

I 図のように、水平でなめらかな床の上に質量 M の台が置かれている。質量 m の大きさの無視できる小球を台の右端とばね定数 k のばねで連結し、ばねが自然長となるように台の上に静かに置いた。物体の位置は床に固定された座標で表し、水平方向に x 軸をとり、右向きを正とする。このときの小球の位置は 0 、台の重心の位置は X_0 であった。時刻 $t = 0$ において、小球のみに右向きの速さ v_0 を与えた。時刻 $t > 0$ における台および小球の運動は、2 物体の重心の運動と台に対する小球の運動に分解して考えることができる。台および小球はそれぞれ x 軸方向に運動し、台と床、および、台と小球の間には摩擦ははたらかないとする。ばねの質量は無視でき、また、台の上面は十分に広く運動の最中に小球が台から落ちることはないとする。このとき、以下の問いに答えよ。問 6 を除き、床の上に静止した観測者の立場で考える。解答は全て解答用紙の所定の欄に記入せよ。考え方や計算の要点も記入せよ。

問 1 小球と台からなる 2 物体が静止しているときの重心の位置を求めよ。

問 2 時刻 $t > 0$ における、初球と台からなる 2 物体の重心の位置を求めよ。

問 3 ばねが最も縮んだときの小球の速さを求めよ。

問 4 問 3 のときのばねの縮み量 d_1 を求めよ。

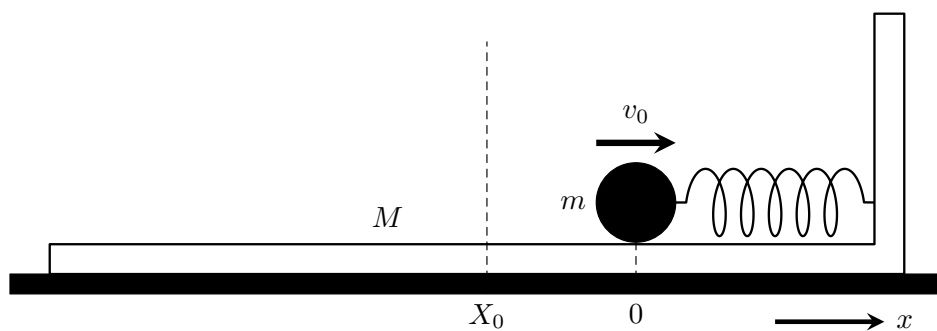
問 5 時刻 $t > 0$ における運動を考える。ばねの長さの自然長からの変化量を d (縮んでいるとき： $d > 0$ 、伸びているとき： $d < 0$ とする)。台の加速度を A として、台の運動方程式を書け。

問 6 問 5 の運動を、台とともに動く観測者の立場で考える。

(a) この観測者から見た小球の加速度を a として、小球の運動方程式を書け。ただし、前問の加速度 A をそのまま用いよ。

(b) 小球が台に対して単振動することを示せ。また、その角振動数 ω を求めよ。

問 7 時刻 $t > 0$ における台の重心の位置を求めよ。ただし、問 4 の d_1 と問 6 の ω をそのまま用いてよい。



II 図 1 に示すように、質量 m 、電荷 Ze ($Z = 1, 2, e > 0$) の 2 種類の荷電粒子が、連続的に単位時間あたり一定の個数、一定の個数比で、長さ d の領域に電場 E_a を持つ加速装置によって加速・放出される。座標軸は図 1 のように紙面内に x 軸と y 軸をとり、電場 E_a は $+x$ の向きである。この 2 種類の荷電粒子が放出される個数比を計測するため、加速装置の下流に、2 枚の電極をもつ検出器を設置した。2 枚の電極はそれぞれ長さ ℓ をもち、お互いに絶縁され隙間なく並んでいる。電極から距離 ℓ の場所にある入り口から検出器に入った荷電粒子は、内部の一樣な磁束密度 B_d の z 軸方向磁場によって方向を変え、電極 a または b に到達すると、それぞれ電流計 A_a, A_b に電流が流れることで検出される。このとき、単位時間あたり N 個の電荷 q の荷電粒子が電極に到達したとすると、電流計で計測される電流値は qN となり、電極以外の箇所にあった荷電粒子は計測結果に影響を与えない。

このとき、以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度、荷電粒子同士に働く力や荷電粒子が装置内の電場、磁場にあたえる影響は無視できるものとし、装置外の空間では、電場や磁場はないものとする。解答は全て解答用紙の所定の欄に記入し、問 4 と問 5 については、考え方や計算の要点も記入すること。

まず、図 2 のように、個の検出器に 1 種類の荷電粒子が入った場合の試験を行うため、磁束密度 B_s の z 軸方向磁場と $+y$ 方向電場 E_s によって 1 種類の荷電粒子を選別する選別装置を加速装置と検出器の間に入れた。

問 1 加速装置から放出される電荷 Ze の荷電粒子の速さを d, e, E_a, m, Z を用いて示せ。ただし、荷電粒子の初速は加速後の速さより十分小さく、無視できるものとする。

問 2 選別装置は、検出器に入れたい速さの荷電粒子のみを直進させる装置である。電荷 Ze の荷電粒子が選別装置内を直進し、検出器に入るためには B_s は図の (ア) または (イ) のどちら向きにすればよいか。また、その大きさを d, e, E_a, E_s, m, Z のうち必要なものを用いて示せ。

問 3 問 2 で選別された電荷 Ze の荷電粒子が検出器に入り、内部で円運動を始める。この荷電粒子の検出器内部での軌跡の半径を、 B_d, d, e, E_a, m, Z のうち必要なものを用いて示せ。ただし、 B_d の向きは問 2 の B_s と同じ向きとする。

問 4 電荷 Ze の荷電粒子を電極 a, b で検出するために必要な磁束密度 B_d の大きさの範囲を、以下の形式で $B_d, d, e, E_a, \ell, m, Z$ のうち必要なものを用いて示せ。

電極 a で検出するための範囲： $\boxed{B_1} < B_d < \boxed{B_2}$

電極 b で検出するための範囲： $\boxed{B_3} < B_d < \boxed{B_4}$

次に，選別装置を取り除いて図 1 の状態に戻し，2 種類の荷電粒子が検出器に入りこむ状態にした．

問 1 $Z = 1, 2$ の荷電粒子を別々の電極で電流として同時に計測するための B_d の範囲を確認するため， B_d の値を 0 から徐々に増加させ，電流計 A_a, A_b で計測される電流値の B_d に対する変化をそれぞれグラフに示せ．また， $Z = 1, 2$ の荷電粒子を別々の電極で同時に計測するための B_d の範囲を答えよ．ただし，2 つの荷電粒子が別々の電極で検出されているときの電流計 A_a, A_b の電流の値をそれぞれ I_a, I_b ($I_a > I_b > 0$) とする．また，記号は $B_d, d, e, E_a, \ell, m, Z$ のうち必要なものを用いよ．

問 2 2 つの荷電粒子が別々の電極で検出される条件下で，検出器に単位時間あたりに入射された $Z = 1$ と $Z = 2$ の荷電粒子の個数の比を $B_d, d, e, E_a, I_a, I_b, \ell, m, Z$ のうち必要なものを用いて示せ．

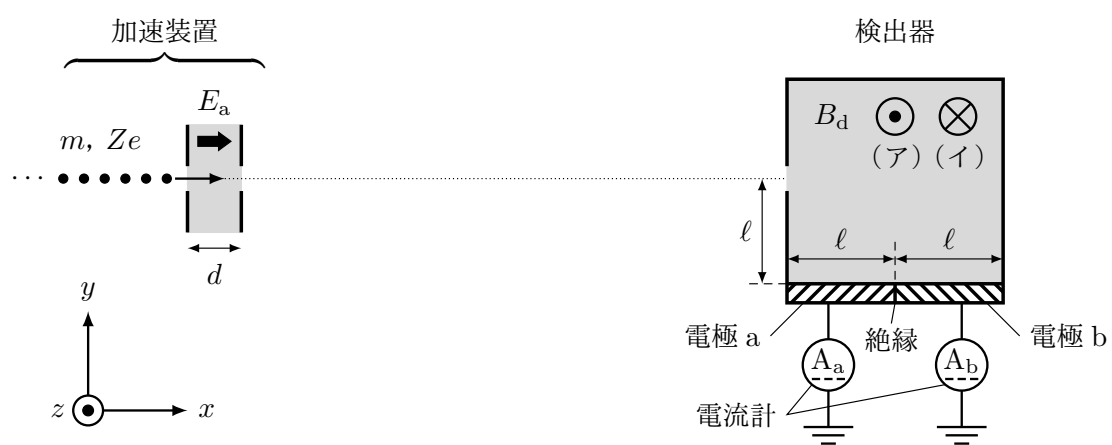


図 1

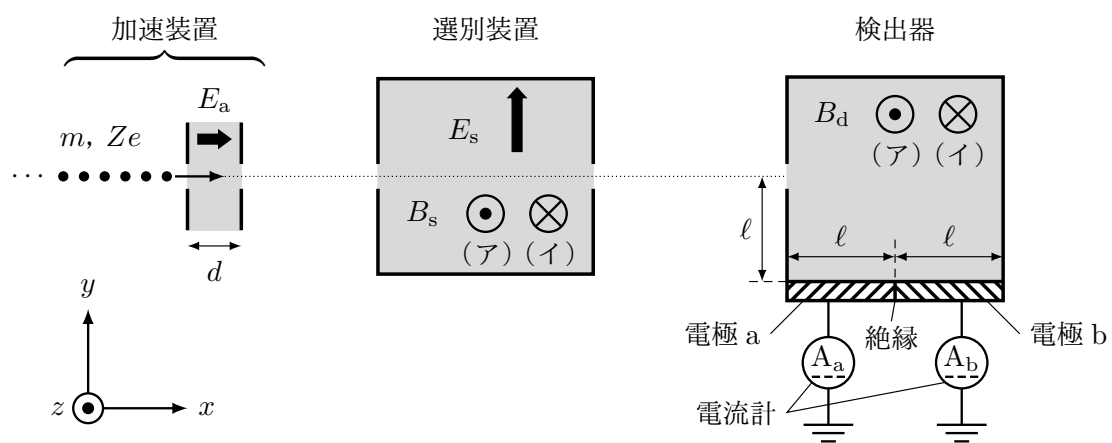


図 2

Ⅲ 単一の理想気体からなる大気を考える．地表面における気温を絶対温度で T_0 ，大気圧を p_0 とする．気温 T と大気圧 p は高度により変化し，地表面からの高度 h においては

$$T = T_0 \left(1 - \frac{h}{3h_0} \right)$$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{h}{h_0} \right)$$

で与えられる．ただし， h_0 は長さの次元を持つ定数であり，この式の適用範囲は $0 \leq h \leq 0.9h_0$ である．大気は静止状態にあり，以下の操作は大気の温度と圧力に影響を与えないものとする．

この大気中を自由に上下できるようなシリンダーとピストンからなる器具を用意し，シリンダー内部に大気と同じ理想気体を n [mol] 封入した．この理想気体の定積モル比熱は C_V で，定圧モル比熱は C_p ，その比は $\gamma = C_p/C_V = 5/3$ である．気体定数は R とする．このとき，以下の問いに答えよ．解答は全て解答用紙の所定の欄に記入せよ．また，考え方や計算の要点も記入せよ．

ただし，ピストンは重さが無視できるほど軽い断熱性の物質から出来ており，抵抗なく滑らかに動く．シリンダー内部の気体の温度は内部に取り付けられたヒーターで変えられるものとする．シリンダーの熱容量は無視できる．器具の高さは h_0 に比べて十分小さく，シリンダーの上部と下部における大気の温度差と気圧差は考慮しなくてよい．また，重力による位置エネルギーも考慮しなくてよい．

問1 器具をピストンが自由に動ける図1の状態にしてシリンダーを地表面 $h = 0$ に固定したところ，シリンダー内部の気体の温度は T_0 ，体積は V_0 であった．次に図2のようにシリンダーを断熱カバーで覆い，内部の気体をヒーターで $T_1 = 2T_0$ まで加熱したところ，気体の体積は V_1 となった（過程1）．

- (a) V_1 を V_0 を用いて表せ．
- (b) 過程1でヒーターがシリンダー内部の気体に加えた熱量はいくらか．
- (c) 過程1でシリンダー内部の気体がピストンに対してした仕事はいくらか．

問2 過程1の結果，気体の体積が V_1 となった状態で，図3のようにピストンに位置を固定し，シリンダーの固定具を外したところ非常に小さな浮力が働いて器具は静かに上昇した．

- (d) 大気の密度は高度によって変化する． $h = 0$ における密度を ρ_0 とすると，高度 h における大気の密度は

$$\rho = \rho_0 \frac{1 - Ah}{1 - Bh}$$

という形で表せる．係数 A と B を h_0 を用いて表せ．

- (e) シリンダー，ピストン，断熱カバー，ヒーター，ピストン固定具はそれぞれ非常に軽くその

重さを無視できる．よってシリンダー内部の気体と大気の密度が等しくなったところで静止する．その高度は $h_1 = \frac{3}{5}h_0$ であることを示せ．

問 3 図 4 のように高度 h_1 で器具を固定し，ピストンを固定したまま断熱カバーを外したところ，シリンダー内部の気体は冷やされて大気と同じ温度となった（過程 2）．

(f) シリンダー内部の気体の圧力 p_1 を p_0 を用いて表せ．

(g) 過程 2 でシリンダー内部の気体が放出する熱量はいくらか．

問 4 次に図 5 のようにピストンを固定する器具を解除し，十分な時間をおいた（過程 3）．

(h) 過程 3 の後のシリンダー内部の気体の体積 V_2 を V_1 を用いて表せ．

問 5 図 6 のようにシリンダーを断熱カバーで覆い，ピストンが自由に動けるような状態でシリンダーの固定具を外し，器具を静かに手動で $h = 0$ まで降ろしたところ，シリンダー内部の気体の体積は V_3 ，温度は T_3 となった（過程 4）．

(i) V_3 を V_0 を用いて表せ．ただし，以下の数値を用いてもよい．

$$2^\gamma = 3.2, \quad 3^\gamma = 6.2, \quad 4^\gamma = 10, \quad 5^\gamma = 15$$

$$2^{\frac{1}{\gamma}} = 1.5, \quad 3^{\frac{1}{\gamma}} = 1.9, \quad 4^{\frac{1}{\gamma}} = 2.3, \quad 5^{\frac{1}{\gamma}} = 2.6$$

(j) T_3 を T_0 で表せ．

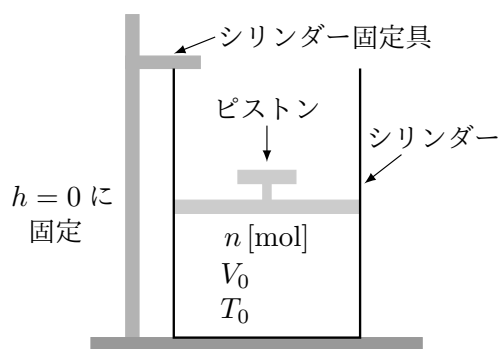


図 1

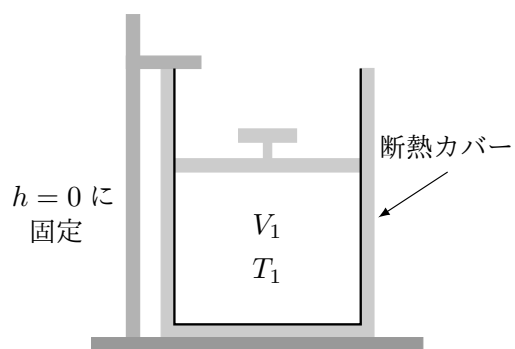


図 2

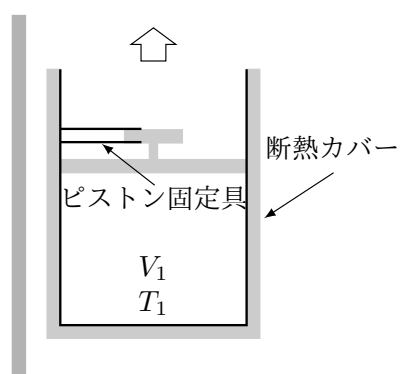


図 3

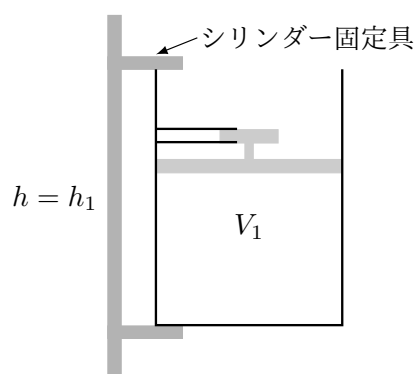


図 4

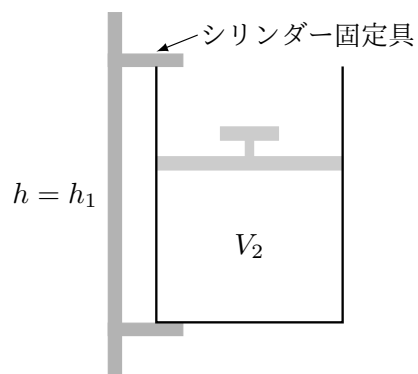


図 5

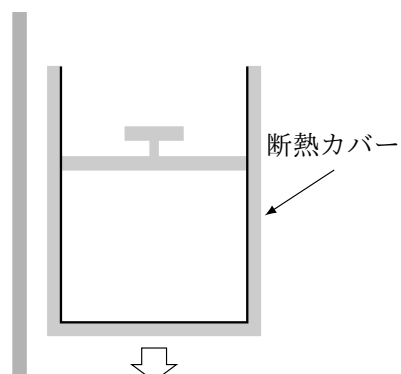


図 6

I 多体系，時間追跡（単振動）

【メモ】

・問 1 から問 4 までは複数物体系の基本通り，

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{全体のエネルギー保存則} \end{array} \right.$$

で処理を行えばよい．

・問 5 以降は，今の設定が複数物体系でも例外的な運動方程式が解けるケース^{*1}であることから，運動方程式を解くような誘導となっている．今回は台から見た観測者を利用した（慣性力を考えるタイプの）誘導となっている．他のよくある誘導については【補足】を参照．

【解答】

問 1 重心の定義より，

$$x_{\text{CM}} = \frac{M}{\underbrace{M+m}} X_0.$$

問 2 以下位置，および速度について，小球に関する量を小文字，台に関する量を大文字で記す．運動量保存則より，

$$mv + MV = mv_0.$$

両辺時間積分をすれば，

$$mx + MX = mv_0 t + \text{const}.$$

$t = 0$ で $x = 0$ ， $X = X_0$ より，

$$mx + MX = mv_0 t + MX_0.$$

よって，

$$x_{\text{CM}}(t) = \frac{mx + MX}{m + M} = \frac{M}{\underbrace{M+m}} X_0 + \frac{m}{\underbrace{M+m}} v_0 t.$$

問 3 2 物体とばねからなる系を考える．系のエネルギー・運動量保存則より，

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_0^2, \\ mv + MV = mv_0. \end{array} \right.$$

^{*1} 連立微分方程式となっているが，上手いこと式変形を行うことで解ける微分方程式へと帰着させることができる．

ばねの縮みが最大するとき、 $v = V$ より^{*2},

$$mv + Mv = mv_0, \quad \therefore v = V = \frac{m}{\underbrace{M+m}}v_0.$$

問4 問3より,

$$\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}kd_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad \therefore d_1 = v_0\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}.$$

問5 縮み d のとき, 台の運動方程式は,

$$\underbrace{MA = +kd}.$$

問6 (a) 台とともに動く観測者から観測した小球の運動方程式は, 慣性力を考慮して,

$$\underbrace{ma = -kd - mA}.$$

(b) 2物体の運動方程式より,

$$ma = -kd - mA = -k\left(1 + \frac{m}{M}\right)d, \quad \therefore a = -\frac{M+m}{Mm}kd.$$

ここで, 時刻 t での小球の位置を x , 台の位置を X , ばねの自然長を ℓ とする. このとき, 時刻 t でのばねの縮み d は,

$$d = \ell - (X - x)$$

と書け, $t = 0$ で $d = 0$ より,

$$0 = \ell - (X_0 - 0), \quad \therefore \ell = X_0$$

と ℓ を求めることができる. また, 縮み d の時間微分を考えれば,

$$\ddot{d} = \ddot{x} - \ddot{X}$$

となり, 台に対する小球の相対加速度となる (すなわち, $\ddot{d} = a$ である). よって, d は単振動の微分方程式を満たすことがわかる. その角振動数は運動方程式より,

$$\omega = \sqrt{\frac{M+m}{\underbrace{Mm}}k}.$$

^{*2} 2物体の相対的な位置が極小値を取るので, 相対速度は0となる.

問 7 運動方程式より,

$$X_0 - (X - x) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t).$$

初期条件 $x(0) = 0$, $X(0) = X_0$, $v(0) = v_0$, $V(0) = 0$ より,

$$X_0 - (X - x) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) = d_1 \sin(\omega t).$$

また, 問 2 より,

$$mx + MX = mv_0 t + MX_0.$$

2 式を X について解いて,

$$X = X_0 + \underbrace{\frac{m}{M+m} \{v_0 t - d_1 \sin(\omega t)\}}.$$

【補足 1】運動量保存則についての確認

時刻 t における両物体の運動方程式は, ばねの自然長を ℓ とすれば,

$$\begin{cases} M \frac{dV}{dt} = +k \{\ell - (X - x)\}, \\ m \frac{dv}{dt} = -k \{\ell - (X - x)\}. \end{cases}$$

2 式和を取って*3,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mv + MV) &= 0 \\ \therefore mv + MV &= mv(0) + MV(0). \end{aligned}$$

【補足 2】重心運動エネルギーと相対運動エネルギー

重心速度を v_{CM} , 小球に対する台の相対速度を v_{re} と記すと, それぞれ,

$$v_{\text{CM}} = \frac{mv + MV}{m + M}, \quad v_{\text{re}} = v - V.$$

このとき, 2 物体の運動エネルギーの和は,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(M+m)v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v_{\text{re}}^2$$

と書ける*4.

*3 質量が一定なことを暗に利用している.

*4 相対運動エネルギーの質量の部分 $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ を換算質量と呼ぶ.

右辺に v_{CM} , v_{re} を入れてみると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(M+m)v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v_{\text{re}}^2 &= \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{mv+MV}{m+M}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(v-V)^2 \\ &= \frac{M^2V^2 + 2MmVv + m^2v^2 + Mm(v^2 + V^2 - 2Vv)}{2(M+m)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{m^2 + Mm}{M+m}v^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2 + Mm}{M+m}V^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2\end{aligned}$$

と確認できる.

【補足 3】よくある誘導その①（重心運動と相対運動）

【補足 1】より, 時刻 t における両物体の運動方程式は,

$$\begin{cases} M\frac{dV}{dt} = +k\{\ell - (X - x)\}, \\ m\frac{dv}{dt} = -k\{\ell - (X - x)\}. \end{cases}$$

2 式の和を取った式^{*5}を t で 2 回積分すれば^{*6},

$$mx + MX = mv(0)t + MV(0)t + mx(0) + MX(0).$$

続いて, 両方の式を各物体の質量で割ってから差を取って^{*7},

$$\frac{d}{dt}(v - V) = -k\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\{\ell - (X - x)\} = -\frac{M+m}{Mm}k(x - X + \ell).$$

よって, $x - X + \ell$ は単振動の微分方程式を満たし, 角振動数を $\omega = \sqrt{\frac{M+m}{Mm}}k$ と置けばその解は,

$$x - X + \ell = \frac{v(0) - V(0)}{\omega} \sin(\omega t) + \{x(0) - X(0) + \ell\} \cos(\omega t)$$

と表される. あとは重心の運動方程式の結果と合わせることで, x , X が求まる.

【補足 4】よくある誘導その②（重心系を利用）

ここでは, 重心とともに動く観測者から観測した両物体の運動方程式を考える. 【補足 1】より, 重心は等速で運動をする. そのため, 重心とともに動く観測者から観測した両物体の運動方程式を考える際, 慣性力を考える必要はない (重心に対する相対加速度も各物体の加速度と等しい).

^{*5} 重心の運動方程式.

^{*6} 【補足 1】の運動量保存則をもう一度 t で積分するだけ.

^{*7} 言うまでもないが, 左辺は相対加速度を表す.

重心から観測した各物体の運動を論じる際、ばねの長さが変わることによってばね定数が変化することに注意する必要がある。ばねのばね定数は長さを $\frac{1}{n}$ 倍したときに n 倍となるので*⁸、重心でばねを分割したとき*⁹、小球側のばね定数を k_1 、台側のばね定数を k_2 とするとそれぞれ、

$$k_1 = \frac{k}{M/(m+M)}, \quad k_2 = \frac{k}{m/(m+M)}.$$

以上より、重心に対する各物体の位置をそれぞれ $x' = x - x_{\text{CM}}$, $X' = X - x_{\text{CM}}$ としたとき、各物体の運動方程式は、

$$\begin{cases} M\ddot{X}' = -\frac{M+m}{m}k\left(X' - \frac{m}{M+m}\ell\right), \\ m\ddot{x}' = -\frac{M+m}{M}k\left(x' + \frac{M}{M+m}\ell\right), \end{cases}$$

となり、この式から共に各振動数は等しく $\omega = \sqrt{\frac{M+m}{Mm}}k$ とわかる。この式を与えられた初期条件の下で解き、重心の運動と合わせることで、 x , X が求まる。

*⁸ ばねの伸縮を x とすると、そのときはたらく弾性力は

$$f = kx = nk\left(\frac{1}{n}x\right)$$

より、ばねを $\frac{1}{n}$ 倍の長さにしたとき、その部分の伸びは $\frac{1}{n}$ 倍となり、同時にばね定数は n 倍されることが確認できる。

*⁹ ばねの全長を $L (= X - x)$ としたとき、重心から小球までの長さ L_1 、および重心から台までの距離 L_2 はそれぞれ、

$$\begin{aligned} L_1 = x_{\text{CM}} - x &= \frac{MX + mx}{M + m} - x = \frac{M}{M + m}(X - x) = \frac{M}{M + m}L, \\ L_2 = X - x_{\text{CM}} &= X - \frac{MX + mx}{M + m} = \frac{m}{M + m}(X - x) = \frac{m}{M + m}L \end{aligned}$$

となる。ばねの伸びは一樣であるから、ばねを重心で切断したとき、切断後のそれぞれのばねの伸びも $L_1 : L_2 = \frac{M}{M + m} : \frac{m}{M + m}$ に内分される。

II 荷電粒子の運動

【メモ】

電場，磁場の入っただけの力学．

【解答】

問 1 電位の基準を右側の極板とすれば，力学的エネルギー保存則より^{*10}，

$$\frac{1}{2}mv^2 + Ze \cdot 0 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + Ze \cdot E_a d, \quad \therefore v = \sqrt{\frac{2ZeE_a d}{m}}.$$

問 2 クーロン力とローレンツ力がつりあうような向きを考えればよいので (ア) の向き．大きさはつりあいより，

$$0 = ZeE_s - ZevB_s, \quad \therefore B_s = E_s \sqrt{\frac{m}{2ZeE_a d}}.$$

問 3 運動方程式（中心成分）より，

$$m \frac{v^2}{r} = ZevB_d, \quad \therefore r = \frac{1}{B_b} \sqrt{\frac{2mE_a d}{Ze}}.$$

問 4 電極 a で検出されるためには，軌道半径が

$$\begin{cases} 2r > \ell, \\ r < \ell, \end{cases} \quad \therefore \frac{\ell}{2} < r < \ell.$$

となればよい．よって，

$$\frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{2mE_a d}{Ze}} < B_d < \frac{2}{\ell} \sqrt{\frac{2mE_a d}{Ze}},$$

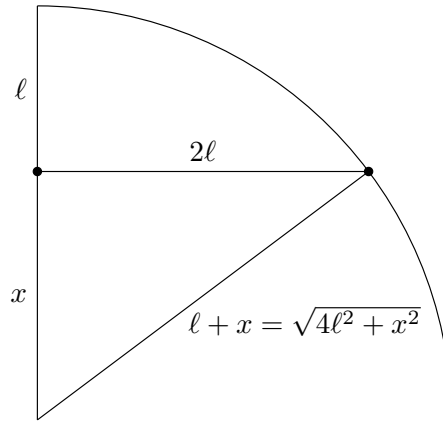
電極 b も同様に考える．下限は ℓ とすぐにわかる．上限は，円軌道の半径を $\ell + x$ と置くと三平方の定理より（図を参照），

$$\ell + x = \sqrt{4\ell^2 + x^2}, \quad \therefore x = \frac{3}{2}\ell.$$

よって，軌道半径は $\ell < r < \frac{5}{2}\ell$ を満たせばよく，

$$\frac{2}{5\ell} \sqrt{\frac{2mE_a d}{Ze}} < B_d < \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{2mE_a d}{Ze}},$$

^{*10} 一応コメントしておく，荷電粒子の運動エネルギーと（空間が蓄える）クーロン力の位置エネルギーの和が一定になる．



問 5 以下簡単のため $\beta = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{mE_a d}{e}}$ とする. $Z = 1, 2$ の半径をそれぞれ r_1, r_2 とすると,

$$r_1 = \frac{1}{B_d} \sqrt{\frac{2mE_a d}{e}}, \quad r_2 = \frac{1}{B_d} \sqrt{\frac{mE_a d}{e}}.$$

$r_1 > r_2$ より, 別々の電極で検出するときは, $Z = 1$ の粒子を電極 b で, $Z = 2$ の粒子を電極 a で検出することになる. このときの電流計の読みが, $Z = 1$ が電極 b で検出されて I_b , $Z = 2$ が電極 a で検出されて I_a である.

続いて, $Z = 1$ の粒子が各電極で検出されるための B_d の範囲は,

$$\begin{aligned} \text{a} : & \sqrt{2}\beta < B_d < 2\sqrt{2}\beta, \\ \text{b} : & \frac{2\sqrt{2}}{5}\beta < B_d < \sqrt{2}\beta. \end{aligned}$$

同様に, $Z = 2$ の粒子が各電極で検出されるための B_d の範囲は,

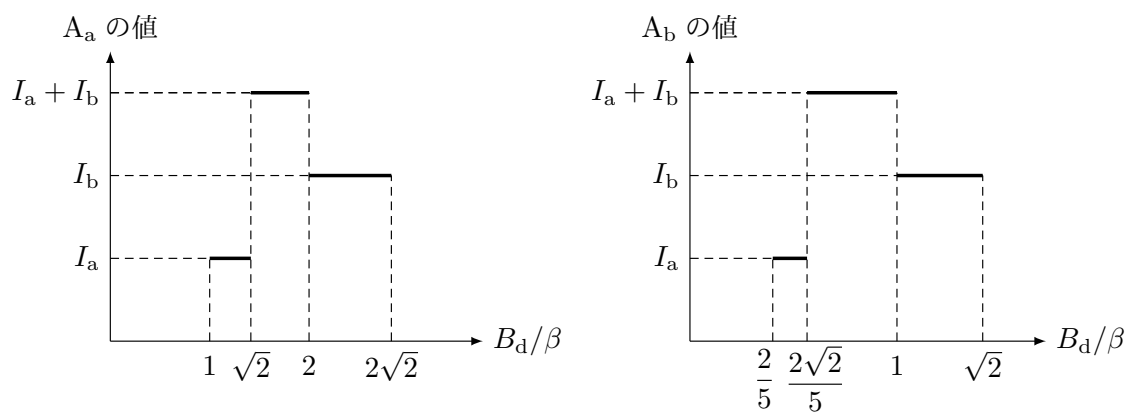
$$\begin{aligned} \text{a} : & \beta < B_d < 2\beta, \\ \text{b} : & \frac{2}{5}\beta < B_d < \beta. \end{aligned}$$

以上から, 同時に別々の電極で計測するときは^{*11},

$$\begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{5}\beta < B_d < \sqrt{2}\beta, \\ \beta < B_d < 2\beta, \end{cases} \quad \therefore \underbrace{\frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{mE_a d}{e}} < B_d < \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{2mE_a d}{e}}}_{\text{~~~~~}}.$$

また, グラフは以下ようになる.

^{*11} 上が電極 b で $Z = 1$ の条件, 下が電極 a で $Z = 2$ の条件.



問 6 I_a , I_b はそれぞれ,

$$I_a = 2eN_2, \quad I_b = eN_1.$$

よって,

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{I_a}{\underbrace{2I_b}}.$$

Ⅲ 気体の状態変化（基本形と断熱）

【メモ】

- ・ p は可動部分のつりあいから、 V は図から、状態方程式を用いて T を求めるのが基本.
- ・ ΔU は公式、 W は $P - V$ 図の面積、この 2 つの値を用いて熱力学第 1 法則によって熱量 Q が求まる.
- ・ ゆっくりとした断熱変化ではボアソンの公式が使える、熱力学第 1 法則は W の決定式となる.
- ・ 問題で与えてある文字が過剰なため、一部の解答に複数の表現が可能となっている。詳しくは、解答の中の脚注に.

【解答】

問 1 内部気体の状態方程式より、

$$\begin{cases} p_0 V_0 = nRT_0, \\ p_0 V_1 = nR \cdot 2T_0, \end{cases} \quad \therefore V_1 = \underbrace{2V_0}_{(a)}.$$

今、比熱比が $\gamma = \frac{5}{3}$ より単原子分子理想気体とわかる^{*12}。内部エネルギー変化は公式より、

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(2T_0 - T_0) = \frac{3}{2}nRT_0.$$

仕事は $p - V$ 図の面積より^{*13*14},

$$W = p_0 \Delta V = \underbrace{p_0 V_0}_{(b)} = \underbrace{nRT_0}_{(b)}.$$

よって、熱力学第 1 法則より^{*15},

$$Q = \Delta U + W = \underbrace{\frac{5}{2}nRT_0}_{(c)}.$$

^{*12} 問題文で定積モル比熱を C_V とも与えているので、

$$\Delta U = nC_V \Delta T$$

としても良い。

^{*13} ピストンのつりあいより、 $p_{\text{内部気体}} = p_{\text{大気}}$ が成り立つ。

^{*14} 以降全てのエネルギーに関する問題で、 nRT_0 を $p_0 V_0$ としても文字指定は満たす。

^{*15} 定積モル比熱 C_V などを用いた場合、

$$Q = n(C_V + R)T_0 = \left(1 + \frac{C_V}{R}\right)p_0 V_0 = nC_p T_0 = \frac{C_p}{R}p_0 V_0$$

のような解答が得られる（通常はやらないが、他の文字の組み合わせで表現することも可能である）。設問の並びから想定された解答は $nC_p T_0$ だと思われるが、複数の解答（この問題ではざっくりと 5 通り（揚げ足を取るようにすれば、文字の組み合わせを気にしなければもっとある））の仕方ができてしまうのは仕事が雑な気がします。

問2 気体の分子量を M とすると, $h = 0$ での気体の密度 ρ_0 は,

$$p_0 = \rho_0 \frac{R}{M} T_0, \quad \therefore \rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0}.$$

高さ h にある大気密度 ρ は, 与えられた式を用いて,

$$p_0 \left(1 - \frac{h}{h_0}\right) = \rho \frac{R}{M} T_0 \left(1 - \frac{h}{3h_0}\right)$$

$$\rho = \frac{p_0 M}{RT_0} \frac{1 - h/h_0}{1 - h/3h_0} = \rho_0 \frac{1 - h/h_0}{1 - h/3h_0}, \quad \therefore A = \frac{1}{\underbrace{h_0}_{(d)}}, \quad B = \frac{1}{\underbrace{3h_0}_{(d)}}.$$

内部気体の密度は, 状態方程式より,

$$p_0 = \rho \frac{R}{M} \cdot 2T_0, \quad \therefore \rho = \frac{1}{2} \rho_0.$$

高さ h_1 での大気密度を ρ_1 とすると, シリンダーのつりあいより^{*16},

$$0 = \rho_1 V_1 g - \rho V_1 g$$

$$\frac{1}{2} \rho_0 = \rho_0 \frac{1 - h_1/h_0}{1 - h_1/3h_0}, \quad \therefore h_1 = \frac{3}{5} h_0 \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{(e)}.$$

問3 大気の温度は与えられた式より,

$$T_{\text{大気}} = T_0 \left(1 - \frac{3h_0/5}{h_0}\right) = \frac{4}{5} T_0.$$

よって, 内部気体の状態方程式より,

$$p = \frac{nRT_{\text{大気}}}{V_1} = \frac{2}{5} \frac{nRT_0}{V_0} = \frac{2}{5} p_0 \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{(f)}.$$

$\Delta V = 0$ より仕事 W は 0. 内部エネルギーは公式より求まるので, 熱力学第1法則より^{*17},

$$Q = \Delta U + W = \frac{3}{2} nR \left(\frac{4}{5} T_0 - 2T_0\right) = -\frac{9}{5} nRT_0, \quad Q_{\text{放出}} = -Q = \frac{9}{5} nRT_0 \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{(g)}.$$

問4 高さ h_1 での大気圧力は与えられた式より,

$$p_{\text{大気}} = p_0 \left(1 - \frac{3h_0/5}{h_0}\right) = \frac{2}{5} p_0.$$

ピストンのつりあいより $p = p_{\text{大気}}$ ゆえ,

$$\frac{2}{5} p_0 V_2 = nR \cdot \frac{4}{5} T_0, \quad V_2 = 2V_0 = \underbrace{V_1}_{(h)}.$$

^{*16} ピストンなどの気体以外の質量が全て無視できることから, 浮力と内部気体の受ける重力がつりあう (気体の質量に比べて無視できるような質量の装置...).

^{*17} 定積モル比熱を C_V で計算した場合,

$$Q_{\text{放出}} = -Q = \frac{6}{5} nC_V T_0.$$

問 5 ポアソンの公式より^{*18},

$$p_0 V_3^\gamma = \frac{2}{5} p_0 (2V_0)^\gamma$$

$$\therefore V_3 = 2^{1+\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_0 = 2 \times 1.5 \times \frac{1}{2.6} V_0 = \underbrace{\frac{15}{13}}_{(i)} V_0.$$

問 6 状態方程式より,

$$T_3 = \frac{p_0 V_3}{nR} = \frac{15}{\underbrace{13}_{(i)}} T_0.$$

【補足】問題文で与えられた温度と圧力の式を考えてみる

はじめに, 準備として高さ z から $z + \Delta z$ にある静止した空気柱のつりあいを考える. 空気の密度を $\rho(z)$ とすれば,

$$0 = P(z)S - P(z + \Delta z)S - \rho(z)S\Delta z g, \quad \therefore \Delta P = P(z + \Delta z) - P(z) = -\rho(z)g\Delta z.$$

ここで, 状態方程式より, 気体の分子量を M とすれば $\rho(z) = \frac{MP(z)}{RT(z)}$ であるから,

$$\frac{\Delta P}{P} = -\frac{Mg}{R} \frac{\Delta z}{T(z)} \quad (1)$$

を得る.

さて, ここでは空気 (理想気体) の塊が重力を受けながらゆっくりと上昇, および下降をするモデルを想定する. なお, このとき空気の塊は断熱変化をするものとする.

状態方程式より, 微小な変化に対しては^{*19},

$$\begin{cases} PV = nRT, \\ (P + \Delta P)(V + \Delta V) = nR(T + \Delta T), \end{cases} \quad \therefore \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}. \quad (2)$$

熱力学第 1 法則・状態方程式より,

$$0 = P\Delta V + nC_V\Delta T, \quad \therefore \frac{\Delta V}{V} = -\frac{C_V}{R} \frac{\Delta T}{T}. \quad (3)$$

(2), (3) 式より比熱比 $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ を用いて,

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{C_V + R}{R} \frac{\Delta T}{T} = \frac{C_p}{C_p - C_V} \frac{\Delta T}{T} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\Delta T}{T}.$$

^{*18} 分数で解答しましたが, 小数で答えた方が適切です.

^{*19} 上下で割り算をして, 左辺の Δ の 2 次の項を 0 とすれば得られる.

ここで (1) 式を用いれば,

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{Mg}{R}$$

となり, $T(z=0) = T_0$, $\beta = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ として,

$$T(z) = T_0 - \beta \frac{Mg}{R} z = T_0 \left(1 - \beta \frac{Mg}{RT_0} z\right)$$

を得る. $z_0 = \frac{RT_0}{Mg}$ と置けば,

$$T(z) = T_0 \left(1 - \beta \frac{Mg}{RT_0} z\right) = T_0 \left(1 - \beta \frac{z}{z_0}\right).$$

次に $P(z)$ を求める. (1) 式より,

$$\frac{\Delta P}{P} = - \frac{Mg}{R} \frac{\Delta z}{T_0 \left(1 - \beta \frac{Mg}{RT_0} z\right)} = \frac{\Delta z}{\beta z - z_0}$$

ここで, 両辺積分をすれば,

$$\int \frac{dP}{P} = \int \frac{dz}{\beta z - z_0}, \quad \therefore \log |P| = \log |\beta z - z_0|^{\frac{1}{\beta}} + \text{const.}$$

$P(z=0) = P_0$ として,

$$P = P_0 \left(1 - \beta \frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

ここで, z_0 が大体どの程度の値なのかを見積もってみると, 空気の分子量を $M = 3 \times 10^{-2} \text{ kg}$, 気体定数を $R = 1 \times 10^1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 重力加速度の大きさを $g = 1 \times 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 地表での温度を $T_0 = 3 \times 10^2 \text{ K}$ とすれば,

$$z_0 = 1 \times 10^4 \text{ m}$$

となり, 10 km より十分低い地表付近の高度 z では^{*20}

$$P(z) = P_0 \left(1 - \beta \frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \doteq P_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)$$

*20 実数 α , $|\varepsilon| \ll 1$ の ε に対し成り立つ近似式

$$(1 + \varepsilon)^\alpha \doteq 1 + \alpha \varepsilon$$

を用いた.

となる。ここで問題で与えられた式と比較すれば $\beta = \frac{1}{3}$ であるから、

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{1}{3}, \quad \therefore \gamma = \frac{3}{2}$$

となり、単原子分子理想気体、二原子分子理想気体の割合を $s : 1 - s$ とすれば、

$$\frac{5}{3}s + \frac{7}{5}(1 - s) = \frac{3}{2}, \quad \therefore s = \frac{3}{8}$$

となるから、単原子分子理想気体と二原子分子理想気体が 3 : 5 で混合された理想気体であることが分かる。