第１問（万有引力，仕事の計算）

【メモ】

・問 1 は等速円運動ゆえ，運動方程式の中心成分を立てればよい．今回はこれで事足りるが，他方向のつりあいを立てる必要がある場合もある．

・問 2 以降は取り立てて触れる点はない．

【解答】

問１　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{GM}{r}}}\,.$$

周期 T，角速度 ω はそれぞれ，

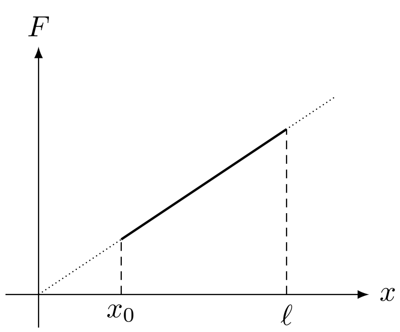
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \underset{\sim\sim\sim}{2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}}\,,\quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{r}\sqrt{\frac{GM}{r}}}\,.$$

問２　公式より，

$$F_{\mathrm{G}} = -G\frac{Mm}{(r+x)^2} = -G\frac{Mm}{r^2}\left(1+\frac{x}{r}\right)^{-2} \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim}{-G\frac{Mm}{r^2}\left(1-\frac{2x}{r}\right)}\,.$$

問３　遠心力を考慮して，

$$F = m(r+x)\omega^2 + F_{\mathrm{G}} = m(r+x)\frac{GM}{r^3} - G\frac{Mm}{r^2}\left(1-\frac{2x}{r}\right) \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3GMm}{r^3}x}\,.$$



$F-x$ グラフ

問４　仕事の定義より，

$$W = \int_{x_0}^{\ell}\frac{3GMm}{r^3}x\,dx = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3GMm}{2r^3}(\ell^2 - {x_0}^2)}\,.$$

問５　回転する座標系で観測した物体のエネルギー収支より[*1*2]，

$$\frac{1}{2}m{v_x}^2 - 0 = \frac{3GMm}{2r^3}(\ell^2 - {x_0}^2), \qquad \therefore v_x = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{3GM}{r^3}(\ell^2 - {x_0}^2)}}.$$

[*1] 勘違いをされないように：エネルギーを成分で分けているわけではない（エネルギーは成分分解できない）．回転座標系で観測した x 方向の運動方程式の両辺に v_x との積を取り，形式的にエネルギー収支の式を計算しただけである．

[*2] 物体の速さは，$\sqrt{{v_x}^2 + (r+\ell)\omega^2}$.

第２問（電磁誘導ーファラデイ則）

【メモ】

・ファラデイ則でも整合した結果が得られるが，現象としては $vB\ell$ の公式（ローレンツ力に由来する起電力）によって説明される．ファラデイ則では，ループ一周あたりの起電力が求まり，その値は

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

と計算され，起電力の正の向きは，磁束の正の向きに対して右ねじの方向を正と定める．

【解答】

問１　扇形の面積を計算して，

$$\Delta S = \frac{1}{2}r^2\omega \cdot 1 = \frac{1}{2}r^2\omega\,.$$

問２　ループを扇形に定める（磁束の正の向きは磁束密度と揃える）．ファラデイ則より，

$$|\mathcal{E}| = |-\frac{1}{2}Br^2\omega| = \frac{1}{2}Br^2\omega\,.$$

このとき，$\mathrm{P_1}$ の方が高電位．

問３　キルヒホッフ則より，導体棒には $I = \dfrac{Br^2\omega}{2R}$ の電流が流れる．よって，導体棒が磁場から受ける力の大きさは $F = \dfrac{B^2r^3\omega}{2R}$ であり，力のモーメントのつりあいより，

$$0 = F_{\mathrm{ex}}\frac{r}{2} - \frac{B^2r^3\omega}{2R}\cdot\frac{r}{2}\,, \qquad \therefore F_{\mathrm{ex}} = \frac{B^2r^3\omega}{2R}\,.$$

問４　装置 2 について，電流は $\mathrm{P_2}$ から $\mathrm{O_2}$ に向かって流れる．したがって，導体棒は d 方向に運動する．

問５　キルヒホッフ則より，

$$0 = \frac{1}{2}Br^2\omega - \frac{1}{4}Br^2\omega' - RI\,, \qquad \therefore I = \frac{Br^2}{4R}(2\omega - \omega')\,.$$

問６　装置 2 の導体棒が一定の角速度で運動することから，このとき $I = 0$ である．よって，消費電力は 0 であり，

$$\omega' = 2\omega\,(= \omega_2)\,.$$

【補足1】$\boldsymbol{vB\ell}$ 公式

中点の速さを用いて，

$$V = \frac{1}{2}r\omega Br = \frac{1}{2}Br^2\omega\,.$$

きちんと計算すれば，位置 x から $x + \varDelta x\,(\varDelta x = r/N)$ の微小区間にある部分に生じる起電力を，$x = 0$ から $x = r$ までの総和を計算して，

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\varDelta x \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega B \varDelta x \\ &= \int_0^r x\omega B\,dx \\ &= \frac{1}{2}Br^2\omega\,. \end{aligned}$$

【補足2】問6の詳細

装置2の導体棒の回転の運動方程式を考える[*3]．装置2の導体棒の慣性モーメントを M とし[*4]，アンペール力の作用点は導体棒の中心とする．すると，回転の運動方程式は，

$$M\frac{d\omega'}{dt} = I\frac{B}{2}r \cdot \frac{r}{2} = -\frac{B^2r^4}{16R}(\omega' - 2\omega)$$

となる．これは ω' について指数関数型の微分方程式となっており，$\omega' = 2\omega$ に収束することが確認できる．

[*3] 回転の運動方程式（高校範囲外）：$I\dfrac{d\omega}{dt} = N\,.$

I は慣性モーメント（回転のしにくさ），$\dfrac{d\omega}{dt}$ は角加速度，N は力のモーメントである．

[*4] 導体棒の慣性モーメント（m は導体棒の質量）：$M = \displaystyle\int_0^r \frac{m}{r}x^2\,dx = \frac{1}{3}mr^2\,.$

第３問（核反応，半減期）

【メモ】

・問 2 は複数物体系の力学と同様の手続きで立式すればよい．原子物理では，運動量の大きさ p を用いて運動エネルギーを $K=\dfrac{p^2}{2m}$ と表したり，逆に $p=\sqrt{2mK}$ と表すように誘導が付く場合もある．これらの表現を暗記する必要はないが，出くわした際に困惑しないようにしておく．

・α 崩壊は原子核からヘリウム原子核が放出されることで，質量数が 4，原子番号が 2 減少する．β 崩壊は原子核から速い電子（と反電子ニュートリノ）が放出される．このとき，1 つの中性子が 1 つの陽子に変わり，原子番号が 1 増加する．

【解答】

問１　エネルギー保存則より[*5]，

$$M_0c^2=M_1c^2+m^2+K_{\mathrm{Y}}+K_\alpha\,,\qquad \therefore K_{\mathrm{Y}}+K_\alpha=\underline{(M_0-M_1-m)c^2}\,.$$

問２　エネルギー・運動量保存則より，

$$\begin{cases}\sqrt{2M_1K_{\mathrm{Y}}}+\sqrt{2mK_\alpha}=0\,,\\ M_0c^2=M_1c^2+m^2+K_{\mathrm{Y}}+K_\alpha\,,\end{cases}\qquad \therefore K_\alpha=\underline{\frac{M_1}{M_1+m}(M_0-M_1-m)c^2}\,.$$

問３　力学的エネルギー保存則より，

$$k_0\frac{79e\cdot 2e}{r}=K\,,\qquad \therefore r=\underline{\frac{158k_0e^2}{K}}\,.$$

問４　質量数，陽子数の変化に注目して，

$$\begin{cases}-4n=-12\,,\\ -2n+k=-4\end{cases}\qquad \therefore n=\underline{3}\,,\quad k=\underline{2}\,.$$

問５　4.5×10^9 年前 のそれぞれの残存粒子数をそれぞれ ${}^{235}U(0)$，${}^{238}U(0)$ とする．そこから t 年後の残存粒子数はそれぞれ，

$$\begin{cases}{}^{235}U(t)={}^{235}U(0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/7.5\times10^8}\,,\\ {}^{238}U(t)={}^{238}U(0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/4.5\times10^9}\,.\end{cases}$$

$t=4.5\times10^9$ 年 でその存在比が $1:140$ を満たすので，

$$\frac{{}^{238}U(4.5\times10^9)}{{}^{235}U(4.5\times10^9)}=\frac{{}^{238}U(0)}{{}^{235}U(0)}\frac{(1/2)^{4.5\times10^9/7.5\times10^8}}{(1/2)^{4.5\times10^9/4.5\times10^9}}=\frac{140}{1}\,,\qquad \therefore\frac{{}^{238}U(0)}{{}^{235}U(0)}=\underline{\frac{35}{8}}\,.$$

[*5] これを反応熱と呼ぶ．

問６　与えられた数値より，

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{1.1\times10^{-7}\,\mathrm{kg}}{235^{-3}\,\mathrm{kg/mol}}\times6.0\times10^{23}\,/\mathrm{mol}\times2.0\times10^{8}\times1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J}\\
&= 8.98...\times10^{8}\,\mathrm{J}\\
&\fallingdotseq \underline{9.0\times10^{8}\,\mathrm{J}}\,.
\end{aligned}
$$