第１問（衝突）

【メモ】

・衝突は以下 2 種の式を連立．条件が明示的でないものもあるが，日々の演習では，衝突時の条件は何かを必ず確認したい．

$$\begin{cases} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{cases}$$

なお，固定面との衝突など外力制御がある場合の衝突では運動量保存則は成り立たないので注意．

【解答】

問１　はね返り係数の式より，

$$v - V = -1 \cdot (0 - V) \qquad \therefore v = 2V\,.$$

問２　運動量保存則・はね返り係数の式より，

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = 2m_1 V\,, \\ v_1 - v_2 = -1 \cdot (2V - 0) \end{cases} \qquad \therefore v_1 = \frac{2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} V\,, \quad v_2 = \frac{4m_1}{m_1 + m_2} V\,.$$

問３　問 2 より，

$$v_1 = \frac{2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} V < V \qquad \therefore \frac{m_1}{m_2} < 3\,.$$

問４　はね返り係数の式より，

$$u - V = -1 \cdot (v_1 - V) \qquad \therefore u = 2V - \frac{2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} V = \frac{4m_2}{m_1 + m_2} V\,.$$

よって，エネルギー収支の式より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} m_1 v^2 - 0 = W_1\,, \\ \dfrac{1}{2} m_1 u^2 - \dfrac{1}{2} m_1 {v_1}^2 = W_2 \end{cases} \qquad \therefore W = W_1 + W_2 = \frac{8m_1 m_2}{m_1 + m_2} V^2\,.$$

第２問（電気回路）

【メモ】

・電気回路の状態は，

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質}^{*1} \end{cases}$$

によって一意に定まる．

・ダイオードは順方向に電位差がかかっているときに電流が流れる[*2]．本問では理想的なダイオードを仮定している．

【解答】

問１　キルヒホッフ則より，

$$V - L\frac{\Delta I}{\Delta t} - rI = 0$$

ここでコイルの性質（電流の連続性）より $I = 0$ である．よって，

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{V}{\underset{\sim\sim}{L}}\,.$$

問２　コイルの性質より，十分時間経過で $L\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = 0$ である．よって，

$$I = \frac{V}{\underset{\sim\sim}{r}}\,.$$

問３　問 1，問 2 を踏まえて (エ)．なお，キルヒホッフ則を微分方程式として解いてもよい．

問４　キルヒホッフ則は，外側のループでは，

$$V - L\frac{dI}{dt} - rI = 0\,.$$

このとき，ダイオードには常に逆方向の電位差がかかり[*3]，ダイオードには電流が流れない．よって，(エ)．

問５　問 4 より，始状態で回路に流れる電流の値は $I = \dfrac{V}{r}$ である．キルヒホッフ則より，

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t} - rI - RI = 0\,.$$

[*2] 自明でないときは，電流が流れると仮定してキルヒホッフ則を立て，矛盾するかどうかを確認すればよい．

[*3] ダイオードに順方向の電流が流れると仮定すると逆方向の電流（電流が負の値）となり，ダイオードの性質に矛盾する．

このとき，ダイオードには順方向の電位差がかかり，また，コイルの性質（電流の連続性）から $I = \dfrac{V}{r}$ である．よって，

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{R+r}{L}\frac{V}{r} = -\left(1+\frac{R}{r}\right)\frac{V}{L}\,.$$

したがって，$\left|\dfrac{\Delta I}{\Delta t}\right|$ を大きくするには R を大きくすればよい．

問６　電池→抵抗→ダイオードと辿って電位を計算すると，$I = \dfrac{V}{r}$ より[*4]，

$$V_{\mathrm{S}} = -V - R\frac{V}{r} + V = -\left(1+\frac{R}{r}\right)V\,.$$

よって，$|V_{\mathrm{S}}| < V_{\mathrm{m}}$ を考えて，

$$\left(1+\frac{R}{r}\right)V \leq V_{\mathrm{m}}$$

$$R \leq \left(\frac{V_{\mathrm{m}}}{V} - 1\right)r \qquad \therefore \max\{R\} = \left(\frac{V_{\mathrm{m}}}{V} - 1\right)r\,.$$

[*4] 逆向きに辿れば逆符号になる．求める電位差の大きさではないのでこれでもよい．

第３問（分子運動論）

【解答】

問１ (1) $\dfrac{v_z}{2L}$ (2) $2mv_z$ (3) $\dfrac{m{v_z}^2}{L}$ (4) $\dfrac{m{v_{iz}}^2}{L}$ (5) $\dfrac{Nm\overline{{v_z}^2}}{L}$ (6) $\dfrac{Nm\overline{v^2}}{3L^3}$

(7) $pV = NkT$ (8) $\dfrac{3}{2}$

(a) 等方的

問２　分子運動に特別な方向がないとすれば，円筒内部の半数が z 正方向，残り半数が z 負方向に運動することを踏まえて[*5][*6]，

$$\Delta N = \frac{1}{2}\frac{A\sqrt{\overline{{v_z}^2}}\,\Delta t}{L^3}N = \frac{1}{2}\frac{N}{L^3}A\sqrt{\frac{k}{m}T}\,\Delta t = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{pA}{2\sqrt{mkT}}}\Delta t\,.$$

問３　粒子の流出入数が等しいことより，

$$\Delta N_1 = \Delta N_2$$

$$\frac{p_1 A}{2\sqrt{mkT_1}}\Delta t = \frac{p_2 A}{2\sqrt{mkT_2}}\Delta t \qquad \therefore \frac{p_1}{p_2} = \underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}}\,.$$

したがって，このようなモデルでは，分子の流出入が等しくかつ両側の温度（圧力）が等しいとき，両側の圧力（温度）も等しくなる．両側の温度・圧力が等しいことは自明ではない[*7]．

[*5] 金属電子論の話を思い出すとよい．粒子が一方通行の場合，断面積 S のある断面を Δt 間に通過する粒子数は，粒子の平均速さを v としたとき，$Sv\Delta t$ 内にある粒子がその断面を通過できる．この設定では，分子運動が等方的であることから，領域内部の粒子の半分が一方へ，残り半分が他方へ運動するため $\dfrac{1}{2}$ という因子がかかる．

[*6] 数密度（単位体積当たりの粒子数）は $\dfrac{N}{L^3}$ である．体積 $A\sqrt{\overline{{v_z}^2}}\Delta t$ の円柱領域内部の粒子数は，この体積に数密度をかければよい．

[*7] 問題を作成する側は注意が必要である．例えば，2025 年第 2 回全統記述模試の第 2 問ではこれを自明とした問題が出題されたが，これは出題ミスである．