第 1 問（運動方程式，糸の拘束条件）

【メモ】

・等加速度運動ゆえ，時間追跡かエネルギーのいずれかで考えられる．問 3 では時刻 t を問われているため時間追跡で考える他ない．

・糸を介する運動は，各糸に対して糸の長さ一定の条件（拘束条件）を立てる．

【解答】

問 1　運動方程式より，

$$ma = 2mg - mg \qquad \therefore a = g\,.$$

問 2　運動方程式は[*1]，

$$\begin{cases} ma = S - mg\,, \\ 2m(-a) = S - 2mg\,. \end{cases}$$

問 3　運動方程式より，

$$a = \frac{1}{3}g\,,\quad S = \frac{4}{3}mg\,.$$

加速度一定より，物体 A の位置および速度は，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{6}gt^2\,, \\ v_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{3}gt\,, \end{cases}$$

となり，$x_{\mathrm{A}} = h$ を解いて，

$$\frac{1}{6}gt^2 = h \qquad \therefore t = \sqrt{\frac{6h}{g}}\,.$$

v_{A} に代入すれば，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2 = \frac{1}{3}mgh\,.$$

---

*1 糸の長さが一定なことから，

$$(x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{A}}) + (x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{B}}) = \mathrm{const}$$

を満たし，両辺の時間微分を考えれば $a_{\mathrm{A}} + a_{\mathrm{B}} = 0$ を得る．

問 4　運動方程式は，

$$\begin{cases} ma_\mathrm{A} = S_1 - mg\,, \\ 2ma_\mathrm{B} = S_1 - 2mg\,, \\ 3ma_\mathrm{C} = S_2 - 3mg\,. \end{cases}$$

問 5　それぞれの糸の長さが一定ゆえ，

$$\begin{cases} (x_\mathrm{P} - x_\mathrm{C}) + (x_\mathrm{P} - x_\mathrm{Q}) = \mathrm{const}\,, \\ (x_\mathrm{Q} - x_\mathrm{A}) + (x_\mathrm{Q} - x_\mathrm{B}) = \mathrm{const}\,, \end{cases}$$

を満たす．x_P のみ定数であることに留意し，時間変化を取れば，

$$\begin{cases} a_\mathrm{C} + a_\mathrm{Q} = 0\,, \\ 2a_\mathrm{Q} - a_\mathrm{A} - a_\mathrm{B} = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore\ a_\mathrm{A} + a_\mathrm{B} + 2a_\mathrm{C} = 0\,.$$

問 6　$S_2 = 2S_1$ として，運動方程式・拘束条件を解いて，

$$\begin{cases} ma_\mathrm{A} = S_1 - mg\,, \\ 2ma_\mathrm{B} = S_1 - 2mg\,, \\ 3ma_\mathrm{C} = 2S_1 - 3mg\,, \\ a_\mathrm{A} + a_\mathrm{B} + 2a_\mathrm{C} = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{aligned} a_\mathrm{C} &= -\frac{1}{17}g\,, & a_\mathrm{A} &= \frac{7}{17}g\,, \\ a_\mathrm{B} &= -\frac{5}{17}g\,, & S_1 &= \frac{24}{17}mg\,. \end{aligned}$$

問 7　問 6 より，

$$\begin{cases} x_\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}\dfrac{7}{17}gt^2 = -7x_\mathrm{C}\,, \\ x_\mathrm{B} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{5}{17}gt^2 = 5x_\mathrm{C}\,, \\ x_\mathrm{C} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{17}gt^2\,. \end{cases}$$

よって，重心の定義より，

$$\mathit{\Delta} x_\mathrm{CM} = \frac{m(-7h') + 2m \cdot 5h' + 3mh'}{m + 2m + 3m} = h'\,.$$

第２問（電気回路）

【メモ】

・電気回路の状態は，

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフの法則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

によって一意に定まる[*2]．

【解答】

問１　キルヒホッフの法則より，

$$E - rI - L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

ここにコイルの性質（電流の連続性）より，$I = \underset{\sim}{0}$ である．よって，

$$L\frac{dI}{dt} = E \qquad \therefore V_{a\to b} = -r\cdot 0 = \underset{\sim}{0}\,,\quad V_{b\to c} = -L\frac{dI}{dt} = \underset{\sim\sim}{-E}\,.$$

問２　コイルの性質より $L\dfrac{dI}{dt} = 0$ である．キルヒホッフの法則より，

$$I = \underset{\sim\sim}{\frac{E}{r}}\,.$$

エネルギーは公式より，

$$U_{\mathrm{L}} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}L\left(\frac{E}{r}\right)^2}\,.$$

問３　キルヒホッフの法則より，

$$-\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

ここに，$I = +\dfrac{dQ}{dt}$ を代入して，

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{LC}Q \qquad \therefore f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}\,.$$

[*2] 電位降下について抵抗，コンデンサ，コイルの各種公式，エネルギーについて抵抗，コンデンサ，コイル，電池，諸性質についてはコンデンサ，コイルを押さえる．例外素子については，問題文でグラフや数式でその性質が与えられる．

問 4　$t=0$ で $I=\dfrac{E}{r}$，$Q=0$ より[*3]

$$Q=\frac{E}{r}\sqrt{LC}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

よって，キルヒホッフの法則より，

$$L\frac{dI}{dt}=-\frac{Q}{C}=-\frac{E}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\qquad\therefore\max\left\{L\frac{dI}{dt}\right\}=\frac{E}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

問 5　キルヒホッフの法則より，

$$E-rI-RI=0\qquad\therefore I=\frac{E}{R+r}$$

よって，単位時間当たりのジュール熱（消費電力）は，

$$P=RI^2=\frac{RE^2}{(R+r)^2}.$$

問 6　問 5 より，

$$P=\frac{RE^2}{R^2+2rR+r^2}=\frac{E^2}{R+\dfrac{r^2}{R}+2r}.$$

ここで，相加・相乗平均の関係から，

$$\begin{aligned}R+\frac{r^2}{R}&\geq 2\sqrt{R\frac{r^2}{R}}\\R+\frac{r^2}{R}+2r&\geq 2r+2r\\\therefore\frac{1}{R+\dfrac{r^2}{R}+2r}&\leq\frac{1}{4r}.\end{aligned}$$

よって，

$$P=\frac{E^2}{R+\dfrac{r^2}{R}+2r}\leq\frac{E^2}{4r}\qquad\therefore\max\{P\}=\frac{E^2}{4r}\quad(R=r).$$

[*3] 単振動ゆえ，右式に初期条件を代入すればよい：$\begin{cases}Q=A\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right)+B\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right),\\I=\dfrac{A}{\sqrt{LC}}\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right)-\dfrac{B}{\sqrt{LC}}\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right).\end{cases}$

第３問（固有振動）

【メモ】

・固有振動の問題は以下の手順で考察する．

① 装置の長さと波長を対応付ける．

$$② \begin{cases} \text{弦の場合} \begin{cases} v = f\lambda \\ v = \sqrt{\dfrac{\text{張力}}{\text{線密度}}} \end{cases} \\ \text{気柱の場合：} v = f\lambda \end{cases}$$

・固有振動は弦（両端節），気柱（開管が両端腹，閉管が腹と節）のそれぞれを押さえる．気柱の固有振動において境界が自由端のとき，開口端補正を考慮する必要がある．

【解答】

問１　基本振動ゆえ，

$$\frac{\lambda_1}{2} = \ell \qquad \therefore \lambda_1 = 2\ell\,.$$

問２　問１より，

$$f = \frac{V}{\lambda_1} = \frac{V}{2\ell}\,.$$

１回目，２回目の共鳴を考えて，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}\lambda_{\mathrm{gas}} = d_1 + \mathit{\Delta}\ell\,, \\ \dfrac{1}{4}\lambda_{\mathrm{gas}} + \dfrac{1}{2}\lambda_{\mathrm{gas}} = d_2 + \mathit{\Delta}\ell \end{cases} \qquad \therefore \lambda_{\mathrm{gas}} = 2(d_2 - d_1)\,, \quad \mathit{\Delta}\ell = \frac{d_2 - 3d_1}{2}\,.$$

ここで，波の基本式より，

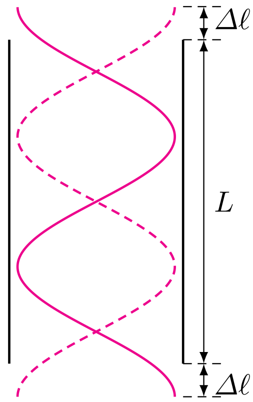
$$c = f\lambda_{\mathrm{gas}} = \frac{d_2 - d_1}{\ell}V\,.$$

問３　３度目の共鳴を考えて，

$$\frac{1}{4}\lambda_{\mathrm{gas}} + \frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{gas}} \cdot 2 = d_3 + \mathit{\Delta}\ell \qquad \therefore d_3 = 2d_2 - d_1\,.$$

問４　題意より，図のように共鳴する．よって，

$$\frac{\lambda_{\mathrm{gas}}}{2} \cdot 3 = L + 2\mathit{\Delta}\ell \qquad \therefore L = 2d_2\,.$$



問 5　$f = \dfrac{V}{2\ell}$ より，ℓ を小さくすると f は大きくなる．このとき，音速 c は変化しないので λ_{gas} は小さくなる．したがって，問 4 の次の共鳴を考えて，

$$\frac{\lambda_{\text{gas}}}{2}\cdot 4 = L + 2\Delta\ell \qquad \therefore \lambda_{\text{gas}} = \frac{3}{2}(d_2 - d_1)\,.$$

ここで，問 2 より，

$$c = \frac{d_2 - d_1}{\ell}V = \frac{3}{2}(d_2 - d_1)\frac{V}{2\ell'} \qquad \therefore \ell' = \frac{3}{4}\ell\,.$$