問題編

18. 図のように，電圧 V_0〔V〕，$2V_0$〔V〕の電池 E_1，E_2，電気容量がいずれも C〔F〕のコンデンサー C_1，C_2，抵抗値 R〔Ω〕の抵抗 R，スイッチ S_1，S_2 が接続されている．最初，スイッチ S_1，S_2 は開いていて，C_1，C_2 には電荷は蓄えられていないものとする．また，電池の内部抵抗は無視できるものとする．次の問いに答えよ．

問 1　まず，S_1 を閉じた．その直後，R に流れる電流を求めよ．

問 2　S_1 を閉じてから十分に時間が経過した．この間に電池 E_1 がした仕事を求めよ．

問 3　次に，S_1 を開き S_2 を閉じた．十分に時間が経過した後の C_2 の両端の電位差を求めよ．また，この間に電池 E_2 がした仕事を求めよ．

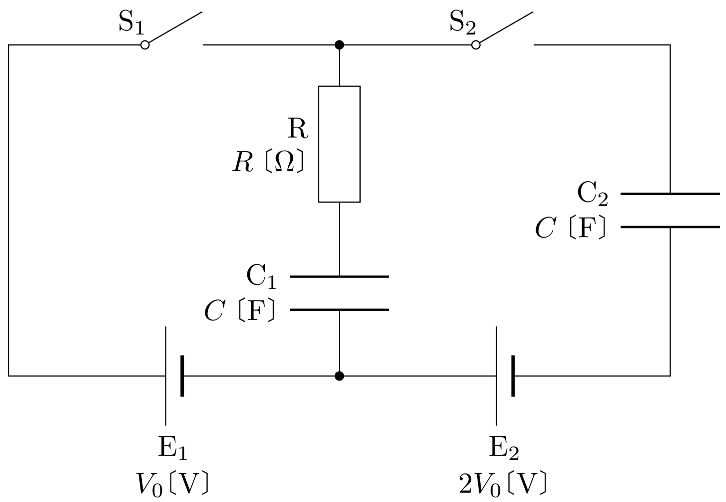
問 4　続いて，S_2 を開き，S_1 を閉じた．十分に時間が経過した後，S_1 を開き S_2 を閉じた．さらに十分時間が経過した後の C_2 の両端の電位差を求めよ．

問 5　この後，問 4 の操作を繰り返すと，C_2 の両端の電位差はある有限な値に近づく．その値を求めよ．

〔2017 年大阪市立大学後期日程，重問 112 対応〕

以下，追加問題．

問 6　1 回目に S_1 を閉じた瞬間を $t = 0$ とする．R に流れる電流 I を時刻 t の関数として表せ．



19. 図において，R_1，R_2，R_3 はそれぞれ抵抗値が $3.0\,\Omega$，$2.0\,\Omega$，$1.0\,\Omega$ の抵抗，C_1，C_2 は静電容量がともに 1.0×10^{-6} F のコンデンサー，E は起電力が 1.2 V の直流電源である．はじめ，スイッチ S_1 は開いており，スイッチ S_2 は閉じている．導線の抵抗，直流電源の内部抵抗は無視できるとして，以下の問いに答えよ．

（問 1）　S_1 を閉じた瞬間に直流電源 E に流れる電流 I_E〔A〕を求めよ．

（問 2）　S_1 を閉じて十分に時間が経過した後の I_E を求めよ．

（問 3）　このとき，C_1，C_2 に蓄えられるそれぞれの電気量 Q_1〔C〕，Q_2〔C〕を求めよ．

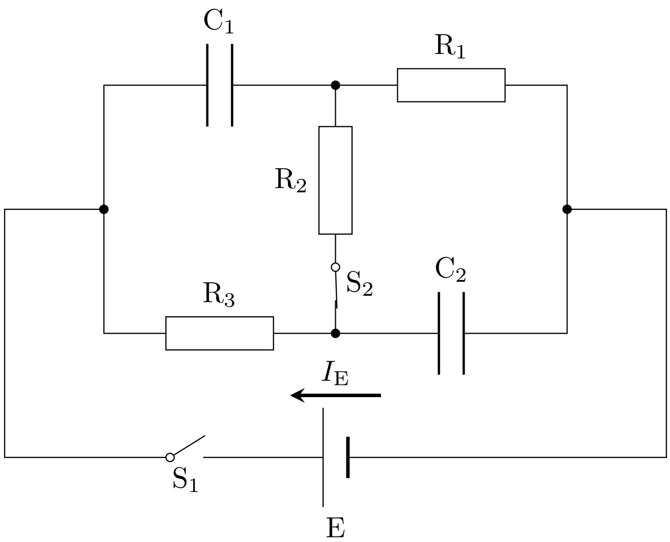
（問 4）　S_1 を閉じた瞬間から，十分時間が経過するまで I_E の時間変化を表すグラフを解答用紙に描け．

次に，S_1 と S_2 を同時に開く．

（問 5）　十分に時間が経過した後，C_1，C_2 に蓄えられるそれぞれの電気量 Q'_1〔C〕，Q'_2〔C〕を求めよ．

（問 6）　抵抗で失われた全ジュール熱 J〔J〕を求めよ．

〔2022 年熊本大学，重問 119 対応〕



■略解

18. 電気回路

問 1 $\dfrac{V_0}{R}$

問 2 CV_0^2

問 3 電位差：$\dfrac{3}{2}V_0$　仕事：$3CV_0{}^2$

問 4 $\dfrac{9}{4}V_0$

問 5 $3V_0$

問 6 $I = \dfrac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

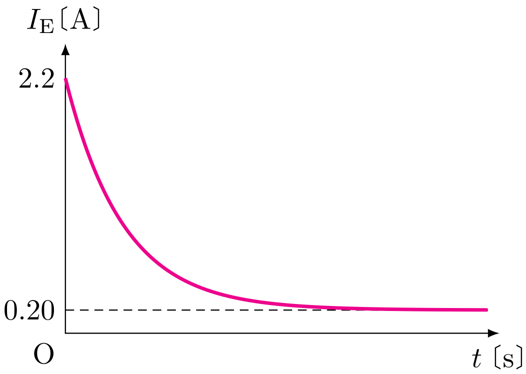
19. 電気回路

問 1 2.2 A

問 2 0.20 A

問 3 $Q_1 = 6.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}$，$Q_2 = 1.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$

問 4



問 5 $Q_1' = 8.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}$，$Q_2' = 8.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}$

問 6 $4.0 \times 10^{-8}\,\mathrm{J}$

解答編

19. 電気回路

【メモ】

・電気回路の状態決定は以下の 3 種類の式で一意に決まる．

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ第 2 法則} \\ \text{電荷保存則（キルヒホッフ第 1 法則も含む）} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

性質を暗記しない素子（電球やダイオードなど）については，問題文でその性質が与えられる．与えられ方は①グラフ，②式の 2 通りである．

・無限回繰り返した後の操作では，コンデンサの電荷の移動が起こらなくなる．すなわち「異なる回路の状態で同一の電荷を蓄える」と考える．

【解答】

$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$ それぞれの上側に蓄えられる電荷を Q_1，Q_2，R に上から下向きに流れる電流を I とする．

問 1　閉じた直後 $Q_1 = 0$ である[*1]．キルヒホッフ則より，

$$V_0 - RI - \frac{0}{C} = 0 \qquad \therefore I = \underset{\sim\sim}{\frac{V_0}{R}}\,.$$

問 2　十分時間経過後，コンデンサに流れ込む電流 I は 0 となる．よって，キルヒホッフ則より，

$$V_0 - R\cdot 0 - \frac{Q_1}{C} = 0 \qquad \therefore Q_1 = \underset{\sim\sim}{CV_0}\,.$$

また，この間 $\mathrm{E_1}$ を通過した電荷は $\mathrm{C_1}$ 上側の電荷 Q_1 の変化量を見ればよい．よって，$\mathrm{E_1}$ のした仕事は，

$$W_1 = \mathit{\Delta} Q_1 V_0 = (CV_0 - 0)V_0 = \underset{\sim\sim}{C{V_0}^2}\,.$$

問 3　十分時間経過後，コンデンサに流れ込む電流 I は 0 となる．キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} 2V_0 + \dfrac{Q_1}{C} + R\cdot 0 - \dfrac{Q_2}{C} = 0\,, \\ Q_1 + Q_2 = CV_0 + 0 \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = -\frac{1}{2}CV_0\,,\ \ Q_2 = \frac{3}{2}CV_0\,.$$

よって，$\mathrm{C_2}$ の電位差は

$$V_2 = \frac{Q_2}{C} = \underset{\sim\sim}{\frac{3}{2}V_0}\,.$$

*1 実際には閉じた瞬間に充電が完了するが，入試問題という文脈に従う．

また，この間 E_1 を通過した電荷は C_1 下側の電荷 $-Q_1$ の変化量を見ればよい．よって，E_2 のした仕事は，

$$W_2 = \varDelta(-Q_1)\cdot 2V_0 = -\left(-\frac{1}{2}CV_0 - CV_0\right)\cdot 2V_0 = \underset{\sim\sim\sim}{3C{V_0}^2}\,.$$

問 4　再度 S_1 を閉じて十分時間が経過した後の C_1 の電荷はキルヒホッフ則より，

$$V_0 - R\cdot 0 - \frac{Q_1}{C} = 0 \qquad \therefore Q_1 = CV_0\,.$$

となっている．よって，2 回目に S_2 を閉じて十分時間が経過した後の各コンデンサの帯電量は，キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} 2V_0 + \dfrac{Q_1}{C} + R\cdot 0 - \dfrac{Q_2}{C} = 0\,, \\ Q_1 + Q_2 = CV_0 + \dfrac{3}{2}CV_0 \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = -\frac{1}{2}CV_0\,,\quad Q_2 = \frac{3}{2}CV_0\,.$$

よって，C_2 の電位差は，

$$V_2 = \frac{Q_2}{C} = \underset{\sim\sim}{\frac{3}{2}V_0}\,.$$

問 5　操作を十分繰り返した後，コンデンサの電荷は一定値を取る．S_1 を閉じたとき，S_2 を閉じたときそれぞれのキルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_0 - R\cdot 0 - \frac{Q_1}{C} = 0\,, \\ 2V_0 + \dfrac{Q_1}{C} + R\cdot 0 - \dfrac{Q_2}{C} = 0 \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = CV_0\,,\quad Q_2 = 3CV_0\,.$$

よって，C_2 の電位差は，

$$V_2 = \frac{Q_2}{C} = \underset{\sim\sim}{3V_0}\,.$$

問 6　キルヒホッフ則より $I = \dfrac{dQ_1}{dt}$ を踏まえて，

$$V_0 - R\frac{dQ_1}{dt} - \frac{Q_1}{C} = 0 \qquad \therefore \frac{dQ_1}{dt} = -\frac{1}{RC}\left(Q_1 - CV_0\right)$$

Q_1 に関する微分方程式を得る．この微分方程式は変数分離型に持ち込んで解くことができ，

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_1 - CV_0}\frac{dQ_1}{dt} &= -\frac{1}{RC} \\ \int \frac{1}{Q_1 - CV_0}\frac{dQ_1}{dt}\,dt &= -\int \frac{1}{RC}\,dt \\ \log|Q_1 - CV_0| &= -\frac{t}{RC} + \spadesuit \\ \therefore Q_1 &= CV_0 + e^{\spadesuit}e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

を得る．$t = 0$ で $Q_1 = 0$ より $e^{\spadesuit} = -CV_0$ と求まり，

$$Q_1 = CV_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\,.$$

【補足】問 5 を漸化式を解いて求める

n 回目に $\mathrm{S_1}$ を閉じて十分時間が経過した後の $\mathrm{C_1}$ の上側の電荷を x_1，n 回目に $\mathrm{S_2}$ を閉じて十分時間が経過した後の $\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$ の上側の電荷をそれぞれ y_n，z_n とする．キルヒホッフ則・電荷保存則は，

$$\begin{cases} \mathrm{S_1}\colon V_0 - R\cdot 0 - \dfrac{x_n}{C} = 0\,, \\ \mathrm{S_2}\colon \begin{cases} 2V_0 + \dfrac{y_n}{C} + R\cdot 0 - \dfrac{z_n}{C} = 0\,, \\ y_n + z_n = x_n + z_{n-1}\,. \end{cases} \end{cases}$$

$\mathrm{S_1}$ のキルヒホッフ則より，$x_n = CV_0$ と求まり，これを電荷保存則へ代入して $\mathrm{S_2}$ 側のキルヒホッフ則・電荷保存則を整理すれば，

$$\begin{cases} 2V_0 + \dfrac{y_n}{C} + R\cdot 0 - \dfrac{z_n}{C} = 0\,, \\ y_n + z_n = CV_0 + z_{n-1} \end{cases} \qquad \therefore z_n - \frac{1}{2}z_{n-1} - \frac{3}{2}CV_0 = 0$$

と z_n に関する漸化式が求まる．この漸化式を解いて

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{2}z_{n-1} - \frac{3}{2}CV_0 \\ z_n - 3CV_0 &= \frac{1}{2}(z_{n-1} - 3CV_0) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(z_{n-2} - 3CV_0) \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 (z_1 - 3CV_0) \\ \therefore z_n &= 3CV_0\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\,. \end{aligned}$$

よって，無限回操作後の $\mathrm{C_2}$ の電位差は，

$$V_{2,\infty} = \lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{C} = \lim_{n\to\infty} 3V_0\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 3V_0\,.$$

19. 電気回路

【メモ】

・電気回路の状態決定は以下の 3 種類の式で一意に決まる．

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ第 2 法則} \\ \text{電荷保存則（キルヒホッフ第 1 法則も含む）} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

性質を暗記しない素子（電球やダイオードなど）については，問題文でその性質が与えられる．与えられ方は①グラフ，②式の 2 通りである．

・ジュール熱 J の計算は以下のように行う．

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I\ \text{一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I\ \text{一定でないとき}). \end{cases}$$

【解答】

$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$ それぞれの左側に蓄えられる電荷を Q_1，Q_2 とし，$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{R_3}$，$\mathrm{C_2}$ に流れる電流をそれぞれ I_1，i，I_2 とする．また，$R = 1.0\,\Omega$，$C = 1.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}$，$E = 1.2\,\mathrm{V}$ と文字で置くと，キルヒホッフ則は，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - 3R(I_1 + i - I_2) = 0\,, \\ E - Ri - \dfrac{Q_2}{C} = 0\,, \\ E - Ri - 2R(i - I_2) - 3R(I_1 + i - I_2) = 0\,. \end{cases}$$

（問 1）　閉じた直後 $Q_1 = Q_2 = 0\,\mathrm{C}$ である[*2]．キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} E - 0 - 3R(I_1 + i - I_2) = 0\,, \\ E - Ri - 0 = 0\,, \\ E - Ri - 2R(i - I_2) - 3R(I_1 + i - I_2) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore I_1 = \frac{5}{6}\frac{E}{R} = 1.0\,\mathrm{A}\,,\quad i = \frac{E}{R} = 1.2\,\mathrm{A}\,,\quad I_2 = \frac{3}{2}\frac{E}{R} = 1.8\,\mathrm{A}\,.$$

よって，電池に流れる電流 I_E は，

$$I_\mathrm{E} = I_1 + i = \underset{\sim\sim\sim}{2.2\,\mathrm{A}}\,.$$

（問 2）　十分時間経過後コンデンサに流れ込む電流は 0 となる．よって，$I_1 = I_2 = 0\,\mathrm{A}$ として，キルヒ

[*2] 本当は閉じた瞬間に充電が完了するので，閉じた直後に I_E は定常状態となる．ここでは入試物理の文脈として $Q_1 = Q_2 = 0\,\mathrm{C}$ と解釈する．

ホッフ則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - 3Ri = 0\,, \\ E - Ri - \dfrac{Q_2}{C} = 0\,, \\ E - Ri - 2Ri - 3Ri = 0 \end{cases}$$

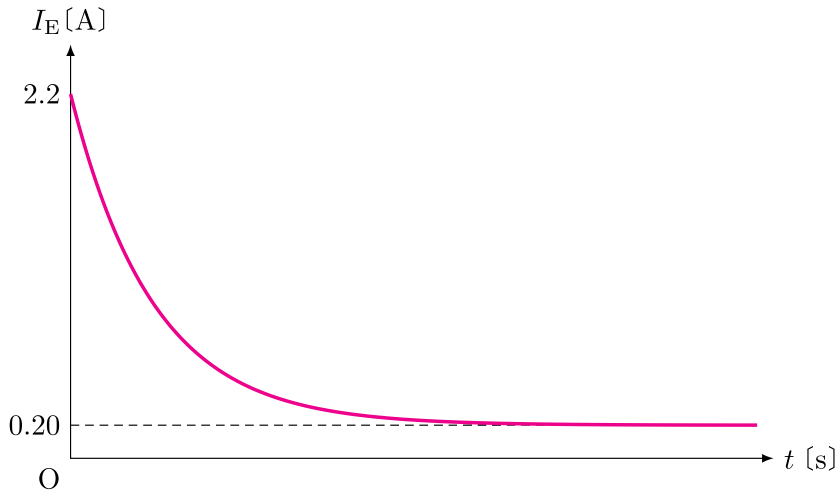
$$\therefore Q_1 = \frac{1}{2}CE = 6.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}\,,\quad Q_2 = \frac{5}{6}CE = 1.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}\,,\quad i = \frac{1}{6}\frac{E}{R} = 0.20\,\mathrm{A}\,.$$

よって，

$$I_{\mathrm{E}} = I_1 + i = 0.20\,\mathrm{A}\,.$$

（問 3）　前問に示した．

（問 4）　$t = 0$ で $I_{\mathrm{E}} = 2.2\,\mathrm{A}$，$t \to \infty$ で $I_{\mathrm{E}} = 0.20\,\mathrm{A}$ であり，抵抗とコンデンサからなる回路ゆえ解の関数形は指数関数の重ね合わせで書ける．以上を踏まえれば，以下のようなグラフになると推測される[*3]．



（問 5）　C_1，C_2 左側部分は電気的に孤立する．十分時間経過後コンデンサに流れ込む電流は 0 となるので，キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} -\dfrac{Q_1'}{C} - 3R \cdot 0 + \dfrac{Q_2'}{C} + R \cdot 0 = 0\,, \\ Q_1' + Q_2' = \dfrac{1}{2}CE + \dfrac{5}{6}CE \end{cases} \qquad \therefore Q_1' = Q_2' = \frac{2}{3}CE = 8.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}\,.$$

（問 6）　抵抗を流れる電流が時間変化することから，エネルギー収支より，

$$J = \varDelta U_1 + \varDelta U_2 = \left(\frac{1}{2}\frac{{Q_1'}^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{{Q_1}^2}{C}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{{Q_2'}^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{{Q_1}^2}{C}\right) = 4.0 \times 10^{-8}\,\mathrm{J}\,.$$

[*3] 具体的な関数形については**【補足】**に示した．

【補足】グラフについて

コンデンサが 2 つあり抵抗が入り組んで入り込んでいる回路では，一般には単調減少なグラフとはならない．ここでは，実際に問題で与えられた数値を代入して考察する．

■微分方程式を解く

キルヒホッフ則は，

$$\begin{cases} E-\dfrac{Q_1}{C}-3R(I_1+i-I_2)=0 & \cdots\cdots① \\ E-Ri-\dfrac{Q_2}{C}=0 & \cdots\cdots② \\ E-Ri-2R(i-I_2)-3R(I_1+i-I_2)=0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

初期条件は $t=0$ において $Q_1=Q_2=0$ であり，このとき $i=\dfrac{5}{6}\dfrac{E}{R}$，$i=\dfrac{E}{R}$，$I_2=\dfrac{3}{2}\dfrac{E}{R}$ である．

②の両辺を t で微分すれば I_2 が i で表すことができ，

$$0-R\frac{di}{dt}-\frac{1}{C}I_2=0 \qquad \therefore I_2=-RC\frac{di}{dt}\,.$$

これを③へ代入すれば，

$$E-6Ri-3RI_1+5RI_2=0 \qquad \therefore I_1=\frac{1}{3}\frac{E}{R}-\frac{5}{3}RC\frac{di}{dt}-2i$$

と I_1 を i だけで書くことができる．この式の両辺を t で微分すれば，

$$\frac{dI_1}{dt}=\frac{5}{3}RC\frac{d^2i}{dt^2}-2\frac{di}{dt}\,.$$

①の両辺を t で微分し，I_1，$\dfrac{dI_1}{dt}$，I_2 を代入して，

$$\begin{aligned} I_1+3RC\left(\frac{dI_1}{dt}+\frac{di}{dt}+\frac{dI_2}{dt}\right)&=0 \\ \frac{1}{3}\frac{E}{R}-\frac{5}{3}RC\frac{di}{dt}-2i+3RC\left(\frac{5}{3}RC\frac{d^2i}{dt^2}-2\frac{di}{dt}+\frac{di}{dt}-RC\frac{d^2i}{dt^2}\right)&=0 \\ 6\frac{d^2i}{dt^2}+14\frac{1}{RC}\frac{di}{dt}+6\frac{1}{(RC)^2}\left(i-\frac{1}{6}\frac{E}{R}\right)&=0 \end{aligned}$$

となり，i に関する微分方程式を得る．ここで，$a\equiv\dfrac{1}{RC}$ と置き，$j\equiv i-\dfrac{1}{6}\dfrac{E}{R}$ と変数変換をすれば，

$$3\frac{d^2j}{dt^2}+7a\frac{dj}{dt}+3a^2j=0$$

となる．この微分方程式の解として $j=Ae^{\lambda t}$ と仮定すると，

$$(3\lambda^2+7a\lambda+3a^2)Ae^{\lambda t}=0 \quad \cdots\cdots④$$

となり，任意の時刻 t で成り立つような λ は[*4]，

$$3\lambda^2+7a\lambda+3a^2=0 \qquad \therefore \lambda_1=-\frac{7+\sqrt{13}}{6}a\,,\quad \lambda_2=-\frac{7-\sqrt{13}}{6}a$$

と求まる．$\lambda=\lambda_{1,2}$ のときの j は微分方程式の解となるので，λ_1，λ_2 に対応する積分定数をそれぞれ A_1，A_2 とすれば

$$j=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}$$

もまた④の解となる．これを i に直せば，

$$i=\frac{1}{6}\frac{E}{R}+A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}\,.$$

従って，I_1，I_2 についても，

$$\begin{cases} I_1=\dfrac{1}{3}\dfrac{E}{R}-\dfrac{5}{3}RC\left(\lambda_1A_1e^{\lambda_1 t}+\lambda_2A_2e^{\lambda_2 t}\right)-2\left(\dfrac{1}{6}\dfrac{E}{R}+A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}\right)\,, \\ I_2=-RC\left(\lambda_1A_1e^{\lambda_1 t}+\lambda_2A_2e^{\lambda_2 t}\right)\,. \end{cases}$$

ここで $t=0$ で $i=\dfrac{E}{R}$，$I_2=\dfrac{3E}{2R}$ ゆえ，

$$\begin{cases} \dfrac{E}{R}=\dfrac{1}{6}\dfrac{E}{R}+A_1+A_2\,, \\ \dfrac{3}{2}\dfrac{E}{R}=-\dfrac{1}{a}\left(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2\right) \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} A_1=\dfrac{a}{\lambda_2-\lambda_1}\dfrac{3}{2}\dfrac{E}{R}\left(1+\dfrac{5}{9}\dfrac{\lambda_2}{a}\right)\,, \\ A_2=-\dfrac{a}{\lambda_2-\lambda_1}\dfrac{3}{2}\dfrac{E}{R}\left(1+\dfrac{5}{9}\dfrac{\lambda_1}{a}\right)\,. \end{cases}$$

■有効数字 1 桁で計算する

ここでは，有効数字 1 桁で計算する．

$\lambda_{1,2}$ を有効数字 1 桁で近似すると，上記の計算からそれぞれ，

$$\lambda_1=-\frac{7+\sqrt{13}}{6}a=-1.76...a\fallingdotseq -2a$$
$$\lambda_2=-\frac{7-\sqrt{13}}{6}a=-0.565...a\fallingdotseq -\frac{3}{5}a$$

となり，このとき，

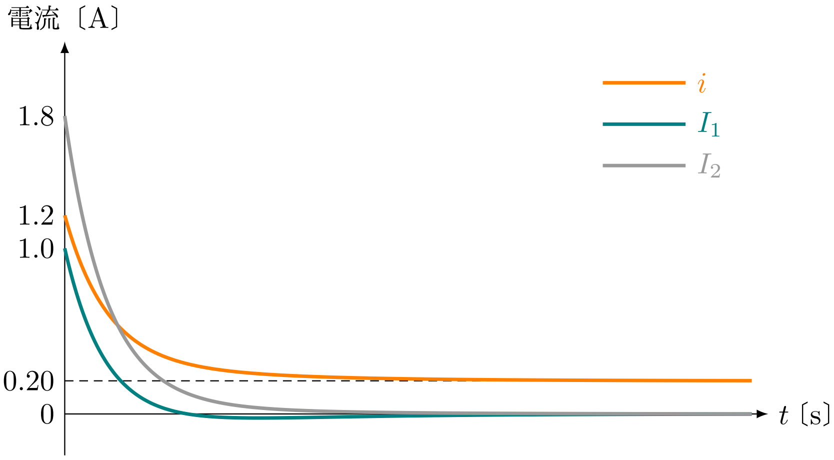
$$A_1=\frac{5}{7}\frac{E}{R}\,,\qquad A_2=\frac{5}{42}\frac{E}{R}$$

[*4] $A=0$ は $j=0$ という自明な解であり，今考えている現象には相応しくない．

である．よって，i，I_1，I_2 はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{1}{6}\frac{E}{R} + \frac{5}{42}\frac{E}{R}\left(6e^{-2at} + e^{-\frac{3}{5}at}\right) , \\
I_1 &= \frac{5}{42}\frac{E}{R}\left(8e^{-2at} - e^{-\frac{3}{5}at}\right) , \\
I_2 &= \frac{1}{14}\frac{E}{R}\left(20e^{-2at} + e^{-\frac{3}{5}at}\right) .
\end{aligned}
$$

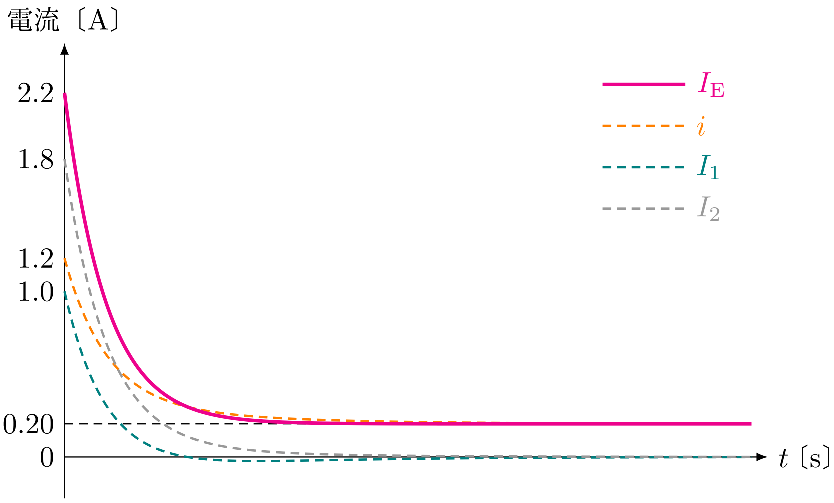
これを図示すると以下の図のようになる．



電池を通過する電流 I_{E} は，

$$
I_{\mathrm{E}} = I_1 + i = \frac{1}{6}\frac{E}{R} + \frac{5}{3}\frac{E}{R}e^{-2at}
$$

となるので，有効数字 1 桁では以下のようなグラフになることが分かり，上で示した解答の通りである．



以下で示す計算の通り，有効数字 1 桁で十分な精度で計算できていることが分かる．このように得た結果に具体的な数値を代入して理論で得た結果が物理的に正しいものか調べたいときや，今回のように解

の挙動を調べたいときなど，「ざっくり数値的結果を求めたい」という場合は，有効数字 1 桁で十分である[*5]．時として，有効数値 0 桁（桁数だけ）で十分なときもある．

■有効数字 2 桁で計算する

ここでは，有効数字 2 桁で計算する．

$\lambda_{1,2}$ を有効数字 1 桁で近似すると，上記の計算からそれぞれ，

$$\lambda_1 = -\frac{7+\sqrt{13}}{6}a = -1.76...a \fallingdotseq -\frac{9}{5}a$$
$$\lambda_2 = -\frac{7-\sqrt{13}}{6}a = -0.565...a \fallingdotseq -\frac{57}{100}a$$

となり，このとき

$$A_1 = \frac{5}{6}\frac{E}{R}, \qquad A_2 = 0$$

である．よって，i，I_1，I_2 はそれぞれ，

$$i = \frac{1}{6}\frac{E}{R} + \frac{5}{6}\frac{E}{R}e^{-\frac{9}{5}at},$$
$$I_1 = \frac{5}{6}\frac{E}{R}e^{-\frac{9}{5}at},$$
$$I_2 = \frac{3}{2}\frac{E}{R}e^{-\frac{9}{5}at}.$$

これを図示すれば以下のようになる．

電池を通過する電流 I_{E} は，

$$I_{\mathrm{E}} = I_1 + i = \frac{1}{6}\frac{E}{R} + \frac{5}{3}\frac{E}{R}e^{-2at}$$

となるので，有効数字 1 桁の場合と一致する．

■近似しないで…

$\lambda_{1,2}$ はそれぞれ，

$$\lambda_{1,2} = -\frac{7\pm\sqrt{13}}{6}a$$

であり，A_1，A_2 は，

$$A_{1,2} = \frac{65\pm 19\sqrt{13}}{156}\frac{E}{R}$$

[*5] もちろん，実験など精度が重要な分野の話はしていない．

である．i，I_1，I_2 はそれぞれ，

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{6}\frac{E}{R} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda} e^{\lambda_2 t}\,, \\ I_1 &= -\left(2 + \frac{5}{3}\frac{\lambda_1}{a}\right) A_1 e^{\lambda_1 t} + \left(2 + \frac{5}{3}\frac{\lambda_2}{a}\right) A_2 e^{\lambda_2 t}\,, \\ I_2 &= -\frac{\lambda_1}{a} A_1 e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_2}{a} A_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

となり，電池を通過する電流 I_{E} は，

$$I_{\mathrm{E}} = I_1 + i = \frac{1}{6}\frac{E}{R} - \left(1 + \frac{5}{3}\frac{\lambda_1}{a}\right) A_1 e^{\lambda_1 t} - \left(1 + \frac{5}{3}\frac{\lambda_2}{a}\right) A_2 e^{\lambda_2 t}$$

となる．ここで，$e^{\lambda_2} t$ の因子は，

$$-\left(1 + \frac{5}{3}\frac{\lambda_2}{a}\right) A_2 = -\left(1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{-7 + \sqrt{13}}{6}\right) \cdot \frac{65 - 19\sqrt{13}}{156}\frac{E}{R} = 0.00128... \times \frac{E}{R}$$

となり，0 に近似して良いことが確認できる．

　はじめから近似しないで計算すればいいのでは？ と思った人もいるかもしれないが，有効数字 1 桁で計算してかなり精度の良い回の挙動が得られるのであれば，有効数字 1 桁で計算した方が楽である．