

1 弦を伝わる波の速さの式

図 1 のように、張力の大きさ T で引かれた線密度 ρ の弦を伝う横波について考える．弦の一端を瞬間的に上下へ動かすことで、パルス（弦の小さな山）が x 軸正方向に速さ v で伝わっていく．パルスの右端部分は、図 1 中の拡大図のように角度 θ で立ち上がる．時間 Δt の間に立ち上がりの位置は P から Q に達し、 P にある媒質は P' まで変位した．

時刻 t に PQ 間にあった弦の微小部分 K （図 1 拡大図中の色の濃い部分）の運動に注目する．図 2 に示すように、微小部分 K の左端は時刻 t に y 軸正方向に動き始める．その後 K の各点は左から順に y 軸正方向に動き始め、時刻 $t + \Delta t$ には右端が動き始める．この間、 K は速さ u で一様に y 軸正方向へ動いていると見做せるものとし、 PQ 間にあった弦が $P'Q$ 間に変位した際の弦の伸縮は無視できる．

問(1) $\overline{PQ}$, $\overline{PP'}$ を、それぞれ u , v , Δt のうちから必要なものを用いて表せ．

問(2) K の質量 m を、 ρ , ℓ を用いて表せ．また、 Δt 間の K の運動量の y 成分の変化量を、 ρ , u , v , Δt を用いて表せ．

問(3) Δt 間に K が張力から受けた力積の y 成分を、 T , θ , Δt を用いて表せ．

問(4) 弦を伝う波の速さ v を、 T , ρ を用いて表せ．ただし、角度 θ は十分に小さく、 $\sin \theta \doteq \theta$, $\cos \theta \doteq 1$ と近似できる．

[2002 年大阪大学後期日程を基に作成]

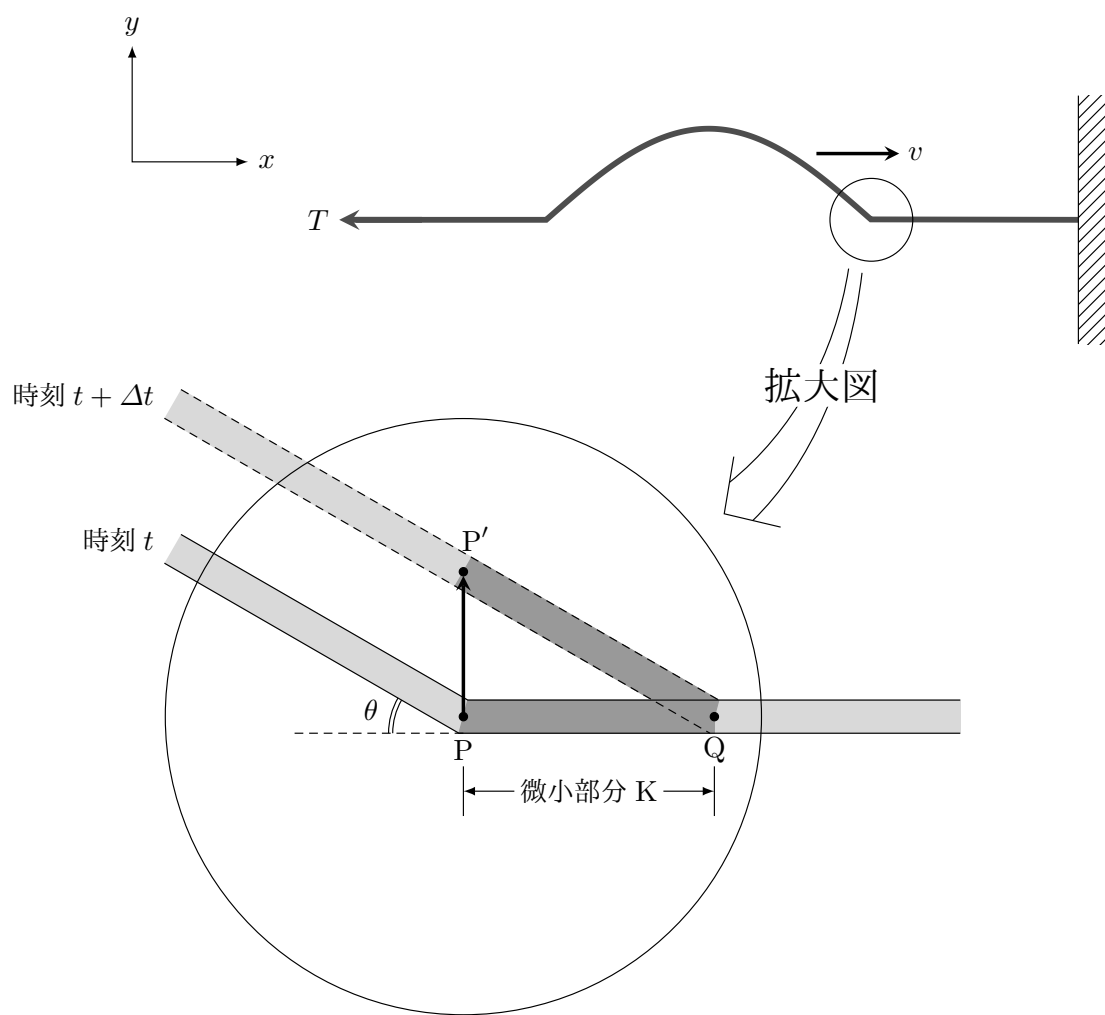


図 1

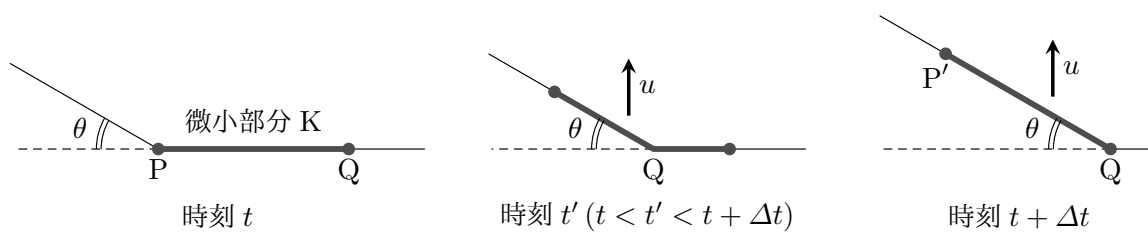
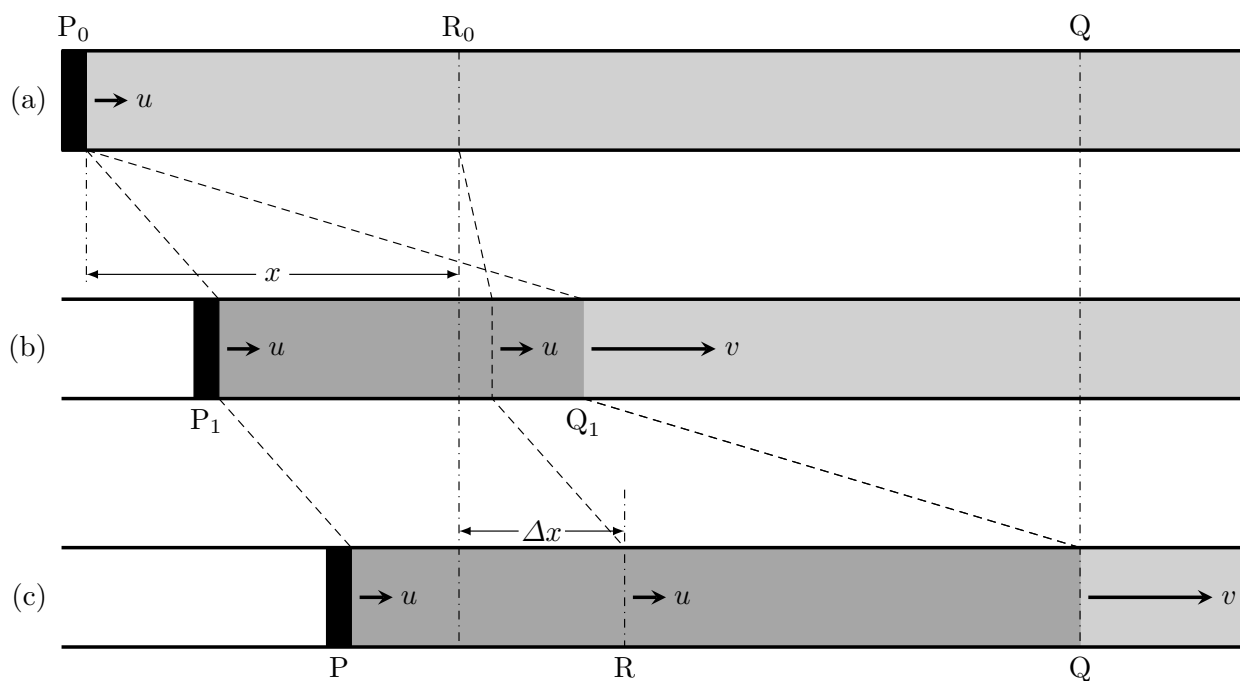


図 2

2 音速の式

断面積 S の長いパイプの左端 P_0 にピストンがはめ込まれ、右端は大気中に開放されている。ピストンを速さ u で右へ動かすと、少しずつ遅れながら次々と右側の空気が押されて速さ u で右へ動き始める。動いている空気と静止している空気との境界面の移動する速さ（音の伝わる速さ）を v とし、ピストンとパイプは断熱材でできているものとする。ピストンを動かし始めた時刻を $t = 0$ とし、速度や運動量の正の向きを図の右向きに定める。

図 (a) は時刻 0, (b) は時刻 t' ($t' < t$), (c) は時刻 t の様子を表しており、時刻 0, t_1 , t それぞれにおいてピストンの位置は $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P$ と、境界面の位置は $Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q$ と変位している。



まず、 P_0Q 間にある任意の点 R_0 にある空気を考える ($\overline{P_0R_0} = x$ として図に示してある)。

- 問(1) 点 R_0 に境界面が届く時刻 t_0 を、 u , v , x のうちから必要なものを用いて表せ。
- 問(2) 境界面が点 R_0 に達した後、点 R_0 にあった空気は速さ u で右向きに動き始める。時刻 0 で R_0 にあった空気が、時刻 t において Δx だけ変位しているとき、 Δx を u , v , $\overline{R_0Q}$ を用いて表せ。

P_0Q 間の任意の点 R_0 において $\frac{\Delta x}{\overline{R_0Q}}$ が位置 x に依らず定数値を取ることは、 PQ 内の空気が一様に圧縮されていることを意味している。ここでは、 P_0Q 内の空気が PQ 間へ圧縮されるこの過程を断熱圧縮と仮定する。ピストンを押す力がピストンに及ぼす圧力は P であり、 PQ 内の空気の圧力も P である。大気の圧力を P_0 、密度を ρ_0 、空気の比熱比を γ とする。

以下の設問では、空気は理想気体とする。また、音速 v はピストンの速さ u に比べ十分大きいものとし、微小な量 ε ($|\varepsilon| \ll 1$)、および実数 α に対して成り立つ近似式 $(1 + \varepsilon)^\alpha \doteq 1 + \alpha\varepsilon$ を用いよ。

- 問(3) この過程が断熱圧縮であることから、 PQ 内の空気の圧力 P は

$$P \doteq P_0 \left(1 + \boxed{\text{ア}} \right)$$

と書ける。 $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる数式を、 γ , S , t , u , v のうち必要なものを用いて表せ。

- 問(4) PQ 内の気体の質量、および時間 t の間に PQ 内の空気の運動量の変化量を、それぞれ γ , P_0 , S , ρ_0 , u , v , t のうちから必要なものを用いて表せ。
- 問(5) t 間に PQ 内の空気が受けた力積を、 P_0 , P , S , t を用いて表せ。
- 問(6) 音速 v を、 γ , ρ_0 , P_0 を用いて表せ。
- 問(7) 大気の温度を T 、空気の分子量を M 、気体定数を R とする。 v を、 γ , M , R , T を用いて表せ。
- また、 v をセルシウス温度 $t_{\text{Cel}} = T - 273$ で書き換えたとき

$$v \doteq v_0 \left(1 + \frac{t_{\text{Cel}}}{\boxed{\text{イ}}} \right)$$

と書ける。 $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる数値を求めよ。

[2001 年大阪府立大学中期日程を基に作成]

■ 略解

1

問(1) $\overline{PQ} = v\Delta t, \quad \overline{PP'} = u\Delta t$

問(2) $m = \rho vt, \quad \Delta p = \rho vu\Delta t$

問(3) $I = T \sin \theta \Delta t$

問(4) $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

2

問(1) $t_0 = \frac{x}{v}$

問(2) $\Delta x = \frac{u}{v} \overline{PQ}$

問(3) $\gamma \frac{u}{v}$

問(4) $m = \rho_0 S v t, \quad \Delta p = \rho_0 S v u t$

問(5) $I = (P - P_0) S t$

問(6) $v = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}$

問(7) 546