

第 1 問 (衝突)

【メモ】

・衝突は以下 2 種の式を連立．条件が明示的でないものもあるが，日々の演習では，衝突時の条件は何かを必ず確認したい．

$$\begin{cases} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{cases}$$

なお，固定面との衝突など外力制御がある場合の衝突では運動量保存則は成り立たないので注意．

・時間追跡可能な運動は，①等加速度運動，②単振動，③空気抵抗型の 3 つである．①，②はいずれもエネルギーによる解法も選択できるが，時刻を考える必要がある場合は時間追跡する他ない．

【解答】

問 1 力学的エネルギー保存則より，衝突直前の A の速さは $\sqrt{2g\ell}$ である．運動量保存則・はね返り係数 1 の式より^{*1}，

$$\begin{cases} mv + Mv_0 = m\sqrt{2g\ell}, \\ v - v_0 = -1 \cdot (\sqrt{2g\ell} - 0) \end{cases} \quad \therefore v_0 = \frac{2m}{\underline{M+m}} \sqrt{2g\ell}.$$

問 2 B の位置は，Q の座標を $(0, h)$ とすると，

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

$$y = 0 \text{ を解いて } t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$\underline{d_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}}.$$

問 3 力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}M \cdot 0^2 + Mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}Mv_0^2 + 0 \quad \therefore \cos \theta = 1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}.$$

よって，

$$\underline{d_2 = \ell \sin \theta = \ell \sqrt{1 - \left(1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}\right)^2}}.$$

^{*1} 1 次元の弾性衝突という条件を，はね返り係数 1 の式と読んだ．

問4 $M = m$ の下では $v_0 = \sqrt{2g\ell}$ であり, $d_2/d_1 = 1$ より,

$$\sqrt{2g\ell}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \ell\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2g\ell}{2g\ell}\right)^2} \quad \therefore h = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\sim}\ell.$$

問5 $\mu = \frac{m}{M}$ ($0 < \mu \leq 1$) とする. このとき, $v_0 = \frac{2\mu}{1+\mu}\sqrt{2g\ell}$ ゆえ,

$$\frac{d_2}{d_1} = \sqrt{\frac{2\ell\frac{v_0^2}{2g} - \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2}{v_0^2\frac{2h}{g}}} = \sqrt{\frac{\ell}{2h} - \frac{v_0^2}{8gh}} = \sqrt{2 - 4\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^2}.$$

ここで $\frac{\mu}{1+\mu}$ は $0 < \mu \leq 1$ では単調増加関数ゆえ, $\frac{d_2}{d_1}$ は $0 < \mu \leq 1$ の範囲で単調減少関数である. $\mu \rightarrow 0$ で $\frac{d_2}{d_1} \rightarrow \sqrt{2}$ (等号不成立), $\mu \rightarrow 1$ で $\frac{d_2}{d_1} \rightarrow 1$ (等号成立) より,

$$\underbrace{1 \leq \frac{d_2}{d_1}}_{\sim} < \sqrt{2}.$$

第2問（荷電粒子の運動）

【解答】

問1 (1) $v \cos \theta$ (2) $\frac{mv \sin \theta}{eB}$ (3) $\frac{2\pi m}{eB}$

問2 z 方向の運動方程式より,

$$ma_z = -eE \quad \therefore a_z = -\frac{eE}{m}.$$

よって,

$$z = v \cos \theta t - \frac{eE}{2m} t^2 = 0 \quad \therefore t = \frac{2mv \cos \theta}{eE}.$$

この時刻が円運動の周期 T の n 倍と等しいことから,

$$\frac{2mv \cos \theta}{eE} = \frac{2\pi m}{eB} n \quad \therefore E = \frac{Bv \cos \theta}{\underbrace{\pi n}}.$$

問3 つりあいより,

$$0 = evB \sin \theta - eE' \quad \therefore E' = \underbrace{vB \sin \theta}.$$

問4 荷電粒子の位置は,

$$\begin{cases} y = v \sin \theta t, \\ z = v \cos \theta t - \frac{eE}{2m} t^2 \end{cases} \quad \therefore z = \frac{1}{\tan \theta} y - \frac{eE}{2mv^2 \sin^2 \theta} y^2.$$

第3問（熱機関，力学装置のないタイプ）

【メモ】

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程の定石は以下の通り．

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{可動部分のつりあい} & \rightarrow \text{圧力 } P \text{ の決定} \\ \text{状態方程式} & \rightarrow \text{温度 } T \text{ の決定（モル数 } n \text{ の場合も）} \end{array} \right.$$

熱力学第1法則は熱の決定式で，内部エネルギー変化は公式，気体のする仕事は PV 図の面積評価によって行う．

・むらのない断熱過程の定石は以下の通り．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ポアソンの公式} \\ \text{状態方程式} \end{array} \right.$$

断熱過程ゆえ熱力学第1法則は熱の決定式ではなくなる．内部エネルギー変化を公式から計算し，気体のする仕事を熱力学第1法則を通じて間接的に求めることとなる．

・今回は具体的な力学装置が与えられていないので，可動部分のつりあいから圧力の決定を行うことができない．そのため，気体の状態決定は状態方程式，ポアソンの公式から行う．

【解答】

問1 A → B では，温度一定ゆえ内部エネルギー変化は0である．また， pV 図から仕事は明らかに正であるので，熱力学第1法則より吸熱量もまた正である．B → C では，断熱ゆえ吸熱量は0である． pV 図から仕事は明らかに正であるので，熱力学第1法則より内部エネルギー変化は負である．C → D では，温度一定ゆえ内部エネルギー変化は0である．また， pV 図から仕事は明らかに負であるので，熱力学第1法則より吸熱量もまた負（放熱）である．D → A では，断熱ゆえ吸熱量は0である． pV 図から仕事は明らかに負であるので，熱力学第1法則より内部エネルギー変化は正である．よって，以下のようにまとめられる．

過程	気体の吸収する熱量	気体が外部にする仕事
A → B	正	正
B → C	ゼロ	正
C → D	負	負
D → A	ゼロ	負

問2 断熱過程において，状態方程式・ポアソンの公式より

$$\left\{ \begin{array}{l} pV = RT, \\ pV^\gamma = p'V'^\gamma \end{array} \right. \quad TV^{\gamma-1} = T'V'^{\gamma-1}.$$

よって,

$$\begin{cases} T_H V_B^{\gamma-1} = T_L V_C^{\gamma-1}, \\ T_H V_A^{\gamma-1} = T_L V_D^{\gamma-1} \end{cases} \quad \therefore \frac{V_C}{V_B} = \frac{V_D}{V_A} = \underbrace{\left(\frac{T_H}{T_L} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}, \quad \frac{V_A V_C}{V_B V_D} = 1.$$

問3 等温過程ゆえ系の内部エネルギー変化は0であり, 熱力学第1法則から系の吸収する熱量は系が外部した仕事に等しい.

問4 pV グラフの面積を計算して,

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} \left(\frac{RT_H}{V_A} + \frac{RT_H}{V_B} \right) (V_B - V_A) = \frac{1}{2} RT_H \left(\frac{V_B}{V_A} - \frac{V_A}{V_B} \right).$$

よって, 熱力学第1法則より,

$$Q_H = W_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} RT_H \left(\frac{V_B}{V_A} - \frac{V_A}{V_B} \right).$$

問5 同様にして,

$$Q_L = |W_{C \rightarrow D}| = \frac{1}{2} RT_L \left(\frac{V_C}{V_D} - \frac{V_D}{V_C} \right).$$

問6 問2の結果より $\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$ である. よって, 熱効率の定義より,

$$e = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} = 1 - \frac{T_L \frac{V_C}{V_D} - V_D/V_C}{T_H \frac{V_B}{V_A} - V_A/V_B} = 1 - \frac{T_L \frac{V_B V_D}{V_A V_C} \frac{(V_C/V_D)^2 - 1}{(V_B/V_A)^2 - 1}}{T_H} = 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

問7 ここでは,

- ①点 A' が点 D と一致すること
- ②点 B' が点 C と一致すること
- ③曲線 A'B' が曲線 BC と一致すること
- ④熱効率の値

を考えればよい.

A の体積 V_A を $\frac{V_D}{V_A}$ 倍すると V_D , A の圧力 p_A を $\frac{p_D}{p_A}$ 倍すると p_D になる. したがって, pV 平面上の点 A'(V_D, p_D) は点 D と一致する (①). また, 状態方程式と問2の結果 $\frac{V_D}{V_A} = \frac{V_C}{V_B}$ より,

$$\frac{p_D}{p_A} = \frac{V_A}{V_D} \frac{T_L}{T_H} = \frac{V_B}{V_C} \frac{T_L}{T_H} = \frac{p_C}{p_B}$$

ゆえ, 同様の計算により pV 平面上の点 B'(V_C, p_C) は点 C と一致する (②).

曲線 AB 上の各点を (V, p) , 曲線 A'B' 上の各点を (V', p') とする. このとき, 状態方程式を利用して,

$$p'V' = p \frac{p_D}{p_A} V \frac{V_D}{V_A} = RT_H \frac{RT_L}{RT_H} = RT_L$$

を満たすことから、曲線 $A'B'$ の各点は温度 T_L の等温曲線上に並ぶ (③)。

さて、仕事については pV 図の面積で評価できるので、 A' から B' の仕事 $W_{A' \rightarrow B'}$ の面積が、 A から B への仕事 $W_{A \rightarrow B}$ の面積に対し底辺が $\frac{V_D}{V_A}$ 倍、高さが $\frac{p_D}{p_A}$ 倍されることを考慮して、

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{RT_H}{V} dV,$$

$$W_{A' \rightarrow B'} = \frac{p_D}{p_A} \frac{V_D}{V_A} W_{A \rightarrow B} = \frac{T_L}{T_H} \int_{V_A}^{V_B} \frac{RT_H}{V} dV = \frac{T_L}{T_H} W_{A \rightarrow B}$$

となり、熱力学第 1 法則より、

$$\frac{Q_L}{Q_H} = \frac{T_L}{T_H} \quad \therefore e = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} = 1 - \underbrace{\frac{T_L}{T_H}}_{\text{④}}.$$