

筑波大学 2021 年解答

I 衝突，時間追跡－等加速度

【メモ】

・衝突は，以下の 2 式連立が基本．

$$\begin{cases} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則（撃力のない成分）} \\ \text{問題文の条件} \end{cases}$$

外力制御があるような物体（面）との衝突では，運動量は保存しない．

・高校範囲で時間追跡可能な運動は，等加速度運動，単振動，速度に比例した空気抵抗の運動の 3 つであり，前 2 つはエネルギーによる解法の実行も可能．この問題では，時間追跡の誘導が付いているため時間追跡で考える．

【解答】

問 1 面がなめらかなことから，面に平行な速度成分 $v_{//}$ は不変，面に垂直な成分 $v_{\perp}$ は $-e$ 倍される．

衝突直前の速度 $\vec{v}_0$ を斜面に平行な成分（斜面上向き正）と垂直な成分（斜面の左上向きを正）で表せば，

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{//} \\ v_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_0 \\ -\frac{1}{2}v_0 \end{pmatrix}.$$

よって，衝突後の速度 $\vec{v}$ を斜面に平行な成分（斜面上向き正）と垂直な成分（斜面の左上向きを正）で表せば，

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}ev_0 \end{pmatrix}.$$

以上より， $e = 1$ では (ア)， $e = 0$ では (イ) とわかる．

問 2 題意より，

$$\vec{v}_{//} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_0 \\ \frac{1}{2}v_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{\perp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_0 \\ -\frac{1}{2}v_0 \end{pmatrix}.$$

問 3 衝突の条件より，

$$\begin{cases} \vec{v}'_{//} = \vec{v}_{//}, \\ \vec{v}'_{\perp} = -e\vec{v}_{\perp} \end{cases} \quad \therefore \vec{v}' = \vec{v}'_{//} + \vec{v}'_{\perp} = \frac{v_0}{2} \begin{pmatrix} 1-e \\ 1+e \end{pmatrix}.$$

問4 $t = 0$ で,

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(0) = \frac{v_0}{2} \begin{pmatrix} 1-e \\ 1+e \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix},$$

より,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-e}{2}v_0t \\ \frac{1+e}{2}v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}.$$

問5 問4より,

$$t = \frac{2}{1-e} \frac{x}{v_0}$$

ゆえ,

$$y = \frac{1+e}{2}v_0 \frac{2}{1-e} \frac{x}{v_0} - \frac{1}{2}g \left(\frac{2}{1-e} \frac{x}{v_0} \right)^2 = \frac{1+e}{1-e}x - \frac{2g}{(1-e)^2v_0^2}x^2$$

$$\therefore a = \frac{1+e}{1-e}, \quad b = -\frac{2g}{(1-e)^2v_0^2}.$$

問6 $y\left(x = \frac{h}{2}\right) > \frac{h}{2}$ を満たせばよいので,

$$\frac{1+e}{1-e} \frac{h}{2} - \frac{2g}{(1-e)^2v_0^2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 > \frac{h}{2} \quad \therefore v_0 > \sqrt{\frac{gh}{2e(1-e)}} (= V).$$

II 中身の見えるコンデンサ

【メモ】

・電場の計算は、点電荷の作る電場（公式）、形状のある帯電体の作る電場（ガウスの法則）、電位分布から逆算の3通り。

・電荷 Q が一様に帯電した面積 S 平板の作る電場 E はガウスの法則より、真空の誘電率を ε_0 として*1,

$$E \cdot 2S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \therefore E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

これは、導出ができる状態にしておきながら覚えておきたい「公式」。

・平行平板コンデンサ（間隔 d ）の内部電場は平行一様電場と見なせるため、コンデンサの電位差 $\Delta\phi$ と極板間電場 E の間には次の関係がある。

$$\Delta\phi = Ed.$$

ここにガウスの法則を合わせれば、

$$Q = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \Delta\phi.$$

となり、静電容量 $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ を得る*2。

・コンデンサの中身を見る問題は、電位の関係として $\Delta\phi = \frac{Q}{C}$ を使う問題、 $\Delta\phi = Ed$ を使う問題（と両方を使い分ける問題）に分類される。

【解答】

問1 容量は公式より、

$$C = \varepsilon_0 \frac{L^2}{\underbrace{d}_{\text{ア}}}.$$

また、キルヒホッフの法則より、

$$\begin{cases} V_0 - \frac{Q}{C} = 0, \\ V_0 - Ed = 0 \end{cases} \quad \therefore Q = \varepsilon_0 \frac{L^2}{\underbrace{d}_{\text{イ}}} V_0, \quad E = \frac{V_0}{\underbrace{d}_{\text{ウ}}}.$$

よって、静電エネルギーは公式より、

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{\varepsilon_0 L^2 V_0^2}{\underbrace{2d}_{\text{エ}}}.$$

*1 ここでは、平板の端の影響を考えていない。

*2 他の形状のコンデンサの容量を求める場合も、ガウスの法則より E と Q の関係、電位の関係（キルヒホッフの法則）より $\Delta\phi$ と E の関係を得て、これらを組み合わせることで Q と $\Delta\phi$ の関係を作り、この比例係数から容量を読み取る流れとなる。

問 2 (a) 導体：電位⑧，電場⑩ 誘電体：電位③，電場⑪

導体：内部は電場 0 である．ガウスの法則より，各極板からは $E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 L^2}$ の電場が生じているので，隙間での電場の大きさは $\frac{Q}{\varepsilon_0 L^2} = \frac{V_0}{d}$ である．よって，電場のグラフは⑩が適当である．電位差は，極板と導体の間は $\frac{V_0}{d} \cdot \frac{d}{4} = \frac{V_0}{4}$ ，導体内部は $0 \cdot \frac{d}{2} = 0$ であることを踏まえれば⑧が適当である．

誘電体：ガウスの法則より，各極板からは $E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 L^2}$ の電場が生じているので，隙間での電場の大きさは $\frac{Q}{\varepsilon_0 L^2} = \frac{V_0}{d}$ である．誘電体内部の電場の大きさは外場の $\frac{1}{\varepsilon_r}$ 倍となるため， $\frac{V_0}{\varepsilon_r V_0}$ である．よって，電場のグラフは⑪が適当である．電位差は，極板と導体の間は $\frac{V_0}{d} \cdot \frac{d}{4} = \frac{V_0}{4}$ ，導体内部は $\frac{V_0}{\varepsilon_r V_0} \cdot \frac{d}{2} = \frac{V_0}{2\varepsilon_r d}$ であることを踏まえれば③が適当である．

(b) ガウスの法則より，各極板からは $E_{\pm} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 L^2}$ の電場が生じているため，極板間電場は $E = E_+ + E_- = \frac{Q}{\varepsilon_0 L^2}$ である．導体の場合の上側の極板の電位は，キルヒホッフの法則より，

$$\phi = E \cdot \frac{d}{4} + 0 \cdot \frac{d}{2} + E \cdot \frac{d}{4} = \frac{1}{2} V_0 \quad \text{オ}$$

誘電体の場合，誘電体内部の電場は $E' = \frac{1}{\varepsilon_r} E = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 L^2}$ となる．よって，キルヒホッフの法則より，

$$\phi = E \cdot \frac{d}{4} + E' \cdot \frac{d}{2} + E \cdot \frac{d}{4} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_r} \right) V_0 \quad \text{カ}$$

問 3 容量の合成則より，誘電体側の極板が形成するコンデンサの容量 C' は，

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{\varepsilon_0 \frac{L^2/2}{d/2}} + \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{L^2/2}{d/2}} \quad \therefore C' = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} \varepsilon_0 \frac{L^2}{d}.$$

よって，容量の合成則より，

$$C = \varepsilon_0 \frac{L^2/2}{d} + \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} \varepsilon_0 \frac{L^2}{d} = \frac{3\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_r + 1} \frac{\varepsilon_0 L^2}{2d} \quad \text{キ}$$

また，静電エネルギーは公式より，

$$U = \frac{1}{2} \frac{(CV_0)^2}{C} = \frac{3\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_r + 1} \frac{\varepsilon_0 L^2}{4d} V_0^2 \quad \text{ク}$$

【補足】問 3 を定義通りに…

誘電体が挿入されている側の帯電量を Q_1 ，されていない側の帯電量を Q_2 とする．ガウスの法則より，それぞれの極板の作る電場は $\frac{Q_1}{2\varepsilon_0 L^2/2}$ ， $\frac{Q_2}{2\varepsilon_0 L^2/2}$ であり，キルヒホッフの法則より，

$$\begin{cases} V_0 - \frac{Q_1}{\varepsilon_0 L^2/2} d = 0, \\ V_0 - \frac{Q_2}{\varepsilon_0 L^2/2} \frac{d}{4} - \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{Q_2}{\varepsilon_0 L^2} \frac{d}{2} - \frac{Q_2}{\varepsilon_0 L^2} \frac{d}{4} = 0 \end{cases} \quad \therefore Q_1 = \varepsilon_0 \frac{L^2}{2d} V_0, \quad Q_2 = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} \frac{\varepsilon_0 L^2}{d} V_0.$$

よって，極板の帯電量は，

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 = \frac{3\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_r + 1} \frac{\varepsilon_0 L^2}{2d} V_0$$

となる．極板の帯電量 Q_{tot} を極板間電位差 V_0 で割ったものが静電容量だから，

$$C = \frac{Q_{\text{tot}}}{V_0} = \frac{3\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_r + 1} \frac{\varepsilon_0 L^2}{2d}$$

を得る．

III 熱力学－基本

【メモ】

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題．可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P - V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算するのが基本．

【解答】

問 1 状態方程式より，

$$\begin{cases} PV = RT_0, \\ P'V = 2RT_0 \end{cases} \quad \therefore \frac{P'}{P} = 2.$$

内部エネルギー変化は公式より，

$$\Delta U = \frac{3}{2}R(2T_0 - T_0) = \frac{3}{2} \times RT_0.$$

問 2 内部気体の圧力は，ピストンのつりあいより，

$$P = P_0.$$

よって，温度は状態方程式より，

$$T = \frac{P_0 S \ell}{R}.$$

問 3 ピストンのつりあいより，

$$0 = PS + Mg \sin \theta - P_0 S \quad \therefore P = P_0 - \frac{Mg}{S} \sin \theta.$$

ℓ' は状態方程式より，

$$\left(P_0 - \frac{Mg}{S} \sin \theta\right) S \ell' = R \frac{P_0 S \ell}{R} \quad \therefore \ell' = \frac{P_0 S}{P_0 S - Mg \sin \theta} \ell.$$

また， $\ell' \rightarrow L$ での温度 T' も状態方程式より，

$$\left(P_0 - \frac{Mg}{S} \sin \theta\right) SL = RT' \quad \therefore T' = \frac{(P_0 S - Mg \sin \theta)L}{R}.$$

この間の内部エネルギー変化は，公式より，

$$\Delta U = \frac{3}{2}R(T' - T) = \frac{3}{2} \{P_0 S(L - \ell) - Mg \sin \theta\}.$$

仕事は $P - V$ 図より,

$$W = \left(P_0 - \frac{Mg}{S} \sin \theta \right) S(L - \ell') = \underbrace{P_0 S(L - \ell) - MgL \sin \theta}_{\text{J}} .$$

よって, 吸収熱は熱力学第 1 法則より,

$$Q = \Delta U + W = \frac{5}{2} \underbrace{\{P_0 S(L - \ell) - Mg \sin \theta\}}_{\text{J}} .$$