問題編

16. 次の文中の $\boxed{\quad(1)\quad}$ 〜 $\boxed{\quad(8)\quad}$ に入れるのに最も適当なものを各問の文末の解答群から選び，その記号をマークしなさい．ただし，同じものを 2 回以上用いてもよい．

ガウスの法則によると，任意の閉曲面を貫く電気力線の密度は電場の強さに等しい．例えば，真空中で点電荷を中心とする半径 r の球面を仮定して考えれば，点電荷から出る電気力線の本数を球の表面積でわった値が球面における電場の強さとなる．そのため，電気量 $q\,(q>0)$ の点電荷から出る電気力線の本数 n は，真空中でのクーロンの法則の比例定数 k_0 を用いて，$n=\boxed{\quad(1)\quad}$ とかける．

図 1 のように，真空中に半径 r の金属球 M があり，$Q\,(Q>0)$ の電気量を持つように帯電させた．金属球 M の中心 O から距離 x だけ離れた点における電場の強さ E，電位 V について考える．ただし，電位 V は無限遠方を基準とする．

$x \geqq a$ のときは，金属球 M から出る電気力線は金属球 M の中心 O から放射状に広がると考えられるため，電場の強さ E は，$E=\boxed{\quad(2)\quad}$ とわかる．また，その点の電位 V は，$V=\boxed{\quad(3)\quad}$ である．

また，$x<a$ のときは，導体内部の電位は導体表面と等しく，導体内部に電気力線が生じないことから，$E=\boxed{\quad(4)\quad}$，$V=\boxed{\quad(5)\quad}$ となる．

図 2 にように，内半径 b，外半径 c の金属球殻 N があり，$-Q$ の電気量をもつように帯電させた．このとき，金属球殻 N が球殻内部の真空の空間につくる電場は，内部に発生する電気力線の様子を考えると 0 である．

次に，図 3 のように，真空中で，金属球殻 N で金属球 M を囲い，金属球殻 N の中心 O′ が金属球 M の中心 O に一致するように配置した．ただし，$a<b<c$ であり，金属球 M の電気量は Q，金属球殻 N の電気量は $-Q$ のままであるとする．このとき，中心 O から距離 $x\,(a<x<b)$ だけ離れた点における電場の強さ E' は，金属球 M，金属球殻 N がそれぞれ単独でつくる電場を足しあわせた合成電場の強さであるので，$E'=\boxed{\quad(6)\quad}$ である．また，金属球殻 N に対する金属球 M の電位 V_{NM} は，金属球殻 N の内部には電気力線は生じないので $V_{\mathrm{NM}}=\boxed{\quad(7)\quad}$ である．

金属球 M と金属球殻 N は，電位差 V_{NM} を与えれば Q の電気量が蓄えられるコンデンサーとみなすことができる．このコンデンサーの電気容量 C は，$C=\boxed{\quad(8)\quad}$ である．

〔2020 年関西大学後期日程，重問 105 対応〕

以下，追加問題．$\boxed{\quad(9)\quad}$ 〜 $\boxed{\quad(11)\quad}$ に適切な数式または数値を入れよ．ただし，数式は k_0，a，b，c，Q のうち必要なものを用いて答えよ．

適当な操作によって金属球 M の帯電量を Q から $2Q$ としたとき，金属球殻 N の内側表面には $\boxed{\quad(9)\quad}$ の電気量が，外側表面には $\boxed{\quad(10)\quad}$ の電気量が分布する．

また，金属球 M 単体でもコンデンサーとみなすことができる．この場合，金属球 M と無限遠の導体で対をなしてコンデンサーを形成し，このコンデンサーの電気容量 C は，$C=\boxed{\quad(11)\quad}$ となる．

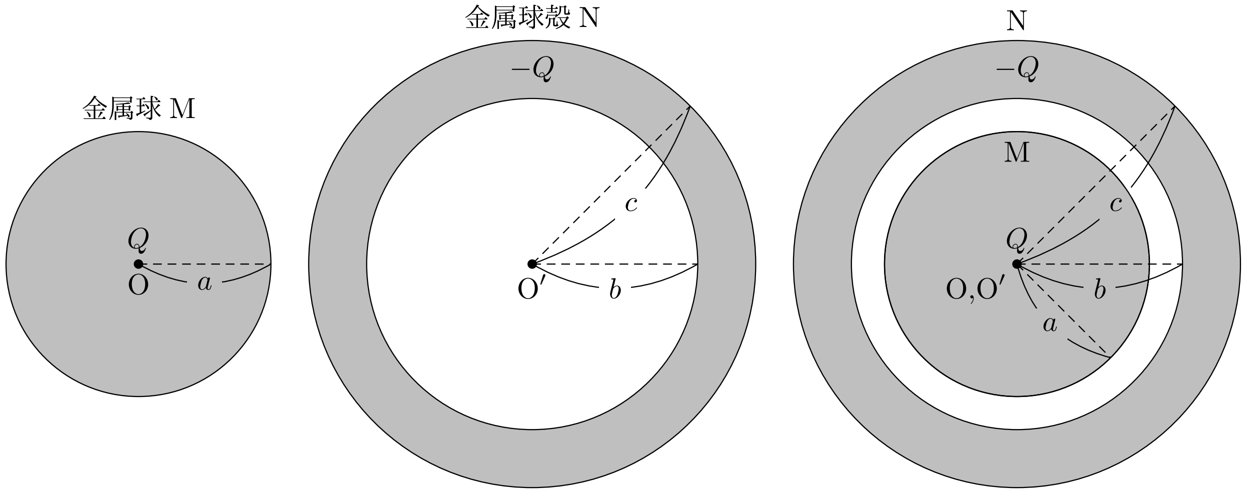


図 1　　図 2　　図 3

〔解答群〕

（ア）0	（イ）$k_0 q$	（ウ）$4\pi k_0 q$
（エ）$4\pi^2 k_0 q$	（オ）$\dfrac{k_0 Q}{x}$	（カ）$\dfrac{k_0 Q}{x^2}$
（キ）$\dfrac{k_0 Q}{a}$	（ク）$\dfrac{k_0 Q}{a^2}$	（ケ）$\dfrac{k_0 Q}{a-x}$
（コ）$\dfrac{k_0 Q}{(a-x)^2}$	（サ）$k_0 Q\left(\dfrac{1}{b-a}\right)$	（シ）$k_0 Q\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$
（ス）$k_0 Q\left(\dfrac{1}{b^2-a^2}\right)$	（セ）$k_0 Q\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)$	（ソ）$\dfrac{b-a}{k_0 ab}$
（タ）$\dfrac{ab}{k_0(a-b)}$	（チ）$\dfrac{k_0(b-a)}{ab}$	（ツ）$\dfrac{k_0 ab}{b-a}$
（テ）$\dfrac{b^2-a^2}{k_0 a^2 b^2}$	（ト）$\dfrac{a^2 b^2}{k_0(b^2-a^2)}$	（ナ）$\dfrac{k_0 a^2 b^2}{b^2-a^2}$

17. 真空中で図 1 のように，2 枚の薄い金属板 A，B を間隔 d〔m〕はなして配置した平行平板コンデンサーの炉油単に起電力 V〔m〕の電池とスイッチ S がつないである．d は金属板の大きさに対して十分に小さく，金属板の周辺部分の電場の不均一さは無視できるとする．金属板 A は接地してあり，その電位は 0 V に保たれている．図 1 のように金属板 A の位置を原点 O として金属板に垂直な方向に x 軸をとる．このコンデンサーの電気容量は C〔F〕である．次の問いに答えよ．

スイッチ S を閉じて十分に時間をおいた．

(1) このコンデンサーに蓄えられている静電エネルギーを答えよ．

(2) 金属板 A，B 間の座標 x における電位を図 2 に描け．

(3) 金属板 A，B 間の座標 x における電場の強さを図 3 に描け．

次にコンデンサーを完全に放電した．そして，スイッチ S を開いた状態で図 4 のように金属板 A，B の間に厚さ $\dfrac{d}{2}$〔m〕の金属板を A，B それぞれからの距離が等しくなるように挿入した．その後，スイッチ S を閉じて十分に時間をおいた．

(4) このコンデンサーに蓄えられている電気量を答えよ．

(5) 金属板 A，B 間の座標 x における電位を図 2 に描け．

(6) 金属板 A，B 間の座標 x における電場の強さを図 3 に描け．

再びコンデンサーを完全に放電した．そして，スイッチ S を開いた状態で図 5 のように金属板 A，B の間に比誘電率が 2 で，厚さが $\dfrac{d}{2}$〔m〕の誘電体を A，B それぞれからの距離が等しくなるように挿入した．その後，スイッチ S を閉じて十分に時間をおいた．

(7) このコンデンサーに蓄えられている電気量を答えよ．

(8) 金属板 A，B 間の座標 x における電位を図 2 に描け．

(9) 金属板 A，B 間の座標 x における電場の強さを図 3 に描け．

続いてスイッチ S を開いた後に，金属板 A，B 間の距離を保ったまま誘電体を取り除いた．

(10) 誘電体を取り除くために要した仕事を求めよ．

その後，図 6 のように金属板 A，B の間隔を $\dfrac{3}{2}d$〔m〕に広げて十分に時間をおいた．

(11) このときの金属板 A，B 間の電位差を答えよ．

〔2013 年大阪府立大学，重問 110 対応〕

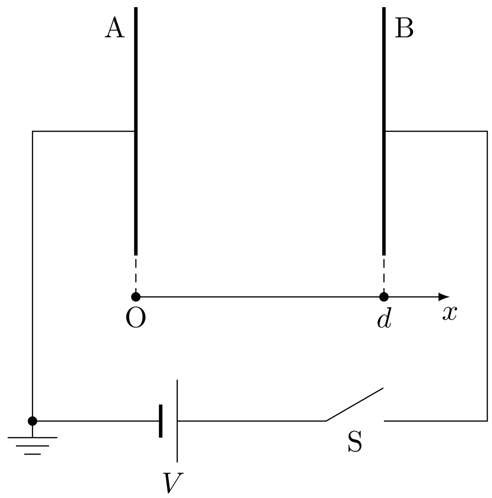


図 1

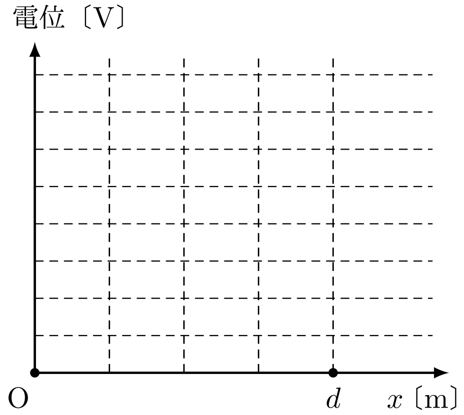


図 2

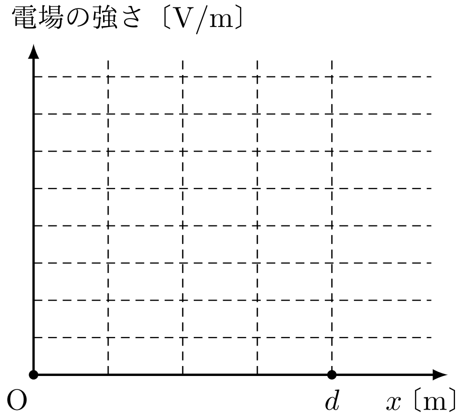


図 3

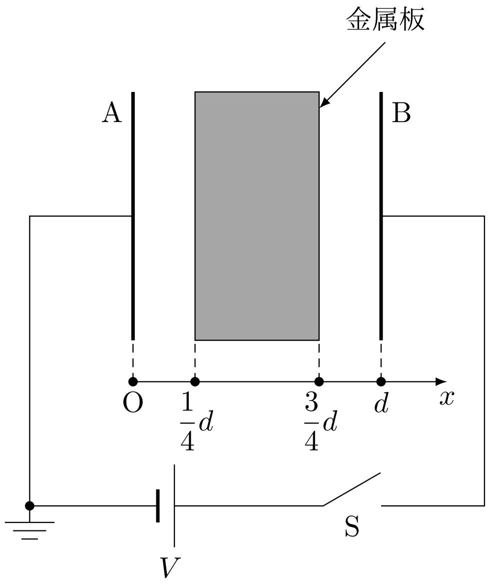

金属板
A
B
O
$\frac{1}{4}d$
$\frac{3}{4}d$
d
x
S
V

図 4

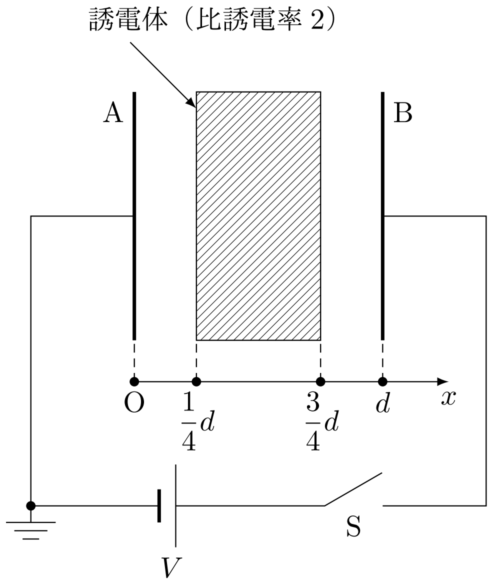

誘電体（比誘電率 2）
A
B
O
$\frac{1}{4}d$
$\frac{3}{4}d$
d
x
S
V

図 5

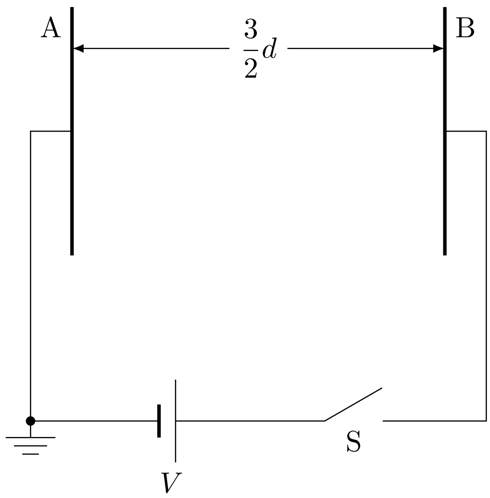

A
B
$\frac{3}{2}d$
S
V

図 6

■略解

16. 球殻コンデンサ，ガウスの法則

(a) ウ：$4\pi k_0 q$

(b) カ：$k_0\dfrac{Q}{x^2}$

(c) オ：$k_0\dfrac{Q}{x}$

(d) ア：0

(e) キ $k_0\dfrac{Q}{a}$

(f) カ：$k_0\dfrac{Q}{x^2}$

(g) シ：$k_0Q\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

(h) タ：$\dfrac{ab}{k_0(b-a)}$

(i) $-2Q$

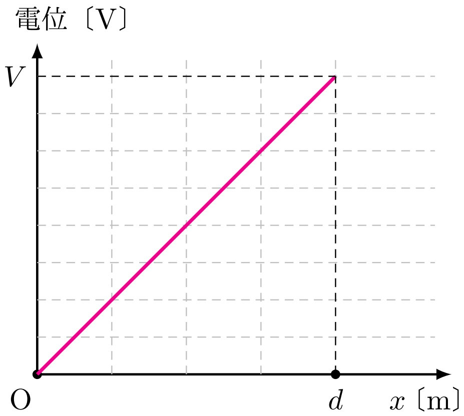
(j) Q

(k) $\dfrac{a}{k_0}$

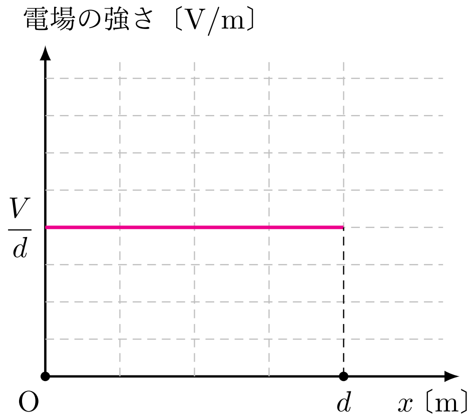
17. コンデンサの内部構造

(1) $\dfrac{1}{2}CV^2$

(2)

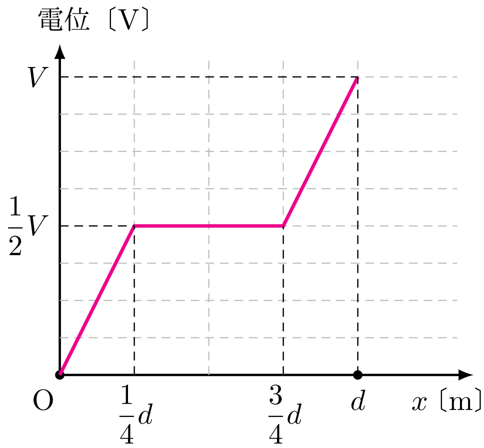


(3)

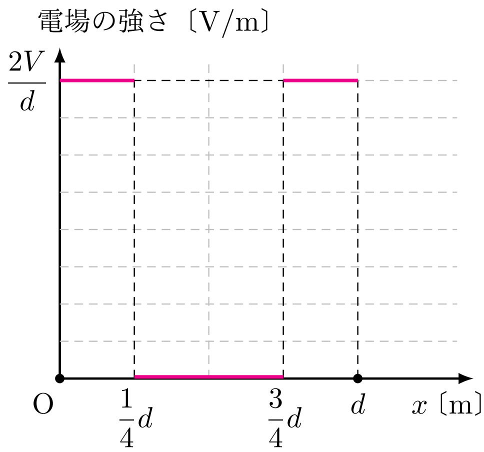


(4) $2CV$

(5)

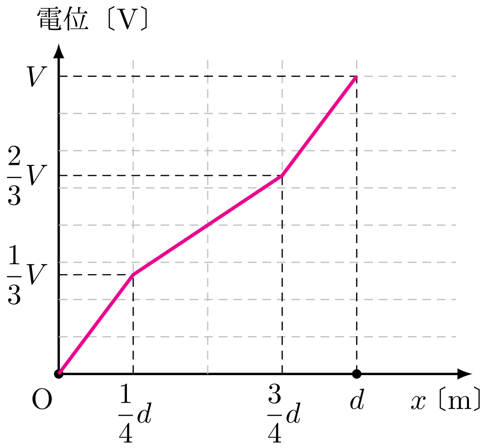


(6)

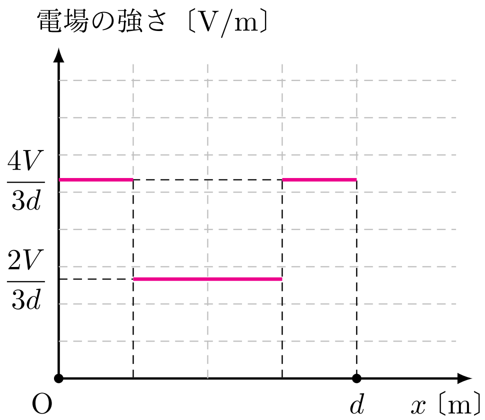


(7) $\dfrac{4}{3}CV$

(8)



(9)



(10) $\frac{2}{9}CV^2$

(11) $2V$

解答編

16. 球殻コンデンサ，ガウスの法則

【メモ】

・ガウスの法則は以下の通り．

$$E \times \left(\begin{array}{c} \text{電気力線を} \\ \text{貫く表面積} \end{array} \right) = \frac{\text{（内部電荷）}}{\varepsilon_0}$$

なお，クーロンの比例定数は $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ である．

・コンデンサの静電容量の決定は，形状に依らず以下の流れで行う．

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{ガウスの法則} & \rightarrow & E \text{ と } Q \text{ の対応} \\ \text{電場 } E \text{ と電位差 } V \text{ の対応} & \rightarrow & V \text{ と } E \text{ の対応} \end{array} \right. \xrightarrow{E\text{ を消去}} V \text{ と } Q \text{ の対応}: \frac{Q}{C} = V$$

・電位 ϕ の定義は以下の通り．

$$\phi = -\int_{\text{基準点}}^{r} E\,dr$$

ここで，基準点は電位 0 の位置を指す．

【解答】

点電荷を囲う領域として球を考える．ガウスの法則は，

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

である．ここで，電場 E は閉曲面を貫く電気力線の本数密度を表すので左辺は力線の総本数を表している．よって，求める n は，

$$n = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \underbrace{4\pi k_0 q}_{\text{(a)}} .$$

金属球 M の作る電場を考える．球の中心から伸びる向きに x 軸を定める．

まず，$x \leq a$ に生じる電場の大きさ E は，ガウス則より金属球 M を囲う閉曲面を考えて，

$$E \cdot 4\pi x^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi k_0 Q \qquad \therefore E = \underbrace{k_0 \frac{Q}{x^2}}_{\text{(b)}} .$$

また，M の外側に生じている電位は定義より，

$$V = -\int_{\infty}^{x} E\,dx = -\int_{\infty}^{x} k_0 \frac{Q}{x^2} = \underbrace{k_0 \frac{Q}{x}}_{\text{(c)}} .$$

続いて球内部を考える．導体の帯電は表面にのみ生じるので，内部の電荷は 0 である．よって，$0 \leq x < a$ に生じる電場の大きさは，

$$E \cdot 4\pi x^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E = \underbrace{0}_{\text{(d)}}$$

であり，電位は定義より，

$$V = -\int_{\infty}^{x} E\,dx = -\left(\int_{\infty}^{a} k_0\frac{Q}{x^2}\,dx + \int_{a}^{x} 0\,dx\right) = \underbrace{k_0\frac{Q}{a}}_{\text{(e)}}\ .$$

金属球 M と金属球殻 N の間の電場を考える．

$a \leq x < b$ に生じる電場の大きさ E' は，ガウス則より金属球 M を囲う閉曲面を考えて，

$$E'\cdot 4\pi x^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi k_0 Q \qquad \therefore E' = \underbrace{k_0\frac{Q}{x^2}}_{\text{(f)}}\ .$$

よって，N に対する M の電位は，

$$V_{\mathrm{NM}} = -\int_{b}^{a} E'\,dx = -\int_{b}^{a} k_0\frac{Q}{x^2} = \underbrace{k_0 Q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}_{\text{(g)}}\ .$$

このとき，N（の内側表面）と M（の球面）をコンデンサとみなすとその容量は，

$$V_{\mathrm{NM}} = k_0 Q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \qquad \therefore C = \frac{Q}{V_{\mathrm{NM}}} = \underbrace{\frac{ab}{k_0(b-a)}}\ .$$

金属球 M の帯電量を $2Q$ にしたときの電荷分布を考える．金属球 M の表面に分布している電荷を q_1，金属球殻 N の内側表面に帯電している電荷を q_2，外側表面に帯電している電荷を q_3 とする[*1]．電荷保存則より，

$$\begin{cases} q_1 = 2Q\,, \\ q_2 + q_3 = -Q \end{cases}$$

が成り立つ．また，ガウスの法則より各区間に生じる電場の大きさは，

$$E\cdot 4\pi x^2 = \frac{Q_{\text{内部}}}{\varepsilon_0} = 4\pi k_0 Q_{\text{内部}} \qquad \therefore E = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < a) \\ k_0\dfrac{q_1}{x^2} & (a \leq x < b) \\ k_0\dfrac{q_1+q_2}{x^2} & (b \leq x < c) \\ k_0\dfrac{q_1+q_2+q_3}{x^2} & (b \leq x < c) \end{cases}$$

となる．ここで，静電誘導により導体内部の電場が 0 になることから，$b \leq x < c$ では $E = 0$ となるので，

$$q_1 + q_2 = 0$$

が成り立つ．以上，電荷保存則と静電誘導による電場 0 の式から電荷分布は

$$\begin{cases} q_1 = 2Q\,, \\ q_2 + q_3 = -Q\,, \\ q_1 + q_2 = 0 \end{cases} \qquad \therefore q_1 = 2Q\,,\quad q_2 = \underbrace{-2Q}_{\text{(i)}}\,,\quad q_3 = \underbrace{Q}_{\text{(j)}}\ .$$

[*1] 後述の電荷保存則から $q_1 = 2Q$ は明らかだが，明らかでない人のためにこのように置いた．

続いて金属球 M の静電容量について．金属球 M 単体でもコンデンサと見做せるのは，無限遠と対となってコンデンサを形成するからである．これは金属球殻の内径 b を $b \to \infty$ とかんげる場合と等価であるから (h) の結果より，

$$C = \lim_{b\to\infty} \frac{ab}{k_0(b-a)} = \frac{a}{k_0}\,.$$

17. コンデンサの内部構造

【メモ】

・ガウスの法則は以下の通り．

$$E \times \left(\begin{array}{c} \text{電気力線を} \\ \text{貫く表面積} \end{array} \right) = \frac{\text{（内部電荷）}}{\varepsilon_0}$$

特に，無限に広い一様に帯電した板の作る電場の大きさは，$E = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$ となる．

・誘電率 ε の誘電体内部の電場 E' は外部の電場 E に対して，比誘電率 $\varepsilon_{\mathrm{r}} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ を用いて，

$$E' = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}} E$$

となる．

・平行一様電場の強さ E と間隔 d にある 2 点間の電位差 V は以下の関係を満たす．

$$V = Ed\,.$$

・解説は一貫して同じ解法（コンデンサの内部構造にだけ注目して考える（ミクロに考える）解法）を示した．サクッと解く解法については【補足１】へ載せた．

【解答】

真空の誘電率を ε_0，極板の面積を S とすると，

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \qquad \therefore \varepsilon_0 S = Cd$$

となる．解答ではこの文字消去を利用する．

(1) 帯電量 Q はキルヒホッフ則より，

$$V - \frac{Q}{C} = 0 \qquad Q = CV$$

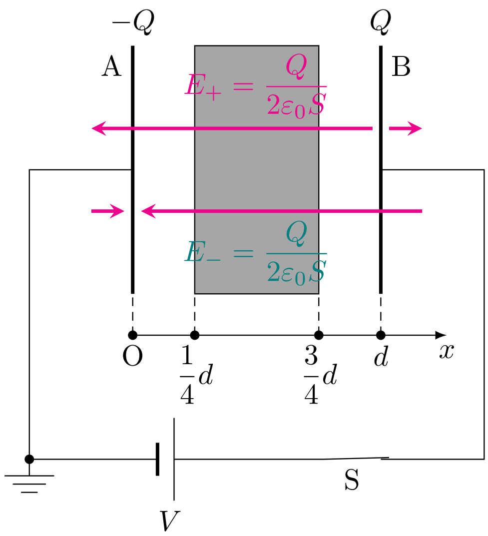
である．よって，コンデンサの蓄える静電エネルギーは，

$$U = \frac{1}{2}\frac{(CV)^2}{C} = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}CV^2}\,.$$

(2) 各極板の作る電場の大きさ $E_\pm$ はガウス則から

$$E_\pm \cdot 2S = \frac{|\pm Q|}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E_\pm = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{CV}{2Cd} = \frac{V}{2d}$$

と等しく，正電荷からは湧き出すように，負電荷には吸い込むように電場が生じることを考慮すると電場の様子は以下の図のようになる．



よって，極板間に生じている電場の x 成分 E_x は，

$$E_x = -E_+ - E_- = -\frac{V}{d}$$

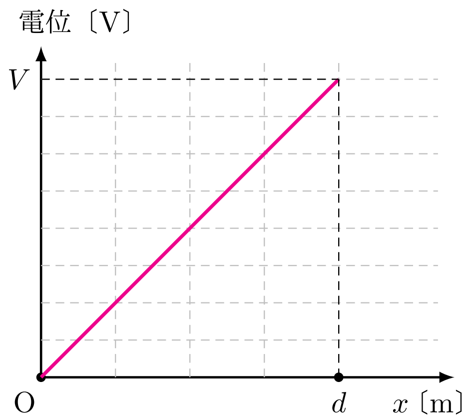
であり，極板間に生じている電場の大きさは

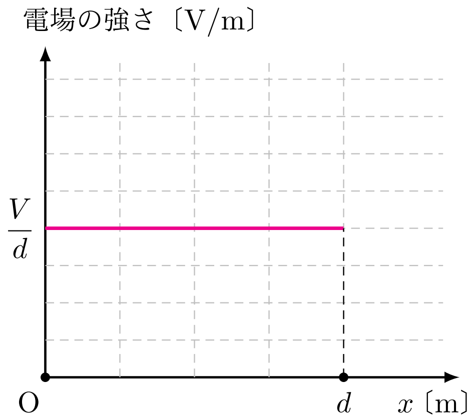
$$E = |E_x| = \frac{V}{d}$$

となる．また，A が接地されて常に電位 0 であることから，位置 x における電位 ϕ は，平行一様電場の公式より，

$$\phi = Ex = \frac{V}{d}x$$

となる．以上をグラフに示せばよい．



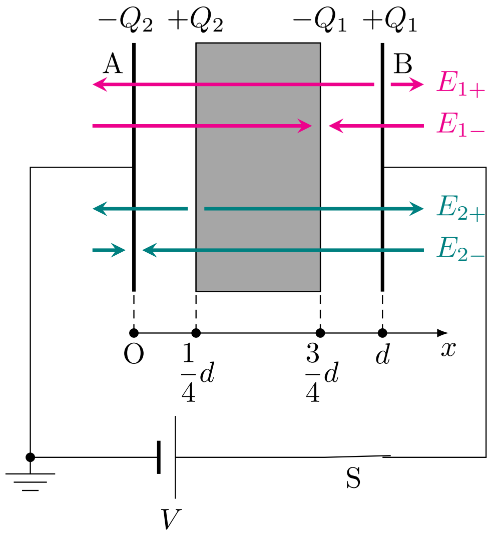


(3)　前問に示した．

(4) 極板と，極板と向かい合う金属板表面で対をなしコンデンサを形成する．そのため，極板 B の帯電量を Q_1，極板 A の帯電量を $-Q_2$ とすると，金属板の右側表面の帯電量は $-Q_1$，左側表面の帯電量は Q_2 となる[*2]ガウス則より，$\pm Q_1$，$\pm Q_2$ それぞれの作る電場の大きさ $E_{1\pm}$，$E_{2\pm}$ は，

$$E_{1,2\pm}\cdot 2S = \frac{|\pm Q_{1,2}|}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E_{1,2\pm} = \frac{Q_{1,2}}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q_{1,2}}{2Cd}$$

と表せ，電場の様子は以下のようになる．



よって，電場の x 成分 E_x は $Q_{1,2}$ を用いて[*3]，

$$E_x = \begin{cases} -E_{1+}+E_{1-}-E_{2+}-E_{2-} & \left(0\le x\le \dfrac{d}{4}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{d}{4}\le x\le \dfrac{3}{4}d\right) \\ -E_{1+}-E_{1-}+E_{2+}-E_{2-} & \left(\dfrac{3}{4}d\le x\le d\right) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{Q_2}{\varepsilon_0 S} & \left(0\le x\le \dfrac{d}{4}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{d}{4}\le x\le \dfrac{3}{4}d\right) \\ -\dfrac{Q_1}{\varepsilon_0 S} & \left(\dfrac{3}{4}d\le x\le d\right) \end{cases}$$

[*2] このペアでコンデンサを形成するという事実をありのまま受け入れられない人は，極板 A の帯電量を q_1，金属板左側表面の帯電量を q_2，右側表面の帯電量を q_3，極板 B の帯電量を q_4 と置き，ガウス則によって各極板の作る電場を計算し，導体内部の電場が 0 であること，金属板の電荷保存則（全体として帯電していないので $q_2+q_3=0$ が成立），極板 AB 間の電位差が V であることを利用して電荷分布を決定してみるとよい．すると，$q_2=-q_1=-2CV$，$q_4=-q_3=2CV$ が求まる．

[*3] 静電誘導により，導体内部の電場が 0 であることを利用．また，コンデンサ内部の電場が $E=\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}\cdot 2=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$ となるということは覚えておきたい．この事実を暗記していれば，このような懇切丁寧な計算をせずともキルヒホッフ則が瞬時に立式できる．

以上から，$\varepsilon_0 S = Cd$ を代入し，キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} V - \dfrac{Q_1}{Cd}\cdot\dfrac{d}{4} - 0\cdot\dfrac{d}{2} - \dfrac{Q_2}{Cd}\cdot\dfrac{d}{4} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = 0 \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = Q_2 = \underline{2CV}\,.$$

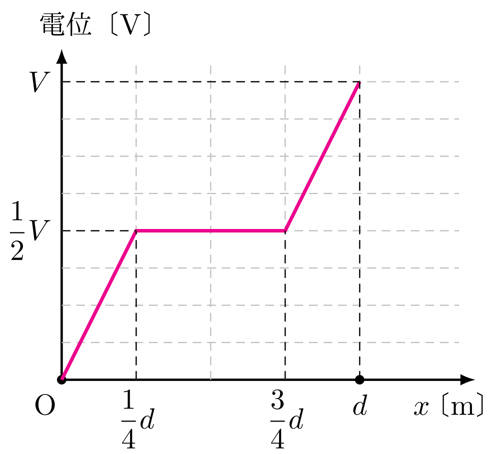
(5)　各区間の電場の強さは $Q_1 = Q_2 = 2CV$ を代入して，

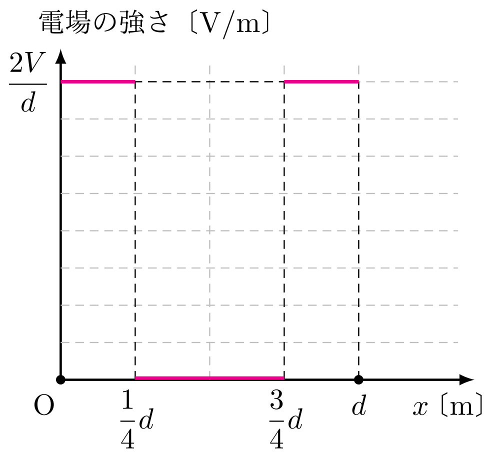
$$E = |E_x| = \begin{cases} \dfrac{2V}{d} & \left(0 \leq x \leq \dfrac{d}{4},\ \dfrac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \\ 0 & \left(\dfrac{d}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{4}d\right) \end{cases}$$

となる．また，位置 x における電位 ϕ は，平行一様電場の公式から，

$$\phi = E \times (\text{距離}) = \begin{cases} \dfrac{2V}{d}x & \left(0 \leq x \leq \dfrac{d}{4}\right) \\ \dfrac{V}{2} & \left(\dfrac{d}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{4}d\right) \\ \dfrac{2V}{d}\left(x - \dfrac{3}{4}d\right) + \dfrac{V}{2} & \left(\dfrac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \end{cases}$$

となる．以上をグラフに示せばよい．





(6)　前問に示した．

(7)　導体は極板 AB しかないため，AB 間でコンデンサを形成する．極板 B の帯電量を Q とおくと，極板 A の帯電量は自ずと $-Q$ となる．ガウス則より，各極板に帯電している $\pm Q$ の電荷が作る電場の大きさ $E_{0,\pm}$ は，

$$E_{0,\pm}\cdot 2S = \frac{|\pm Q|}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E_{0,\pm} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{2Cd}$$

と表せ，極板間の真空中に生じる電場の大きさ E_0 は x 軸負方向に

$$E_0 = E_{0,+} + E_{0,-} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\cdot 2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{Cd}$$

となる．ここで誘電体内部の電場 E' は，分極によって生じた分極電荷の作る電場によって真空中の電場の値 E_0 よりも小さくなる．その値は比誘電率を ε_{r} とすれば，

$$E' = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon_{\mathrm{r}}Cd}$$

となる．以上を踏まえれば，電場の x 成分 E_x は，

$$E_x = \begin{cases} -\dfrac{Q}{Cd} & \left(0 \leq x \leq \dfrac{d}{4},\ \dfrac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \\ -\dfrac{Q}{\varepsilon_{\mathrm{r}}Cd} & \left(\dfrac{d}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{4}d\right) \end{cases}$$

となり，電場の大きさ E は，

$$E = |E_x| = \begin{cases} \dfrac{Q}{Cd} & \left(0 \leq x \leq \dfrac{d}{4},\ \dfrac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_{\mathrm{r}}Cd} & \left(\dfrac{d}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{4}d\right) \end{cases}$$

となる．以上から，キルヒホッフ則より，

$$V - \frac{Q}{Cd}\cdot\frac{d}{4} - \frac{Q}{\varepsilon_{\mathrm{r}}Cd}\cdot\frac{d}{2} - \frac{Q}{Cd}\cdot\frac{d}{4} = 0 \qquad \therefore Q = \frac{2\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}CV$$

と求まる．$\varepsilon_{\mathrm{r}} = 2$ を代入して，

$$Q = \frac{2\cdot 2}{2+1}CV = \underline{\frac{4}{3}CV}\,.$$

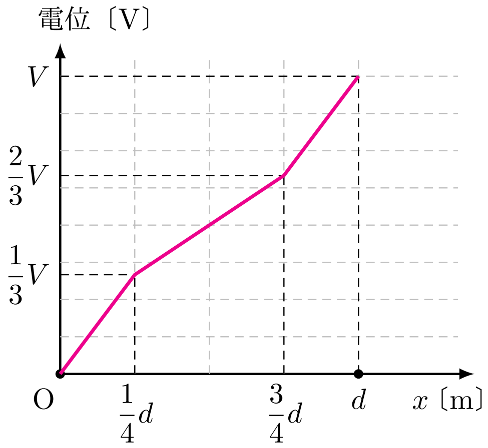
(8)　各区間の電場の強さは $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 2$，$Q = \dfrac{4}{3}CV$ を代入して，

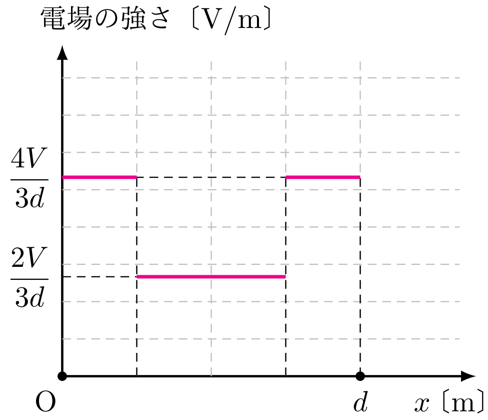
$$E = \begin{cases} \dfrac{4V}{3d} & \left(0 \leq x \leq \dfrac{d}{4},\ \dfrac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \\ \dfrac{2V}{3d} & \left(\dfrac{d}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{4}d\right) \end{cases}$$

となる．また，位置 x における電位 ϕ は，平行一様電場の公式から，

$$\phi = E\times(\text{距離}) = \begin{cases} \dfrac{4V}{3d}x & \left(0 \leq x \leq \dfrac{d}{4}\right) \\ \dfrac{2V}{3d}\left(x - \dfrac{1}{4}d\right) + \dfrac{1}{3}V & \left(\dfrac{d}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{4}d\right) \\ \dfrac{4V}{3d}\left(x - \dfrac{3}{4}d\right) + \dfrac{2}{3}V & \left(\dfrac{3}{4}d \leq x \leq d\right) \end{cases}$$

となる．以上をグラフに示せばよい．





(9)　前問に示した．

(10)　誘電体挿入時の系の静電容量 C^* は，コンデンサにかかる電位差 V と電荷 Q から，

$$C^* = \frac{Q}{V} = \frac{2\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}C = \frac{4}{3}C$$

である．誘電体を取り除く前後ではスイッチ S を開いているため，電荷保存則より電荷は $Q = \frac{4}{3}CV$ で一定に保たれる．誘電体を取り除いた後の静電容量は C であるから，系のエネルギー収支より，

$$W_{\mathrm{ex}} = \mathit{\Delta} U = \frac{1}{2}\frac{(4CV/3)^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{(4CV/3)^2}{4C/3} = \underline{\frac{2}{9}CV^2}\,.$$

(11)　電荷保存則より電荷は $Q = \frac{4}{3}CV$ で一定に保たれる．よって，極板 AB 間に生じる電場はガウス則より，

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\cdot 2 = \frac{\frac{4}{3}CV}{Cd} = \frac{4}{3}\frac{V}{d}$$

となる．よって，AB 間の電位差は，

$$V_{\mathrm{AB}} = E\cdot\frac{3}{2}d = \underline{2V}\,.$$

【補足１】マクロに考え楽に解く

コンデンサの内部構造に注目（ミクロに考える）するのではなく，電気回路の素子として扱って問題を解く（マクロに考える）ことで「理解は置いといて一旦楽に解く」ということができる．そこに理論的な理解はないのでそこだけは注意したい．この解法は時短になるので個人的にもお勧めしたいが，それは今ではないので補足へ回した．突然現れる謎の仮定はそういうものだとして受け入れよう[*4]．

(2)　全て公式で処理する．間隔 d，電位差 V より，平行一様電場の公式から電場の大きさ E は，

$$E = \frac{V}{d}$$

となる．よって，A が接地されて常に電位 0 であることから，位置 x における電位 ϕ は，平行一様電場の公式より，

$$\phi = Ex = \frac{V}{d}x$$

となる．これを図示すればよい．

(3)　前問の $E = \dfrac{V}{d}$ を図示すればよい．

(4)　電気回路としてマクロに考える．極板 B と金属板右側表面（コンデンサ C_1），極板 A と金属板左側表面（コンデンサ C_2）はそれぞれコンデンサを形成する（以下の図のようになる）．それぞれの容量 C' は面積 S，間隔 $\dfrac{d}{4}$ ゆえ等しい値を取り，

$$C' = \varepsilon_0 \frac{S}{d/4} = 4C$$

となる．極板 B の電荷を Q_1，金属板左側表面の電荷を Q_2 とすればキルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} V - \dfrac{Q_1}{4C} - \dfrac{Q_2}{4C} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = 0 \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = Q_2 = \underline{2CV}\,.$$

(5)　電気回路としてマクロに考える．C_1（B と金属板），C_2（A と金属板）の電位差 V_1，V_2 はそれぞれ，

$$V_1 = \frac{Q_1}{4C} = \frac{V}{2}\,, \qquad V_2 = \frac{Q_2}{4C} = \frac{V}{2}$$

である．導体内部の電場が 0 であることから導体で電位降下は生じない（電位一定）ゆえ[*5]．A の電位が 0，B の電位が V であることを踏まえて図示すれば上で示した解答のようになる．

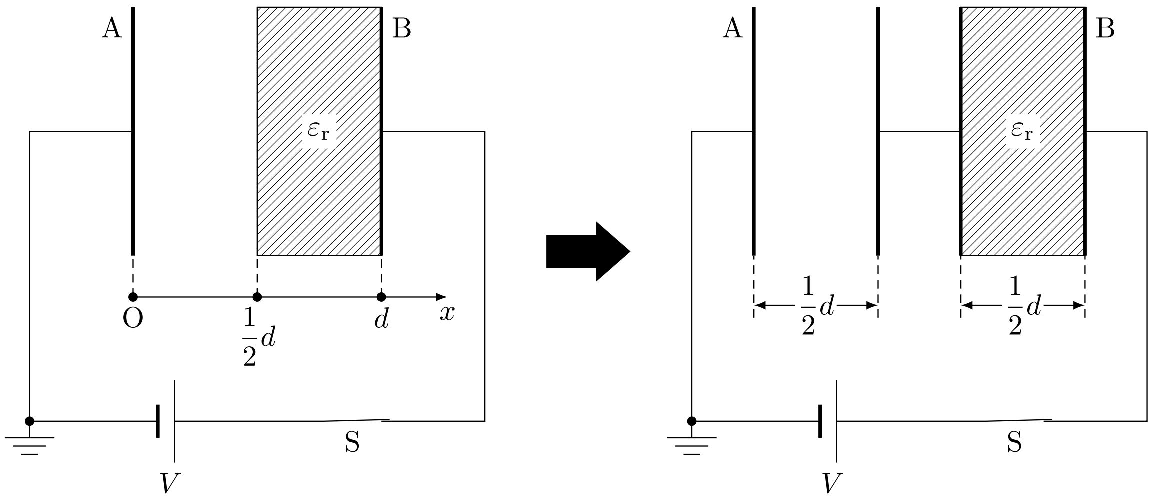
[*4] 証明は容易いがここでは証明は省略する．
[*5] 定常な導体上は等電位であると覚えてもよい．

(6)　平行一様電場の公式より，間隔 $\dfrac{d}{4}$，電位差 $\dfrac{V}{2}$ の間に生じる電場の大きさは，

$$E = \frac{V/2}{d/4} = \frac{2V}{d}$$

となる．導体内部の電場が 0 であることも踏まえれば上で示した解答のようになる．

(7)　誘電体を挿入したコンデンサの容量を求める．問題図 5 の誘電体を挿入したコンデンサの容量 C'' は以下の図のように誘電体を片方にギュッと寄せ，2 つに分けたコンデンサを直列合成した容量と等しいことが知られている[*6*7]．



したがって，直列合成の公式より，

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\dfrac{S}{d/2}} + \frac{1}{\varepsilon_0\dfrac{S}{d/2}} \qquad \therefore C'' = \frac{2\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{2\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}C = \frac{4}{3}C$$

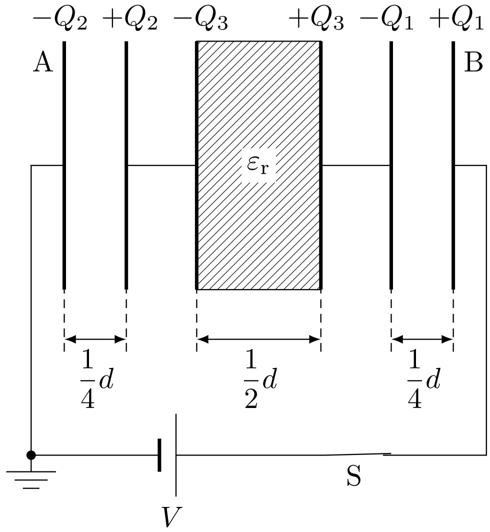
となる．よって，キルヒホッフ則より，

$$V - \frac{Q}{C''} = 0 \qquad \therefore Q = C''V = \frac{4}{3}CV\,.$$

なお，誘電体が挿入されたコンデンサは，次のように間隔 $\dfrac{d}{4}$ で内部が真空のコンデンサ 2 つ（B 側をコンデンサ $\mathrm{C_1}$，A 側をコンデンサ $\mathrm{C_2}$ と呼ぶ）と，間隔 $\dfrac{d}{2}$ で内部が比誘電率 2 の誘電体がみっちり詰まっているコンデンサ（$\mathrm{C_3}$ と呼ぶ）からなる回路と等価であることも知られている．

[*6] 内部に挿入されている物体が全体として帯電しているとき直列合成の公式は使えないことに要注意．いつでも使えるわけではないので暗記して使うのは注意せよ．

[*7] 次の設問のように 3 分割してもよい．



$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{C_3}$ の容量 C_1，C_2，C_3 はそれぞれ公式より，

$$C_1 = C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d/4} = 4C\,, \qquad C_3 = \varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 \frac{S}{d/2} = 4C$$

であり，各コンデンサの電荷をそれぞれ Q_1，Q_2，Q_3 と置けば，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} V - \dfrac{Q_1}{4C} - \dfrac{Q_3}{4C} - \dfrac{Q_2}{4C} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_3 = 0\,, \\ -Q_3 + Q_2 = 0 \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = Q_2 = Q_3 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{4}{3}CV}\,.$$

(8)　前問校舎の 3 分割した方で考える．各コンデンサ $\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{C_3}$ の電位差をそれぞれ V_1，V_2，V_3 とすれば，

$$V_1 = \frac{Q_1}{4C} = \frac{V}{3}\,, \qquad V_2 = \frac{Q_2}{4C} = \frac{V}{3}\,, \qquad V_3 = \frac{Q_3}{4C} = \frac{V}{3}$$

となる．A の電位が 0，B の電位が V であることを踏まえて図示すれば上で示した解答のようになる．

(9)　平行一様電場の公式より，間隔 $\dfrac{d}{4}$，電位差 $\dfrac{V}{2}$ の間に生じる電場の大きさは，

$$E = \frac{V/3}{d/4} = \frac{4}{3}\frac{V}{d}$$

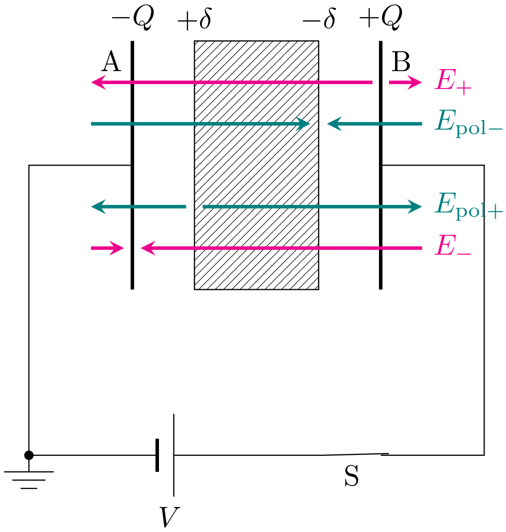
となる．また，誘電体内部に生じている電場もまた平行一様電場の公式より，

$$E = \frac{V/3}{d/2} = \frac{2}{3}\frac{V}{d}$$

となる．以上を合わせれば上で示した解答のようになる．

【補足２】分極電荷を求める

極板 B，A に帯電した電荷 $\pm Q$ によって生じた電場が誘電体にかかることで，誘電体内部では誘電分極（分極）が生じる．この分極によって生じた分極電荷を δ とすると，誘電体は以下の図のように帯電し，生じる電場は以下のようになる．



極板 B，A に帯電している $\pm Q$ の電荷が作る電場の大きさ $E_\pm$ はガウス則より，

$$E_\pm \cdot 2S = \frac{|\pm Q|}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E_\pm = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

と求まる．したがって，誘電体にかかっている電場 E は左向きを正として，

$$E = E_+ + E_- = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

である．同様にして，分極電荷 $\pm\delta$ が作っている分極電場 $E_{\mathrm{pol}\pm}$ もガウス則より，

$$E_{\mathrm{pol}\pm} \cdot 2S = \frac{|\pm \delta|}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E_{\mathrm{pol}\pm} = \frac{\delta}{2\varepsilon_0 S}$$

と求まる．なお，右向きである．誘電体内部の電場 E' は外部電場と分極電場の合成電場であるから，

$$E' = E - E_{\mathrm{pol}+} - E_{\mathrm{pol}-} = \frac{Q-\delta}{\varepsilon_0 S}$$

と求めることができる．ここで，誘電体内部で観測される電場 E' は，比誘電率 ε_{r} と外部電場 E を用いて

$$E' = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}E$$

と書けるから，この 2 式を比較することで，

$$\frac{Q-\delta}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\frac{Q}{\varepsilon_0 S} \qquad \therefore \delta = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right)Q$$

と分極電荷を求めることができる．今の場合，$\varepsilon_\mathrm{r}=2$，$Q=\dfrac{4}{3}CV$ より，

$$\delta=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\right)Q=\frac{2}{3}CV$$

となる．実際にコンデンサ内部に生じている電場を電気力線で示した図は以下の右図のようになっている．ただし $E_\mathrm{pol}=E_\mathrm{pol+}+E_\mathrm{pol-}=\dfrac{\delta}{\varepsilon_0 S}$ である．