

第 1 問 非等速円運動, 衝突

【メモ】

・ 2017 年名城大学より, 全体の設問の量を考慮して一部問題を削除.

・ 非等速円運動は以下の 2 式の連立.

$$\begin{cases} \text{運動方程式 (中心成分)} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

・ 衝突は以下の 2 式の連立.

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題文で指示された条件} \end{cases}$$

固定面 (一定な速度で動く面) との衝突では運動量は保存しない. また, 滑らかな面との衝突では面と平行な運動量成分は不変に保たれる.

【解答】

問 1 張力の大きさを T とする. A の運動方程式 (中心成分), および A と重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{L} = T - mg \cos \theta, \\ \frac{1}{2}mv^2 + mg(-L \cos \theta) = 0 \end{cases} \quad \therefore v = \sqrt{2gL \cos \theta}, \quad T = \underline{\underline{3mg \cos \theta}}.$$

問 2 B の受ける垂直抗力の大きさを N とする. B のつりあいより,

$$M \cdot 0 = T + N - Mg \quad \therefore N = Mg - T = Mg - 3mg \cos \theta$$

であり, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で $N > 0$ であればよいので,

$$\min\{N\} = Mg - 3mg > 0 \quad \therefore \frac{M}{m} > \underline{\underline{3}}.$$

問 3 問 1 で求めた v に $\theta = 0$ を代入して,

$$v = \underline{\underline{\sqrt{2gL}}}.$$

問 4 衝突の直前・直後の運動量保存則, および条件 (衝突後 A 静止) より,

$$\begin{cases} m \cdot 0 + MV_0 = m\sqrt{2gL} + M \cdot 0, \\ 0 - V_0 = -e(\sqrt{2gL} - 0) \end{cases} \quad \therefore V_0 = \frac{m}{\underline{\underline{M}}} \sqrt{2gL}, \quad e = \frac{m}{\underline{\underline{M}}}.$$

問 5 速さを V ，張力の大きさを T ，垂直抗力の大きさを N とする．A のつりあい，B の運動方程式（中心成分），および B と重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} M \frac{V^2}{L} = T - Mg \cos \phi, \\ \frac{1}{2} MV^2 + Mg(-L \cos \phi) = \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M} \sqrt{2gL} \right)^2 + Mg(-L) \end{cases}$$
$$\therefore N = \underbrace{Mg(3 \cos \phi - 2)} + mg \left(\frac{2m}{M} - 1 \right).$$

第2問 ポーアの水素原子モデル

【メモ】

・2019 年大阪工業大学より.

【解答】

問1 ①, ②式より $\mu = 0$ を代入し係数比較をして,

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{B} - \frac{4}{B} \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_\infty} - \frac{4}{B} \frac{1}{n^2} \end{cases} \quad \therefore R = \frac{4}{B}, \quad \lambda_\infty = B.$$

問2 加速運動する電荷は電磁波を放射するため, 軌道半径が減少してしまう.

問3 与えられた数値より,

$$I = E_\infty - E_1 = hcR = \frac{4 \times 1.24 \times 10^{-6}}{3.65 \times 10^{-7}} \text{ eV} = \underline{\underline{13.6 \text{ eV}}}.$$

問4 ⑤式より $v = \sqrt{\frac{k_0 e^2}{mr}}$ であるから,

$$\nu_e = \frac{e}{2\pi r} \sqrt{\frac{k_0}{mr}}.$$

問5 ⑤式より,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{k_0 e^2}{r^2} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{U}}.$$

ここで, $E_n = K + U = \frac{1}{2}U$ より,

$$E_n = \frac{1}{2}U = -\frac{1}{2} \frac{k_0 e^2}{r} = -\frac{hcR}{n^2} \quad \therefore r = \frac{k_0 e^2}{\underline{\underline{2hcR}}_{\mathcal{A}}} \times n^2, \quad v = \sqrt{\frac{2hcR}{m}}_{\mathcal{A}} \times \frac{1}{n}.$$

また, 振動数条件より,

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{E_{n+\ell} - E_n}{h} = cR \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+\ell)^2} \right\} \\ &= \frac{cR}{n^2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\ell}{n} \right)^{-2} \right\} \\ &\doteq \frac{2cR}{\underline{\underline{n^3}}_{\mathcal{I}}} \times \ell \end{aligned}$$

を得る.

$\mathcal{A} : 2hcR$ $\mathcal{I} : \frac{2cR}{n^3}$ $\mathcal{U} : \text{量子}$

問 6 ⑥, ⑦式より,

$$\frac{1}{\pi k_0 e^2} \sqrt{\frac{2(-E_n)^3}{m}} = 2 \sqrt{\frac{(-E_n)^3}{h^3 c R}} \quad \therefore R = \frac{2\pi^2 k_0^2 e^4 m}{\underbrace{h^3 c}}.$$

第3問 電磁誘導

【メモ】

- ・2018年新潟大学より，大問の半分を抜粋．
- ・誘導起電力の決定は，①静磁場中を運動する導体に生じる誘導起電力に関しては vBl 公式，ファラデーの法則の2通りで，②時間変化する磁場に依るループ1周当たりの誘導起電力はファラデーの法則1通りとなる．本問では前者に該当するがファラデーの法則による指示が与えられている．
- ・電磁誘導は，①誘導起電力の決定→②回路の状態決定→③運動の状態決定→④回路系と力学系の間のエネルギーの変換，の順で論じられるよう学習を進めておく．

【解答】

問1 紙面表から裏向き．

問2 公式，および磁束の定義より，

$$\Phi = \pi a^2 B = \pi a^2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r}.$$

問3 コイルの速度は $u = \frac{dr}{dt}$ と表される．ファラデーの法則より，

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 a^2 I}{2r} \right) = -\frac{\mu_0 a^2 I}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mu_0 a^2 I}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{=u} = \frac{\mu_0 I a^2 u}{2r^2}.$$

よって，誘導起電力の大きさは，

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 I a^2 |u|}{2\pi r^2} = \frac{\mu_0 a^2 I v}{2r^2}.$$

問4 誘導起電力の正の向きは図の時計回りの向きである．コイルに流れる電流 i の正の向きもまた時計回りとするれば，キルヒホッフの法則より，

$$\mathcal{E} - Ri = 0 \quad \therefore i = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r^2 R} v (> 0).$$

$i > 0$ より向きは 時計回り である．

問5 ジュール熱の公式より，

$$P_R = RI^2 = \left(\frac{\mu_0 a^2 I v}{2r^2} \right)^2 \frac{1}{R}.$$

問6 系のエネルギー収支は「磁場により、外力のした仕事がコイルで生じるジュール熱に変換されている」と解釈できる^{*1}。よって、このエネルギー収支に従い、

$$Fv = RI^2 = \left(\frac{\mu_0 a^2 I v}{2Rr^2} \right)^2 R \quad \therefore F = \underbrace{\left(\frac{\mu_0 a^2 I}{2r^2} \right)^2 \frac{v}{R}}.$$

【補足1】誘導起電力の計算を言われた通りに載っている式を使う（定義にしたがって微分）

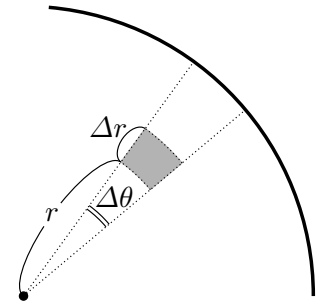
Δt 間の磁束の変化 $\Delta\Phi$ は、

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{\mu_0 a^2 I}{2(r+v\Delta t)} - \frac{\mu_0 a^2 I}{2r} \\ &= \frac{\mu_0 a^2 I}{2r} \left(\frac{1}{1+v\Delta t/r} - 1 \right) \\ &\doteq \frac{\mu_0 a^2 I}{2r} \left(1 - \frac{v\Delta t}{r} - 1 \right) \\ &= -\frac{\mu_0 a^2 I}{2r^2} v \Delta t \\ \therefore \mathcal{E} &= -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2r^2} v. \end{aligned}$$

【進んだ補足1】誘導起電力を Faraday の法則で厳密に計算

本問題では円形コイル内部の磁場を一樣と見做している。【進んだ補足】では、厳密に（一樣でない場合の）計算をする。

右図のように、半径 r ($0 \leq r \leq a$) から $r + \Delta r$ 、角度 θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) から $\Delta\theta$ にあるカットされたバームクーヘンのような形の微小領域を貫く微小な磁束 $\Delta\Phi$ を考える。この微小領域の面積は $r\Delta r\Delta\theta$ であるから^{*2}、この領域を貫く微小な磁束 $\Delta\Phi$ は、



$$\Delta\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x + r \cos \theta)} \cdot r \Delta r \Delta\theta$$

と書ける。円形コイル全体を貫く磁束 Φ は、 $\Delta\Phi$ を $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の全範囲で足し合わせて

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \underbrace{\int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{r}{x + r \cos \theta}}_{=J}$$

^{*1} 定量的導出は省略する（気になる人は椎村まで）。

^{*2} 腕の長さ $r + \Delta r$ の扇形から腕の長さ r の扇形の面積を引くことで

$$\frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}r^2 \Delta\theta = \frac{1}{2}\{2r\Delta r + (\Delta r)^2\}\Delta\theta \doteq r\Delta r\Delta\theta$$

となる。最後の近似では $(\Delta r)^2 \doteq 0$ とした。

となる．後はこの定積分 J を計算すればよい．

計算手順は，まずはじめに θ について積分を実行し，その後 r についての積分を考える． θ に関する積分は $z = e^{i\theta}$ と置換し^{*3}，留数定理^{*4}を用いることで，

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{r}{x + r \cos \theta} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz} \frac{1}{x/r + (z + 1/z)/2} \\ &= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} dz \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\ &= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) \cdot \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\ &= \frac{4\pi}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{2\pi r}{\sqrt{x^2 - r^2}} \end{aligned}$$

となる．ここで， α, β はそれぞれ $z^2 + 2\frac{x}{r}z + 1 = 0$ の解であり，それぞれ以下のように定義した．

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{x}{r} + \sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 - 1}, \\ \beta &= -\frac{x}{r} - \sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 - 1}. \end{aligned}$$

θ での積分結果を，さらに r に関する積分として実行して，

$$J = \int_0^a dr \frac{2\pi r}{\sqrt{x^2 - r^2}} = 2\pi \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right)$$

を得る．よって，磁束 Φ は，

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} J = \mu_0 I \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right)$$

となり，Faraday の法則より誘導起電力 $\mathcal{E}$ は図の時計回りを正として，

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 I \frac{d}{dt} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right) \mu_0 I \frac{dx}{dt} \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right) \mu_0 I v \end{aligned}$$

^{*3} 置換による諸々の対応は $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ ， $dz = ie^{i\theta} d\theta$ ，積分区間は $|z| = 1$ の領域内部，となる．

^{*4} 留数定理を知らない者は各位調べてみると楽しいかもしれません．なお，詳細は省くが留数定理とはざっくり以下の等式である．

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f(z), z_i)$$

ここで， $\text{Res}(f(z), z_i)$ は $z = z_i$ の留数 (Residue) であり，右辺は積分路 C 内部の極のみを拾って計算する．

と求まる．なお， $x \gg a$ では

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2/x^2}} - 1 \doteq 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{x^2} - 1 = \frac{1}{2} \frac{a^2}{x^2}$$

であるから，誘導起電力 $\mathcal{E}$ は，

$$\mathcal{E} \doteq \frac{\mu_0 I a^2}{2x^2} v$$

となり，問題で考えたコイル内部の磁場を一様と見做した結果と一致する．

【進んだ補足2】誘導起電力の計算を $vB\ell$ 公式を使って計算

右図のように角 θ を定め，角 θ から $\theta + \Delta\theta$ にある微小な導体に生じる誘導起電力を計算する．

設問では距離を r としているが，導線位置を $x = 0$ とし，円形コイルの中心座標を x とする．角 θ の位置にある微小導体棒の位置は $x + a \cos \theta$ であり，この位置に生じている磁束密度は公式より $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x + a \cos \theta}$ である．よって，この領域に生じる誘導起電力 ΔV は，

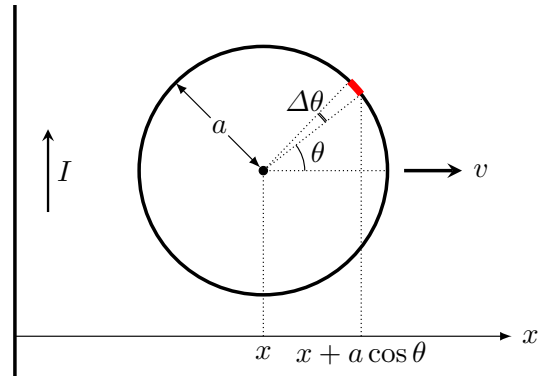
$$\begin{aligned} \Delta V &= v \cos \theta \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x + a \cos \theta} \cdot a \Delta\theta \\ &= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \frac{a \cos \theta}{x + a \cos \theta} \Delta\theta \end{aligned}$$

となる．コイル全体に生じる誘導起電力はこの ΔV を $\theta = 0$ から $\theta = 2\pi$ まで足し合わせればよいので， $\Delta\theta \rightarrow 0$ として，

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \frac{a \cos \theta}{x + a \cos \theta} d\theta = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a \cos \theta}{x + a \cos \theta} d\theta}_{=J}$$

を計算すればよい．ここで後ろの定積分 J は $z = e^{i\theta}$ と置換することで^{*5}，

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \theta}{x + a \cos \theta} d\theta \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz} \frac{(z + 1/z)/2}{x/a + (z + 1/z)/2} \\ &= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} dz \frac{z^2 + 1}{z(z - \alpha)(z - \beta)} \end{aligned}$$



^{*5} 置換による諸々の対応は $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ ， $dz = ie^{i\theta} d\theta$ ，積分区間は $|z| = 1$ の領域内部，となる．

となる．ここで， α ， β は前述のそれぞれ $z^2 + 2\frac{x}{a}z + 1 = 0$ の解である．定積分 J は留数定理を用いることで，

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z(z - \alpha)(z - \beta)} \\
 &= \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{z^2 + 1}{z(z - \alpha)(z - \beta)} + \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) \cdot \frac{z^2 + 1}{z(z - \alpha)(z - \beta)} \right) \\
 &= 2\pi \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha - \beta} \right) \\
 &= 2\pi \frac{1 + \alpha\beta}{\beta(\alpha - \beta)} \\
 &= -2\pi \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

と求まり，コイル全体に生じる誘導起電力は，

$$V = - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right) \mu_0 I v$$

となる．この V は反時計回りを正としており，【進んだ補足 1】で計算した $\mathcal{E}$ は時計回りを正としているので，この結果は Faraday の法則を用いた結果と一致していることが確認できる．

第4問（選択） ホイヘンスの原理，光の粒子性

【メモ】

- ・ 2022 年京都産業大学より．
- ・ ホイヘンスの原理に従えば，波の波面は，各点に分布する波源から生じる素元波と呼ばれる球面波の合成波の波面として与えられる．
- ・ 図形の考察は，幾何光学の定石の通り行えばよい．
- ・ 振動数 ν の光子のエネルギーは $E = h\nu$ ，運動量の大きさは $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$ と与えられる．
- ・ 力積の計算は以下のように行う．

$$\begin{cases} f \text{ の関数形が既知} & \rightarrow \text{定義通りの計算（積分，もしくは } f-t \text{ 図の面積評価）} \\ f \text{ の関数形が不明} & \rightarrow \text{運動量収支から逆算} \end{cases}$$

【解答】

問 1 (a) 合成波の変位 y は，各波の変位の重ね合わせとなるので $y = \underline{y_1 + y_2}$ となる．

(b) 速さ v_1 で時間 T の間に進む距離ゆえ $BD = \underline{v_1 T}$ ．

(c) 速さ v_2 で時間 T の間に進む距離ゆえ $AC = \underline{v_2 T}$ ．

(d) 図より $BD = \underline{AD \sin \theta_1}$ ．

(e) 図より $AC = \underline{AD \sin \theta_2}$ ．

(f) 以上の結果を組み合わせれば，

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$

を得る．ここで，真空中の光の速さを c とすると，屈折率 n の媒質中の光の速さが $\frac{c}{n}$ と書けることを用いて，

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}.$$

問 2 (a) 運動量の大きさは，公式より $\underline{\frac{h\nu}{c}}$ ．

(b) 1 回目の屈折による触れ角は，図より $\underline{\theta_1 - \theta_2}$ ．

(c) 2 回目の屈折による触れ角もまた $\theta_1 - \theta_2$ であるから，一連の過程における触れ角は $\underline{2(\theta_1 - \theta_2)}$ となる．

(d) 触れ角 $2(\theta_1 - \theta_2)$ より， $p_x = \underline{-2p \sin \{2(\theta_1 - \theta_2)\}}$ ．

(e) 以下のように，球の受ける力積の x 成分 I_x は正ゆえ，球は $\underline{ウ}$ の x 軸正方向に動く．

$$I_x = -\Delta p_x = 2p \sin \{2(\theta_1 - \theta_2)\} > 0.$$

第 5 問（選択） 熱のある基本的な熱力学の問題

【メモ】

・ 2013 年静岡大学より.

・ 熱のある過程の定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定，内部エネルギー変化は公式，気体のする仕事は PV 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱の計算．この問題は個の定石からややずれる設定（温度が与えられているので状態方程式は温度以外の物理量の決定，であったり...）だが，立式の手順は変わらない．

【解答】

問 1 ピストンのつりあいより $P = \underline{\underline{P_0}}$ である．

問 2 状態方程式より，

$$T = \frac{P_0 V_0}{n_0 R}.$$

問 3 (a) 状態方程式より，

$$P \frac{V_0}{2} = n_0 R \frac{P_0 V_0}{n_0 R} \quad \therefore P = \underline{\underline{2P_0}}.$$

(b) ピストンのつりあいより，

$$0 = P_0 S + F - PS \quad \therefore F = \underline{\underline{P_0 S}}.$$

問 4 ピストンのつりあい，および状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = P_0 S - PS, \\ P \frac{V_0}{2} = n R \frac{P_0 V_0}{n_0 R} \end{cases} \quad \therefore n = \frac{1}{2} n_0.$$

よって，放出された気体のモル数は，

$$n_0 - n = \underline{\underline{\frac{1}{2} n_0}}.$$

問 5 (a) 体積一定よりこの間気体のする仕事は 0 である．熱力学第 1 法則より，

$$Q = \frac{3}{2} \frac{n_0}{2} R \left(T - \frac{P_0 V_0}{n_0 R} \right) \quad \therefore T = \frac{P_0 V_0}{n_0 R} + \underline{\underline{\frac{4}{3} \frac{Q}{n_0 R}}}.$$

(b) 状態方程式より，

$$P = \frac{\frac{n_0}{2} R \left(\frac{P_0 V_0}{n_0 R} + \frac{4}{3} \frac{Q}{n_0 R} \right)}{\frac{V_0}{2}} = \left(1 + \frac{4}{3} \frac{Q}{P_0 V_0} \right) P_0.$$

よって、圧力の変化量 ΔP は、

$$\Delta P = \left(1 + \frac{4}{3} \frac{Q}{P_0 V_0}\right) P_0 - P_0 = \frac{4}{3} \frac{Q}{V_0}.$$

問 6 ピストンのつりあい、および状態方程式より、

$$\begin{cases} 0 = P_0 S - P S, \\ P \frac{V_0}{2} = n R \left(\frac{P_0 V_0}{n_0 R} + \frac{4}{3} \frac{Q}{n_0 R} \right) \end{cases} \quad \therefore n = \frac{3}{2} \frac{P_0 V_0}{3 P_0 V_0 + 4 Q} n_0.$$

問 7 前問で求めた n が $\frac{1}{10} n_0$ であるということから、

$$\frac{3}{2} \frac{P_0 V_0}{3 P_0 V_0 + 4 Q} n_0 = \frac{1}{10} n_0 \quad \therefore Q = \frac{3 P_0 V_0}{4}.$$