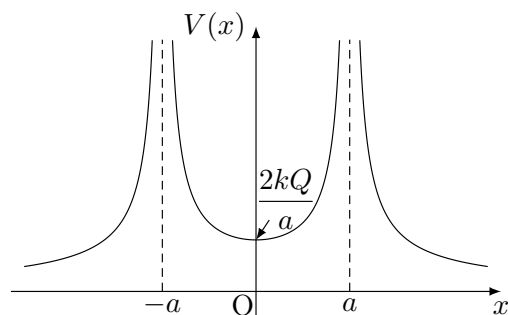
問 5 $\left\{ 1 + \left(\frac{qE}{mg} \right)^2 \right\} mgh$

問 6 $U_A = mgh, \quad U_B = -qEd$

15. 荷電粒子の運動（静電場）

問 1 大きさ : $\frac{2kQb}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$ 向き : y 軸正方向

問 2 $V(x) = \begin{cases} \frac{2kQ|x|}{x^2 - a^2} & (|x| > a), \\ -\frac{2kQa}{x^2 - a^2} & (|x| < a). \end{cases}$



問 3 大きさ : $\frac{2kQqb}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$ 向き : y 軸正方向

問 4 $\frac{13}{20} \frac{kQq}{a}$

問 5 $\sqrt{\frac{kQq}{2ma}}$

問 6 $x = -\frac{a}{6} \quad v = \sqrt{\frac{kQq}{5ma}}$

解答編

14. 荷電粒子の運動（静電場）

【メモ】

・仕事 W の計算は以下のように分類される.

$$W = \begin{cases} \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が既知} \rightarrow \text{定義から直接計算} \\ \rightarrow \begin{cases} f \text{ 一定の場合} : \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} = |f| |\Delta x| \cos \theta (\Delta x : \text{変位}) \\ f \text{ が一定出ない場合} : (f \text{ の } x \text{ 積分}) = (f - x \text{ グラフの面積}) \end{cases} \\ \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が不明} \rightarrow \text{エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

【解答】

問 1 平行一様電場における電場と電位の関係より,

$$\phi_Q = 0, \quad \phi_P = -\underline{\underline{Ed}}.$$

問 2 大きさ一定の力のみを受けているので, 仕事の定義より,

$$W = \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} qE \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \cos \theta \\ d \sin \theta \end{pmatrix} = \underline{\underline{qEd \cos \theta}}.$$

問 3 前問同様に仕事の定義より,

$$W = \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} qE \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d - d \cos \theta \\ d \sin \theta \end{pmatrix} = \underline{\underline{qEd(1 - \cos \theta)}}.$$

問 4 (1) 加速度の x 成分, y 成分をそれぞれ a_x , a_y とすると, 運動方程式より,

$$\begin{cases} ma_x = qE, \\ ma_y = -mg \end{cases} \quad \therefore a_x = \frac{qE}{m}, \quad a_y = -g.$$

加速度成分がともに一定であることから, 時刻 t における粒子の位置は,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2, \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

と表せる. よって, 求める時刻 t は $y = 0$ を解いて,

$$h - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \quad \therefore t = \sqrt{\underline{\underline{\frac{2h}{g}}}}.$$

(2) 時刻 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ における位置 x を求めて,

$$x = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \cdot \frac{2h}{g} = \underline{\underline{\frac{qE}{mg} h}}.$$

(3) 加速度一定より時刻 t における速度成分は,

$$\begin{cases} v_x = \frac{qE}{m}t, \\ v_y = -gt \end{cases}$$

と表せるので運動エネルギーは,

$$K = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m \left\{ \left(\frac{qE}{m} \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^2 + (\sqrt{2gh})^2 \right\} = \underbrace{\left\{ 1 + \left(\frac{qE}{mg} \right)^2 \right\} mgh}.$$

問5 仕事の定義より,

$$W = \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} qE \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{qE}{mg}h \\ -h \end{pmatrix} = \underbrace{\left\{ 1 + \left(\frac{qE}{mg} \right)^2 \right\} mgh}.$$

なお, 問4(3) はエネルギー収支の式より $K = W$ と求めることができる.

問6 公式より, O で位置エネルギーが0であることに留意して,

$$U_A = mgh + q \cdot 0 = \underbrace{mgh},$$

$$U_B = mg \cdot 0 + q \left(-E \frac{qE}{mg} h \right) = -\underbrace{\frac{(qE)^2}{mg} h}.$$

なお, 問4(3) は力学的エネルギー保存則より,

$$K_B + U_B = K_A + U_A$$

$$\therefore K_B - \frac{(qE)^2}{mg} h = 0 + mgh \quad \therefore K_B = mgh + \frac{(qE)^2}{mg} h = \left\{ 1 + \left(\frac{qE}{mg} \right)^2 \right\} mgh$$

と求めることができる.

14. 荷電粒子の運動（静電場）

【メモ】

・仕事 W の計算は以下のように分類される.

$$W = \begin{cases} \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が既知} \rightarrow \text{定義から直接計算} \\ \rightarrow \begin{cases} f \text{ 一定の場合: } \vec{f} \cdot \Delta \vec{x} = |f| |\Delta x| \cos \theta (\Delta x: \text{変位}) \\ f \text{ が一定出ない場合: } (f \text{ の } x \text{ 積分}) = (f-x \text{ グラフの面積}) \end{cases} \\ \cdot \text{力 } f \text{ の具体的な形が不明} \rightarrow \text{エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

エネルギー収支を用いた計算は、どこまでを 1 つの系とみなすかが重要.

【解答】

問 1 電場の x 軸成分は相殺し 0. 公式より,

$$E_C = \frac{kQ}{a^2 + b^2} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times 2 = \frac{2kQb}{\underbrace{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad (\text{y 軸正方向}).$$

問 2 $x > a$ では,

$$V(x) = \frac{kQ}{x-a} + \frac{kQ}{x+a} = \frac{2kQx}{x^2 - a^2}.$$

$-a < x < a$ では,

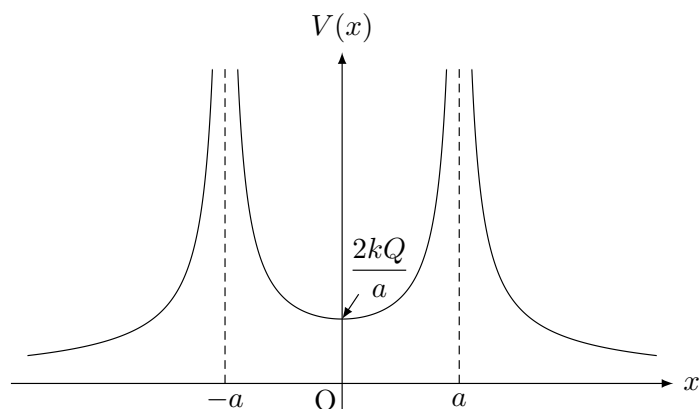
$$V(x) = \frac{kQ}{a-x} + \frac{kQ}{x+a} = -\frac{2kQa}{x^2 - a^2}.$$

$x < -a$ では,

$$V(x) = \frac{kQ}{a-x} + \frac{kQ}{-a-x} = -\frac{2kQx}{x^2 - a^2}.$$

よって,

$$V(x) = \begin{cases} \frac{2kQ|x|}{x^2 - a^2} & (|x| > a), \\ -\frac{2kQa}{x^2 - a^2} & (|x| < a). \end{cases}$$



問3 公式より,

$$F = \frac{2kQb}{\underbrace{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad (y \text{ 軸正方向}).$$

問4 系(物体と電場)全体の力学的エネルギー収支より,

$$\begin{aligned} W_{\text{ex}} &= \left(\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 \right) + \left\{ q \left(\frac{kQ}{4a/3} + \frac{kQ}{2a/3} \right) - q \left(\frac{2kQ}{\sqrt{a^2 + (3a/4)^2}} \right) \right\} \\ &= \frac{13}{20} \frac{kQq}{a}. \end{aligned}$$

問5 系(物体と電場)全体の力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{kQq}{a} \times 2 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{kQq}{4a/3} + \frac{kQq}{2a/3} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{kQq}{2ma}}.$$

問6 問2の図と同様に考えれば, $x = -\frac{a}{6}$ で電位が最小になり, この位置で速さは最大となる. 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{kQq}{5a/6} + \frac{kQq}{5a/6} = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{kQq}{2a/3} + \frac{kQq}{a} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{kQq}{5ma}}.$$

【補足1】問5

物体のみを系と見れば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 &= \int_{-\frac{a}{3}}^0 \left\{ -\frac{kQq}{(x-a)^2} + \frac{kQq}{(x+a)^2} \right\} dx = \left[\frac{kQq}{x-a} - \frac{kQq}{(x+a)} \right]_{-\frac{a}{3}}^0 = \frac{kQq}{4a} \\ \therefore v &= \sqrt{\frac{kQq}{2ma}}. \end{aligned}$$

【補足2】問6

位置 x における点電荷の運動エネルギーは,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \left(\frac{kQq}{2a/3} + \frac{kQq}{a/3} \right) - \left(\frac{kQq}{x+a} + \frac{kQq}{2a/3-x} \right)$$

であり, 2つ目の括弧の中身が最小であるときを考えればよい. これを $u(x)$ と記せば,

$$u(x) = \frac{kQq}{x+a} + \frac{kQq}{\frac{2a}{3}-x} = \frac{\frac{5}{3}a}{-\left(x+\frac{a}{6}\right)^2 + \frac{25}{36}a^2}$$

となり, $x = -\frac{a}{6}$ で最大値をとることがわかる.