第 1 問（等加速度運動，衝突）

【メモ】

・問 1 から問 3 までは非等速円運動の問題．非等速円運動は，

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

を連立して解く[*1]．

・問 4 以降は複数物体系の運動．複数物体系の運動は，

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{（束縛条件）} \end{cases}$$

を連立して解くことが基本となる．本問は束縛条件まで考える必要のある問題である．このタイプは，受験生としては手が付かないことが多くかつ計算も煩雑になり，基本的に試験時間内で処理するのは難しい．

【解答】

問 1　加速度の成分はそれぞれ $a_x = a_y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}g$ である．よって，公式より，

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha - \dfrac{1}{\sqrt{2}}gt\,, \\ v_y = v_0\sin\alpha - \dfrac{1}{\sqrt{2}}gt\,. \end{cases}$$

問 2　打ち出されてから 1 回目の衝突までの時刻 t における物体の位置は，

$$\begin{cases} x = v_0\cos\alpha t - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}gt^2\,, \\ y = v_0\sin\alpha t - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}gt^2\,. \end{cases}$$

$y = 0$ を解いて，

$$t_1 = \frac{2\sqrt{2}\,v_0\sin\alpha}{g}\,,\quad L = x(t_1) = \frac{2\sqrt{2}\,{v_0}^2}{g}\sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)\,.$$

[*1] 力学的エネルギー保存則は接線方向の運動方程式と同値な関係にある．主要なテーマとしては，微小角の単振り子，ベータトロンでは，例外的に接線方向の運動方程式を考える．

問 3　$v_x(t_1)=0$ より，

$$v_0\cos\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}g\cdot\frac{2\sqrt{2}\,v_0\sin\alpha}{g}=0$$

$$\sqrt{1-\sin^2\alpha}-2\sin\alpha=0\qquad\therefore\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

問 4　衝突後の速度の y 成分は，

$$v_y(t_1)=-e(v_0\sin\alpha-2v_0\sin\alpha)=ev_0\sin\alpha\,.$$

衝突後から再度 $t=0$ とすると，物体の位置は[*2]，

$$\begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{2}\,{v_0}^2}{5g}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}gt^2\,, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}ev_0t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}gt^2\,. \end{cases}$$

$y=0$ を解いて，

$$t_2=\frac{2\sqrt{2}\,ev_0}{\sqrt{5}\,g}=et_1\,.$$

問 5　2 回目から 3 回目の衝突までの時間間隔は $t_3=e^2t_1$ である．よって，

$$x_{\mathrm{Q}}+v_{x,\mathrm{Q}}e^2t_1-\frac{1}{2\sqrt{2}}g(e^2t_1)^2=0$$

$$\frac{2\sqrt{2}\,{v_0}^2}{5g}-\frac{1}{2\sqrt{2}}(et_1)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}ge^3{t_1}^2-\frac{1}{2\sqrt{2}}(e^2t_1)^2=0$$

$$\frac{2\sqrt{2}\,{v_0}^2}{5g}-\frac{1}{2\sqrt{2}}g\left(\frac{2\sqrt{2}\,ev_0}{\sqrt{5}\,g}\right)^2e^2(1+2e+e^2)=0$$

$$\frac{2\sqrt{2}\,{v_0}^2}{5g}\left\{1-e^2(1+e)^2\right\}=0$$

$$\frac{2\sqrt{2}\,{v_0}^2}{5g}\{1+e(1+e)\}\{1-e(1+e)\}=0$$

$$\therefore\ 1-e(1+e)=0$$

$$\therefore\ e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

[*2] $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$L=\dfrac{2\sqrt{2}\,{v_0}^2}{5g}$ を用いた．

第２問（荷電粒子の運動，見かけの重力）

【解答】

問 1　つりあいより，

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{2}T - mg\,, \\ 0 = QE - \dfrac{\sqrt{3}}{2}T\,, \end{cases} \qquad \therefore E = \underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{\sqrt{3}\,mg}{Q}}\,, \quad g' = \sqrt{g^2 + \left(\dfrac{QE}{m}\right)^2} = \underset{\sim}{2g}\,.$$

問 2　エネルギー収支から逆算して[*3*4]，

$$W_{\mathrm{ex}} = \mathit{\Delta} U = mg'\frac{L}{2} = \underset{\sim\sim}{mgL}\,.$$

問 3　小球が A から時計回りに角度 θ だけ回転した位置にあるときを考える．運動方程式（中心成分）・力学的エネルギー保存則は，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{L} = T - mg'\cos\theta\,, \\ \dfrac{1}{2}mv^2 + mg'L(1-\cos\theta) = mg'L(1-\cos 60^\circ)\,. \end{cases}$$

$\theta = 0$ を考えて，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{L} = T - mg'\,, \\ \dfrac{1}{2}mv^2 = mg'L(1-\cos 60^\circ)\,, \end{cases} \qquad \therefore T = \underset{\sim\sim}{4mg}\,.$$

問 4　OA を軸とした単振り子と見なせるので，P の OA に関して対称な点（図 1 の点 Q）を考えればよい[*5]．よって，$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}L, \dfrac{1}{2}L\right)}$.

問 5　O の関して A と対称な位置（$\theta = \pi$ の位置）で張力の大きさ T が 0 以上であれば良い[*6]．運動方程式（中心成分）・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{L} = T + mg'\,, \\ \dfrac{1}{2}mv^2 + mg'\cdot 2L = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,, \end{cases} \qquad \therefore T = m\frac{{v_0}^2}{L} - 5mg' \geq 0\,, \qquad \therefore v_0 \geq \underset{\sim\sim}{10gL}\,.$$

---

*3 仕事の定義から求める方がシンプルだと思うが，全体の流れに沿った解答にした．定義による計算は【補足】を参照.

*4 見かけの重力を用いる際の，見かけの重力に対応した高さは図 1 を参照.

*5 問 3 より，角度 θ における v は，

$$v = \sqrt{2gL(2\cos\theta - 1)}$$

と求まり，$v = 0$ を満たす角度 θ を求めても良い（$\theta = -60^\circ$）.

*6 今の場合，運動方程式と力学的エネルギー保存則より，

$$T = m\frac{{v_0}^2}{L} - 2mg'L + 3mgL'\cos\theta$$

と求まり，張力の大きさ T は $\theta = \pi$ のとき最小とわかる（わざわざ計算しなくてもわかることだけど）.

問 6　P での速さは，

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{L}{2}\,, \qquad \therefore v = \sqrt{gL}\,.$$

小球は zx 平面内では等速円運動を行い，その半径は運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{(\sqrt{gL})^2}{r} = Q\sqrt{gL}\,B\,, \qquad \therefore r = \frac{m\sqrt{gL}}{QB}\,.$$

よって，円運動の周期 T は，

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{QB}$$

であり，yz 平面を 1 回目に通過する位置は $\ddot{y} = -g$ より，

$$y = \underline{-L - \frac{g}{2}\left(\frac{\pi m}{QB}\right)^2}\,.$$

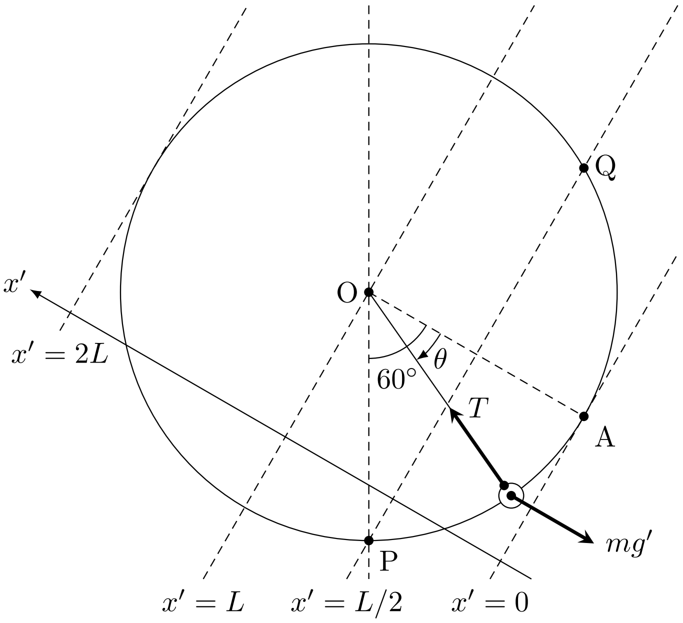

図 1　x' は見かけの重力に対応した「見かけの高さ」を表す

【補足】仕事

小球に加える外力 $\vec{f}_{\text{ex}}$ は重力，およびクーロン力とつりあう．よって，定義より，

$$W_{\text{ex}} = -\vec{f}\cdot\varDelta\vec{r} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\,mg \\ mg \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}L \\ -\frac{L}{2} \end{pmatrix} = \underline{mgL}\,.$$

第３問（波動いろいろ）

【メモ】

・問 1，問 3，問 4 は幾何光学．問 1，問 3 で考えるのは図形の関係のみで，問 1 は角度を見つける（対頂角），問 3 は長さから長さを決定する（相似に注目）．問 4 は屈折の法則を用いる[*7]．

・問 2 は回折格子の干渉．

【解答】

問 1　図 3 − 1 より，

$$\tan 2\theta = \frac{Y}{X}$$
$$2\theta \fallingdotseq \frac{Y}{X} = \frac{10\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{1.00\,\mathrm{m}}\,, \qquad \therefore \theta = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{5.0\times10^{-3}\,\mathrm{rad}}\,.$$

問 2　m 次の明線を観測する方向を θ_m とすると，干渉条件より，

$$\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_m = 2m\pi$$
$$\theta_m \fallingdotseq \frac{\lambda}{d}m\,.$$

$m = 1$ を考えて，

$$d = \frac{\lambda}{\theta_1} \fallingdotseq \frac{\lambda}{\tan\theta_1} = \frac{\lambda}{Y/X} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{5.0\times10^{-5}\,\mathrm{m}}\,.$$

問 3　図 3 − 2 より，

$$\frac{q}{f} = \frac{Y-q}{X-f}$$
$$\therefore q = \frac{Y}{X}f = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{4.0\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\,.$$

問 4　屈折の法則より（図 3 − 3），

$$n\sin\alpha = 1\cdot\sin\beta\,, \qquad \therefore \beta \fallingdotseq n\alpha\,.$$

よって，

$$\frac{Y}{X} = \tan(\beta-\alpha) \fallingdotseq \beta-\alpha = (n-1)\alpha\,, \qquad \therefore \alpha = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2.0\times10^{-2}\,\mathrm{rad}}\,.$$

[*7] 図形の考察手順は過去の教材や補講のノートを参照．

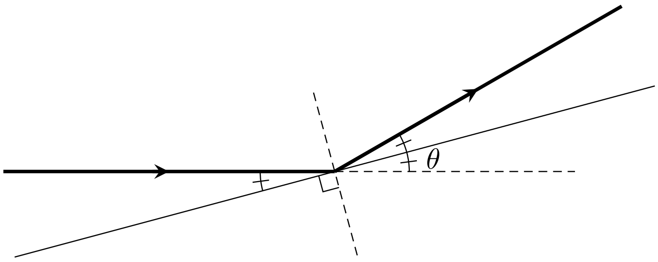

図 3 − 1

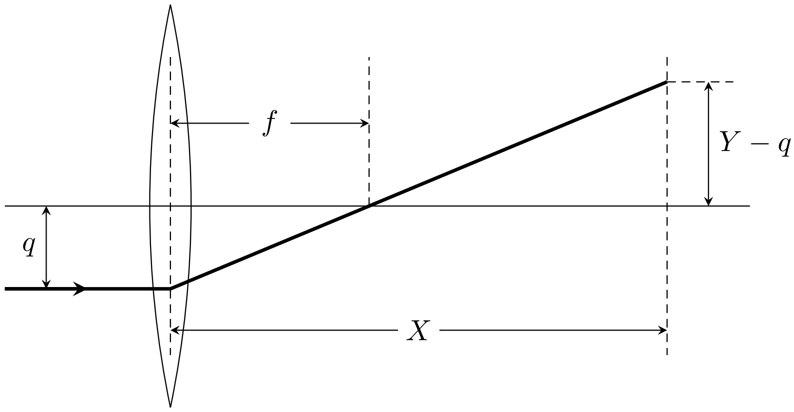

図 3 − 2

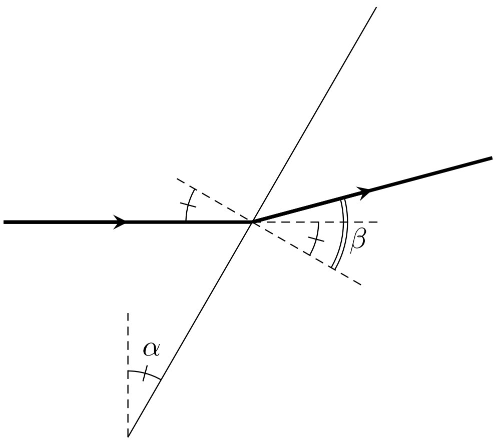

図 3 − 3