

I 時間追跡（等加速度，単振動），衝突

【メモ】

- ・エネルギーを論じるときはどこまでを1つの系と見るかが重要^{*1}.
- ・等加速度運動と単振動は，時間追跡，エネルギーどちらでも考えられるが，時刻が問われていないときはエネルギーで考えた方が楽なことが多い.
- ・衝突は運動量保存則と問題文で与えられた条件を連立する.

【解答】

問1 つりあいより，

$$0 = kx_0 - Mg, \quad \therefore x_0 = \frac{Mg}{\underbrace{k}}.$$

問2 周期は公式より $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\underbrace{k}}}$ である．振幅は力学的エネルギー保存則より^{*2*3}，

$$\frac{1}{2}k(x_0 + A)^2 + Mg(-x_0 - A) = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 + Mg(-x_0), \quad \therefore A = \underbrace{V_0\sqrt{\frac{M}{k}}}.$$

問3 力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh, \quad \therefore v_0 = \sqrt{2gh}.$$

問4 衝突方向の運動量保存則^{*4}・はね返り係数の式より，

$$\begin{cases} mv_1 + MV_1' = m(-v_0), \\ v_1 - V_1' = -e(-v_0 - 0), \end{cases} \quad v_1 = \frac{eM - m}{\underbrace{M + m}}\sqrt{2gh}, \quad V_1 = |V_1'| = \frac{(1 + e)m}{\underbrace{M + m}}\sqrt{2gh}.$$

問5 単振動の半周期は，

$$t = \pi\sqrt{\frac{M}{\underbrace{k}}}.$$

^{*1} エネルギーに限らないことだが，エネルギーに関しては雑になる人が多い印象があるので．

^{*2} 物体，ばね，重力場を1つの系と見る．

^{*3} （お手軽な方法/試験場ならこれがいい）：円運動の正射影と見なせることから，

$$V_0 = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{M}}, \quad \therefore A = \underbrace{V_0\sqrt{\frac{M}{k}}}.$$

^{*4} 重力は外力だが，衝突の直前直後で見たとき，撃力に比べて重力から受ける力積は十分に小さく無視できる．

放物運動の折り返して元の位置に戻るまでの時間は、

$$t = \frac{2V_1}{g} = \frac{2(eM - m)}{M + m} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

よって、

$$e = \frac{m}{M} + \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \sqrt{\frac{Mg}{2kh}}.$$

問 6 (a) 落下に要する時間が板の単振動の $\frac{1}{4}$ 周期ゆえ、

$$H = \frac{1}{2}g \left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8} \frac{Mg}{k}.$$

(b) 両方の速さが等しいので、

$$\sqrt{2gH} = X\sqrt{\frac{k}{M}}, \quad \therefore X = \sqrt{\frac{2MgH}{k}} = \frac{4}{\pi}H.$$

(c) 両物体は原点で衝突を繰り返す^{*5}。したがって、1 回目の衝突までの $\frac{1}{4}$ 周期と以降の $n - 1$ 回の $\frac{1}{2}$ 周期を計算すればよく、

$$t_n = \frac{T}{4} + (n - 1)\frac{T}{2} = \frac{2n - 1}{2}\pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

^{*5} そのように H と X の間に関係を付けている。はね返り係数 1 で質量が等しいことから、衝突後、速さは等しく逆向きに運動する。小球が再び原点に戻ってくるのに要する時間は

$$2\sqrt{\frac{2H}{g}} = \pi\sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{T}{2}$$

であり、原点で衝突することが確認できる。

II 磁石が動く電磁誘導

【メモ】

・磁石が動くことでループを貫く磁束が時間変化し回路に誘導起電力が生じる（ファラデー則）。

【解答】

問 1 磁束の定義より，面積を計算して，

$$\Phi_M = B \left\{ \frac{1}{2} (10a)^2 \frac{\pi}{10} - \frac{1}{2} (8a)^2 \frac{\pi}{10} \right\} = \frac{9}{5} \pi B a^2.$$

t_0 は，回転に要する時間から，

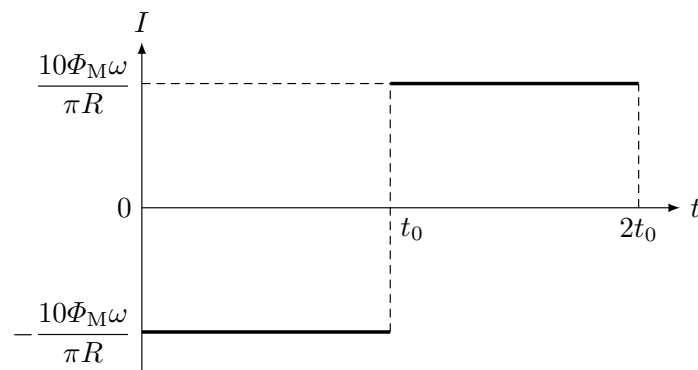
$$\omega t_0 = \frac{\pi}{10}, \quad \therefore t_0 = \frac{\pi}{10\omega}.$$

問 2 回路 1 周に生じる誘導起電力はファラデー則より，

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \begin{cases} -\frac{\Phi_M}{t_0} & (0 < t < t_0), \\ +\frac{\Phi_M}{t_0} & (t_0 < t < 2t_0). \end{cases}$$

よって，キルヒホッフ則より（グラフは以下の図）^{*6}，

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \begin{cases} -\frac{10\Phi_M\omega}{\pi R} & (0 < t < t_0), \\ +\frac{10\Phi_M\omega}{\pi R} & (t_0 < t < 2t_0). \end{cases}$$



問 3 公式より，

$$F_1 = \frac{20\Phi_M B a \omega}{\pi R}, \quad F_2 = \frac{20\Phi_M B a \omega}{\pi R}.$$

^{*6} Φ_M の値を代入しても文字指定を満たす。

問 4 力のモーメントの定義より^{*7},

$$N = \underbrace{18F_1a} = \underbrace{\frac{648B^2a^3}{R}}\omega.$$

問 5 磁石と同じ回転方向に, 角速度 ω で等角速度運動を行う。(26 字)

【補足 1】磁石が固定され円板が運動する場合

この場合, 静磁場中を回路の一部が運動するとき vBl 公式が基本となる. 円板の中心を原点に中心から外側に向かい x 軸を定める. 磁場を横切る導線部分に生じる起電力は,

$$\begin{aligned} V &= \int_{8a}^{10a} xB\omega dx \\ &= \frac{1}{2}(10a)^2B\omega - \frac{1}{2}(8a)^2B\omega \\ &= 18Ba^2\omega. \end{aligned}$$

問題の設定とは異なる設定だが, 相対運動として見たとき, 直感と整合した結果が得られる.

【補足 2】エネルギー収支

回路のエネルギー収支は磁場のかかる部分の 2 つのループを考えて,

$$\begin{cases} \mathcal{E}I - RI^2 = 0, \\ \mathcal{E}I - RI^2 = 0. \end{cases}$$

磁石 (運動エネルギー K で一定) と円板 (運動エネルギー K') のエネルギー収支は,

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = F_{\text{ex}} \cdot 9a\omega - 2IB \cdot 2a \cdot 9a\omega, \\ \frac{dK'}{dt} = 2IB \cdot 2a \cdot 9a\omega'. \end{cases}$$

ここで, 円板の角速度が ω' のとき誘導起電力は

$$\mathcal{E} = \mp 18Ba^2(\omega - \omega')$$

である. この結果を利用すれば, 全体のエネルギー収支は^{*8},

$$\frac{dK'}{dt} + 2RI^2 = F_{\text{ex}} \cdot 9a\omega$$

となり, 磁石を回している外力のする仕事が, 磁場を介して, 円板の運動エネルギーと回路で生じるジュール熱に変換されていることが確認できる.

^{*7} F_1, F_2 の値を代入しても文字指定を満たす.

^{*8} $\frac{dK}{dt} = 0$ を利用した.

【補足 3】問 5 を回転の運動方程式から定量的に（高校範囲外）

円板の「回転のしにくさ」*9 を M 、円板の角速度を ω' とする。このとき、回転の運動方程式*10*11 より、

$$M \frac{d\omega'}{dt} = -\frac{648B^2a^3}{R}(\omega' - \omega), \quad \therefore \frac{d\omega'}{dt} = -\frac{648B^2a^3}{MR}(\omega' - \omega).$$

初期条件 $\omega'(0) = 0$ より、

$$\omega'(t) = \omega \left(1 - e^{-\frac{648B^2a^3}{MR}t} \right)$$

を得る。よって、円板の角速度はすぐに ω へ収束することがわかる。

【補足 4】問 5 をエネルギー収支から定量的に（高校範囲外）

キルヒホッフ則より $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ ゆえ、

$$\frac{dK'}{dt} = 2IB \cdot 2a \cdot 9a\omega' = \frac{648B^2a^4}{R}(\omega - \omega')\omega'.$$

ここで、 $K = \frac{1}{2}M\omega'^2$ (M は慣性モーメント) ゆえ、

$$\frac{dK'}{dt} = M\omega' \frac{d\omega'}{dt}$$

であるから、

$$\begin{aligned} M\omega' \frac{d\omega'}{dt} &= -\frac{648B^2a^4}{R}(\omega' - \omega) \\ M \frac{d\omega'}{dt} &= -\frac{648B^2a^4}{R}(\omega' - \omega) \end{aligned}$$

と【補足 3】の運動方程式の結果を再現する。あとは同じように計算すればよい。

*9 慣性モーメントと呼ぶ。質量 m 、内径 a 、外径 b のドーナツ型を、円の中心を垂直に貫く軸まわりの慣性モーメントは $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)m$ である。

*10 回転の運動方程式は、

$$M \frac{d^2\theta}{dt^2} = N$$

と書ける θ に対する (2 回常) 微分方程式である。ここで、 M を慣性モーメント、 $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ を角加速度、 N を力のモーメントと呼ぶ。

*11 【補足 2】のエネルギー収支の式に $K' = \frac{1}{2}M\omega'^2$ を代入しても得られる。

III 原子核，熱力学の基本操作

【メモ】

- ・問 1 から問 3 までは原子（原子核の範囲），問 4 のみが熱力学の問題．
- ・数値計算は選択肢から選ぶもので，特に問 2 は桁数のみを合わせればよいので，解答のようにそこそこ丁寧にやらないでである程度ざっくりでよい．

【解答】

問 1 γ 線^{*12}．

問 2 ウランの質量欠損を ΔM は，

$$\frac{\Delta M \times 1.7 \times 10^{-17} \text{ kg} \times (3.0 \times 10^8 \text{ m/s})^2}{1.6 \times 10^{-19} \text{ eV}} = 200 \times 10^6 \text{ eV}, \quad \therefore \Delta M = \frac{1.6 \times 2}{1.7 \times 9} \text{ u}.$$

よって，

$$\frac{\Delta M}{235} \times 100 = 0.089\ldots \approx 0.1\%.$$

問 3 (a) Cs : 陽子 55 個，中性子 76 個 Xe : 陽子 54 個，中性子 77 個

(b) ^{131}Ba の半減期より，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{23}{11.50}} \times 100 = 25\%.$$

(c) 計算する量は，

$$\frac{n_{\text{Xe}}}{n_{\text{Cs}}} = \frac{n_{\text{Cs}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{23}{9.689}} n_{\text{Cs}}}{n_{\text{Cs}}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{23}{9.689}}$$

である．ここで^{*13}，

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 < 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{23}{9.689}} < 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2.5} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$0.75 < 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{23}{9.689}} < 0.82\ldots$$

より，

$$\frac{n_{\text{Xe}}}{n_{\text{Cs}}} \times 100 \approx 80\%.$$

^{*12} 各放射線の正体は， α 線はヘリウム原子核（ α 粒子）， β 線は電子， γ 線は電磁波（光）である．

^{*13} 上を 3 乗で押さえると 87.5% 未満となり判別できない．

問 4 (a) ピストンのつりあいより,

$$0 = PS - P_0S - Mg, \quad \therefore P = P_0 + \underbrace{\frac{Mg}{S}}.$$

(b) 内部エネルギー変化は公式より,

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR \left(\frac{P_0 + Mg/S}{nR} SL - \frac{P_0 + Mg/S}{nR} Sh \right) = \frac{3}{2}(P_0S + Mg)(L - h).$$

内部気体のした仕事は,

$$W = P\Delta V = (P_0S + Mg)(L - h).$$

よって, 熱力学第 1 法則より,

$$Q = \underbrace{\frac{5}{2}(P_0S + Mg)(L - h)}.$$