

6

波動前半

第6部波動前半では、波の諸々の性質と力学的な波動（音に関する現象）を扱う。第1章では、波の性質について扱う。はじめに波のグラフ表現から学び、波全体の動きをとらえる波形グラフ、波の各部分の振動の様子を表す振動グラフと2種類あるグラフのうち、波の情報は波形グラフから読み取るのが基本である、ということを身に着ける。続いて、波の式を扱う（グラフを数式で表現したもの）。その中で、波の反射、屈折、合成も扱う。また、波の合成の中で定常波について学習し、次章につなげる。第2章では、弦と気柱の固有振動を扱う。弦（両側固定端）は両端が節の定常波が、気柱は開管（両側自由端）が両端が腹の定常波、閉管（自由端と固定端）が端の片方が腹、もう一方が節の定常波が生じる。弦の方には弦を伝わる波の速さに関する公式があるが、これら3つは、基本的には境界条件の違いだけである。第3章では、ドップラー効果を扱う。ドップラー効果は大きく分けて公式導出問題と公式使うだけ問題に分けられるため、はじめ、授業内で標準的な導出を行った後、公式を使う練習を行う。公式導出の別の方法については問題に入れてある。

§6.1 波の性質・正弦進行波

第 1 章では、波の性質について扱う。はじめ、波のグラフを扱うが、グラフの読み取りは波形グラフから読み取ることを基本とし、徹底する。続いて、波の式を扱い、その中で^{*1}反射、屈折、合成（重ね合わせ）に関する問題を扱う。波の式の立式は、慣れるまでは日本語で立てた後に数式化するようにするのが良い。また、最後には波の干渉（重ね合わせ）に関する計算問題も入れてあるが、長い目で見て学習をしたい場合、干渉条件は位相差で議論する癖をつけておく。

■簡単なまとめ①

- 媒質の振動数 f と周期 T の関係： $f = \frac{1}{T}$
- 波の基本式（ v は伝わる速さ、 λ は波長、 f は振動数）： $v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda$
- 波のグラフ：

波形グラフから読み取るのが基本。波形グラフ→振動グラフ、振動グラフ→波形グラフの行き来もできるようにしたい。

$$\begin{cases} \text{波形グラフ} & \rightarrow \text{グラフの波 1 個分が波長 } \lambda \\ \text{振動グラフ} & \rightarrow \text{グラフの波 1 個分が周期 } T \end{cases}$$

振動グラフは、媒質ごとの力学で学んだ変位と時刻のグラフである。

- 反射：

$$\begin{cases} \text{境界が自由端} & \rightarrow \text{位相のずれなくそのまま反射} \\ \text{境界が固定端} & \rightarrow \text{位相が } \pi \text{ ずれて反射（上下逆さまで反射）} \end{cases}$$

- 屈折の法則（スネルの法則）：

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta_2$$

スネルの法則は上記のように 1 行の式の形（保存則の形）で使うようにする。 n_1, θ_1 は媒質 1 側の屈折率、入射角とし、 n_2, θ_2 は媒質 2 側で同様とする。なお、境界間で振動数 f は保存し、屈折率 n 中での波の波長は $\frac{\lambda}{n}$ となる（波の基本式より v も同様）。

^{*1} 作図問題はその前に入れてある。

■簡単なまとめその②

- 波の式：

日本語で言語化してから立式する．

$$y(x, t) = A \sin(\omega t \mp kx + \theta_0).$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ は角振動数 (T は周期), $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ は波数 (λ は波長), θ_0 は初期位相である．また, 位相 (三角関数の中身) の符号から進行方向を読み取れる (負のとき正方向に伝播, 正のとき負方向に伝播)．

- 定常波：

振幅, 波長, 振動数の等しく逆向きの波を重ね合わせると生じる．最も激しく振動する点を腹, 全く振動しない点を節という．腹と腹 (節と節) の間隔は半波長となる．

- 干渉条件：

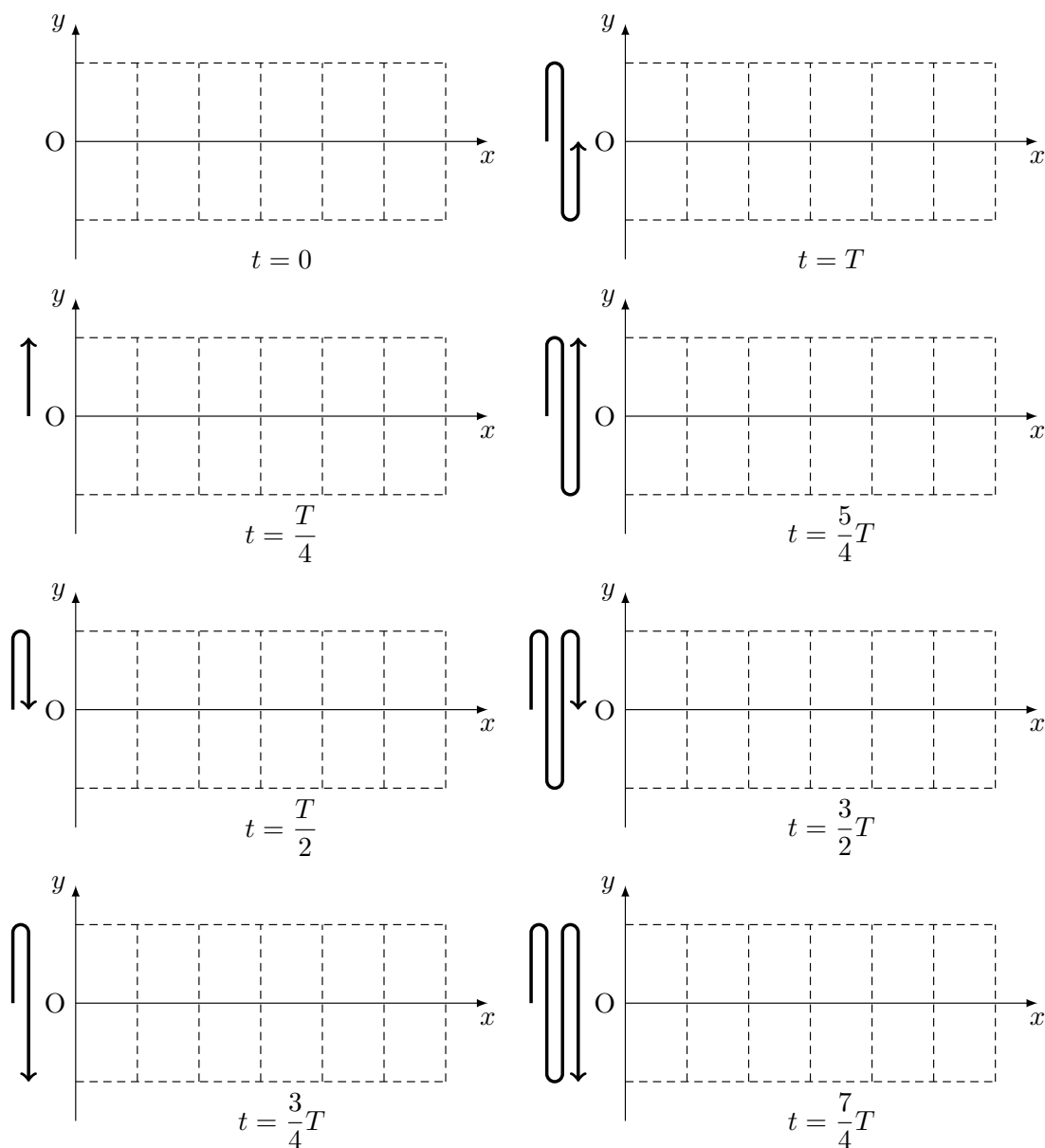
干渉条件は整数を m として,

$$\begin{aligned} (\text{位相差}) &= \frac{2\pi}{\lambda} (\text{経路差}) + (\text{初期位相差}) + (\text{反射に伴う位相のずれ}) \\ &= \begin{cases} 2m\pi & (\text{強めあい}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱めあい}). \end{cases} \end{aligned}$$

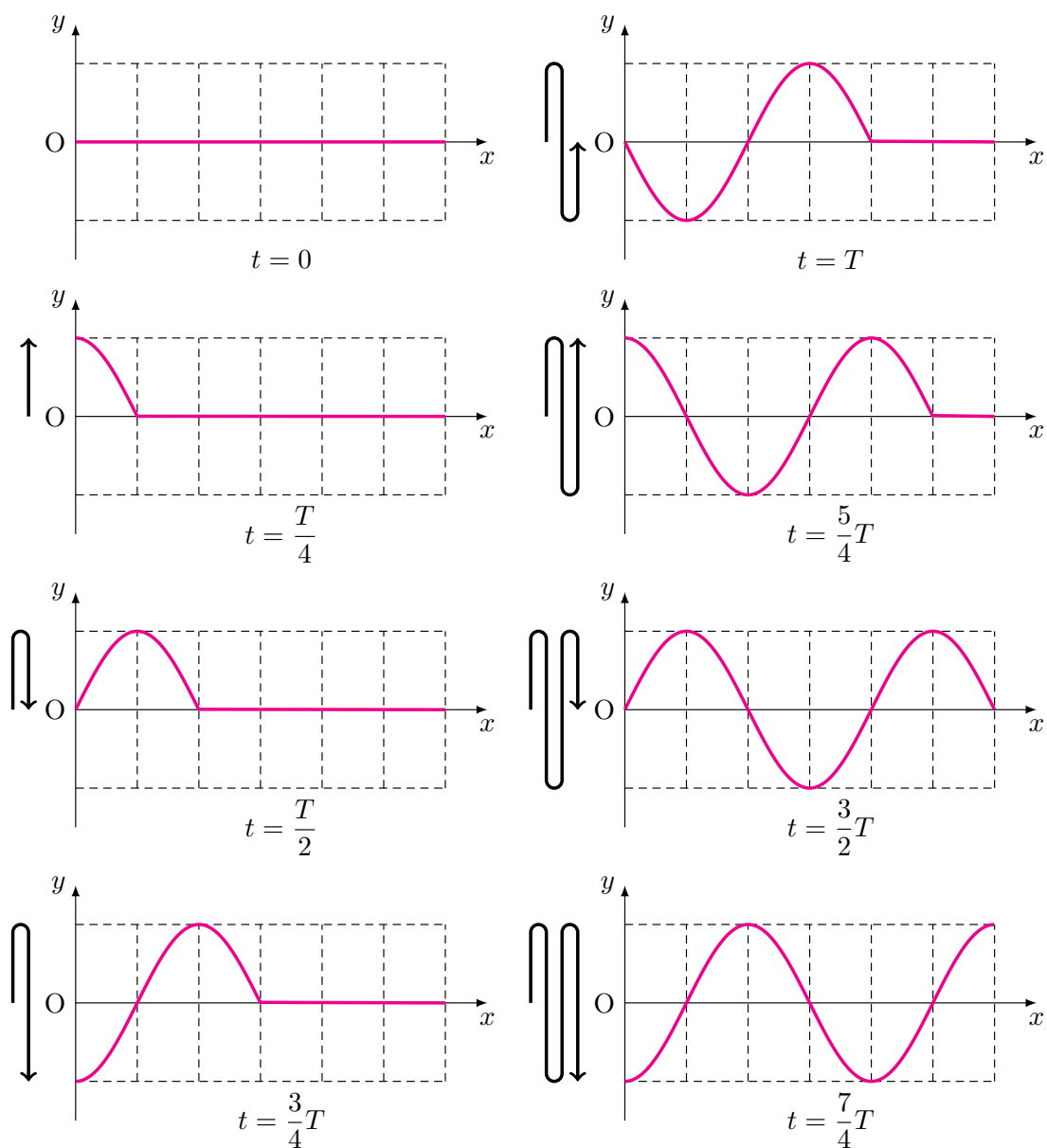
特に光の干渉で使うことだが, 媒質中では $\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{n}$ とする (n は屈折率)．

1. 波形グラフの作成

x 軸に沿った一様な媒質中を伝わる正弦波について考える．位置 $x = 0$ に単振動（周期 T ）を行う波源がある．時刻 $t = 0$ に波源は振動を始めた．グラフの各時刻における波形グラフを図示せよ．ただし， x 軸 1 目盛りを $\frac{1}{4}$ 波長とせよ．

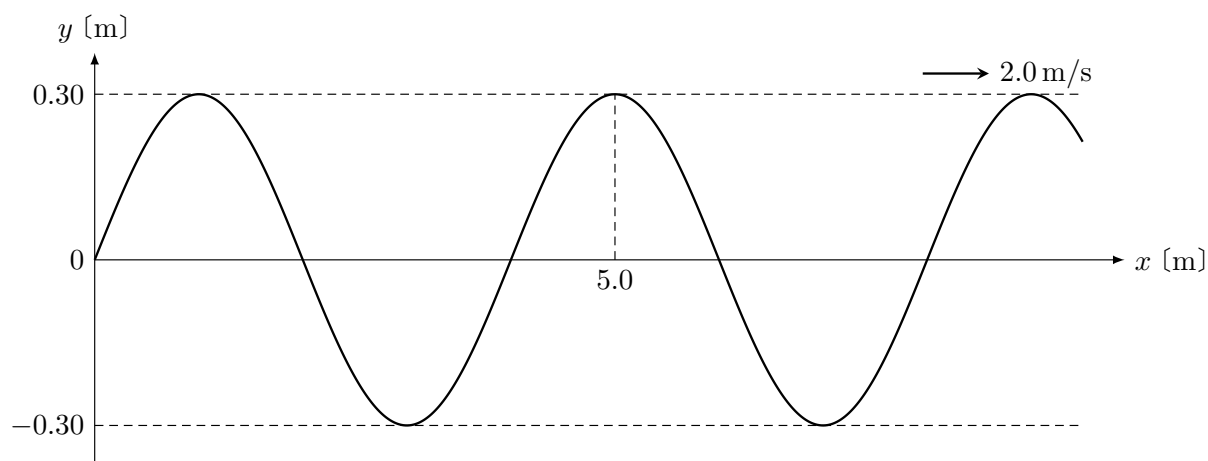


【解答】



2. 波形グラフの読み取り

x 軸に沿った一様な媒質中を速さ $v = 2.0 \text{ m/s}$ で伝わる正弦波がある．時刻 $t = 0$ において，位置 x とその位置における媒質の変位 y の関係は図のようになっていた．振幅 A ，周期 T ，振動数 f ，波長 λ をそれぞれ求めよ．



【解答】

波形グラフより,

$$A = \underline{0.30\text{ m}}, \quad \lambda = \underline{4.0\text{ m}}.$$

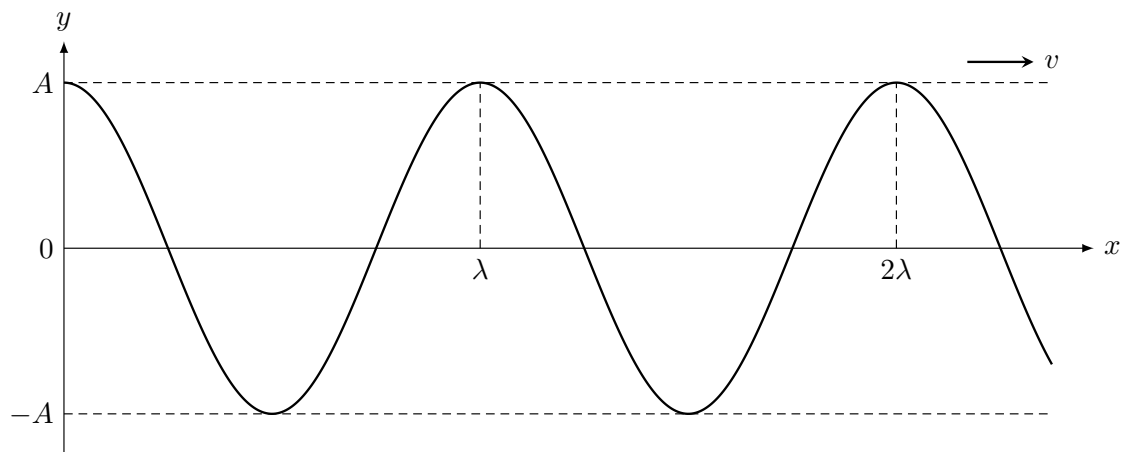
また, 波の基本式, および周期と振動数の関係より,

$$f = \frac{v}{\lambda} = \underline{0.50\text{ Hz}}, \quad T = \frac{1}{f} = \underline{2.0\text{ s}}.$$

3. 波形グラフの読み取り

x 軸に沿った一様な媒質中を正方向に速さ v で伝わる正弦波（波長 λ ）がある．時刻 $t = 0$ において，位置 x とその位置における媒質の変位 y の関係は図のようになっていた．

- (1) 媒質の振動周期 T を求めよ．
- (2) 時刻 $t = 0$ において，媒質の振動の速度が正方向で大きさが最大となっている位置を $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．
- (3) 原点 ($x = 0$) における媒質の変位を，時刻 t の関数として表す式 $y(0, t)$ を求めよ．また，原点における振動グラフ（横軸時刻 t ，縦軸媒質の変位 y ）を $0 \leq t \leq 2T$ の範囲で図示せよ．



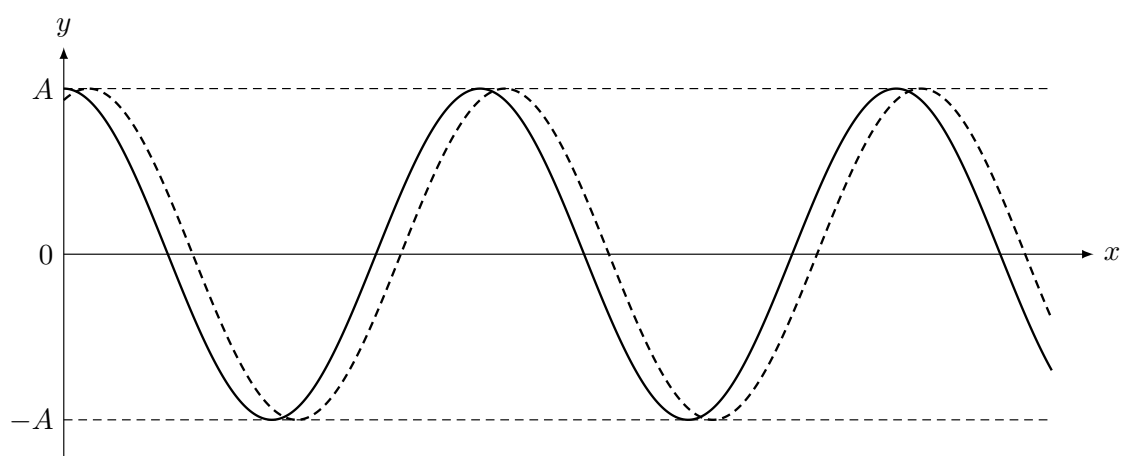
【解答】

- (1) 波の基本式より,

$$T = \frac{\lambda}{v}.$$

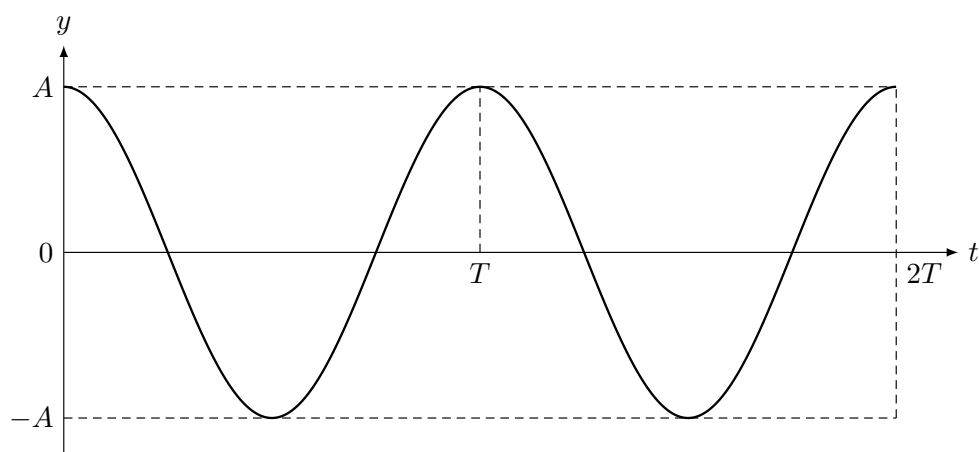
- (2) 時刻
- $t = 0$
- から少しだけ後の時刻でのグラフは下図の破線のようにになる．図より,

$$x = \frac{\lambda}{4}, \quad \frac{5}{4}\lambda.$$



- (3)
- $t = 0$
- で
- $y = A$
- ゆえ,

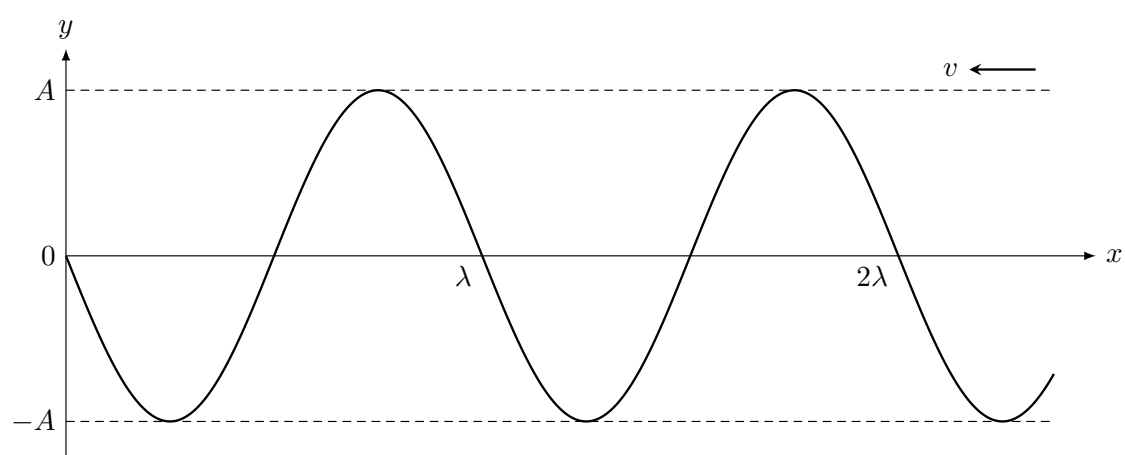
$$y(0, t) = A \cos \left(\frac{2\pi v}{\lambda} t \right).$$



4. 波形グラフの読み取り

x 軸に沿った一様な媒質中を負方向に速さ v で伝わる正弦波（波長 λ , 周期 T ）がある．時刻 $t = 0$ において，位置 x とその位置における媒質の変位 y の関係は図のようになっていた．

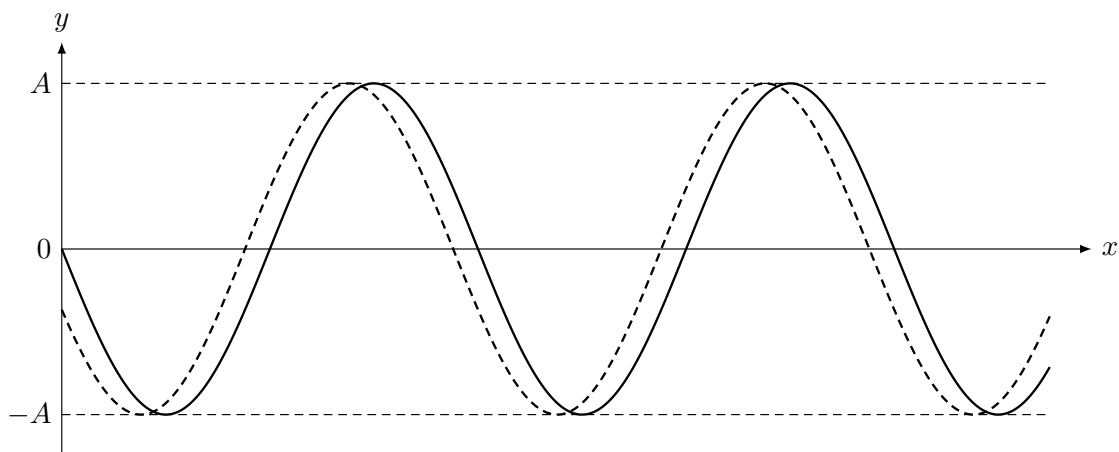
- (1) 時刻 $t = 0$ において，媒質の振動の速度が正方向で大きさが最大となっている位置を $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．
- (2) 時刻 $t = \frac{3}{4}T$ における波形グラフ（横軸位置 x , 縦軸媒質の変位 y ）を $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で図示せよ．
- (3) 時刻 $t = \frac{3}{4}T$ において，媒質の振動の速度が負方向で大きさが最大となっている位置を $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．
- (4) 位置 $x = \frac{\lambda}{2}$ における媒質の変位を，時刻 t の関数として表す式 $y(\lambda/2, t)$ を求めよ．また，位置 $x = \frac{\lambda}{2}$ における振動グラフ（横軸時刻 t , 縦軸媒質の変位 y ）を $0 \leq t \leq 2T$ の範囲で図示せよ．



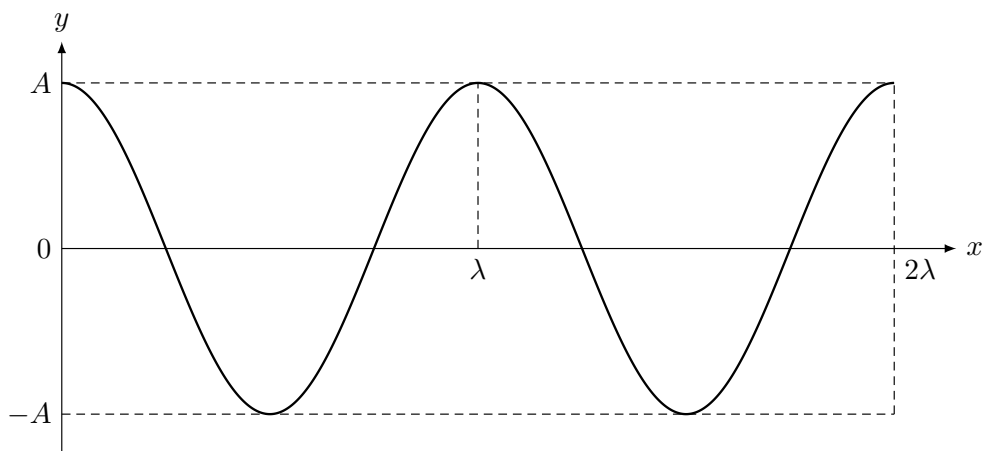
【解答】

- (1) 時刻 $t = 0$ から少しだけ後の時刻でのグラフは下図の破線のようにになる．図より，

$$x = \underbrace{\frac{\lambda}{2}}, \quad \underbrace{\frac{3}{2}\lambda}.$$

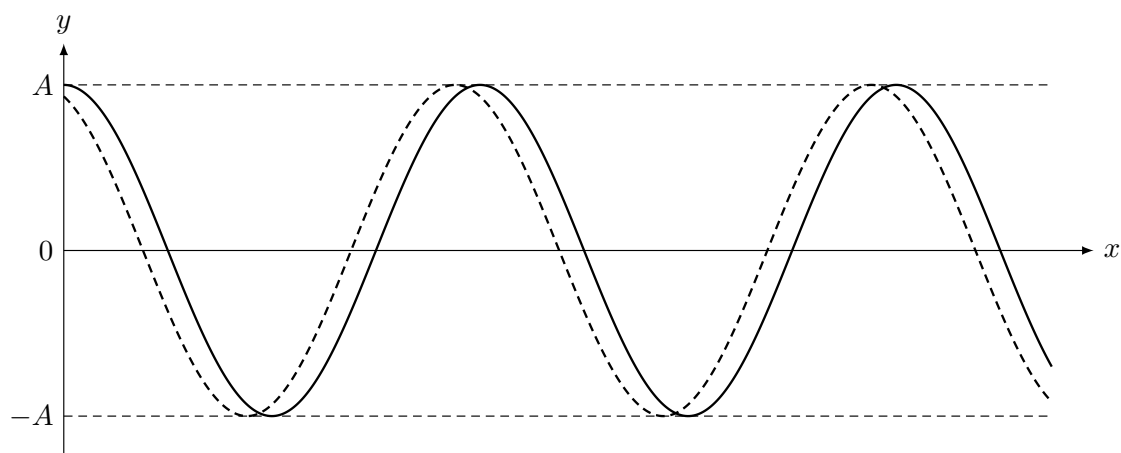


- (2) 時刻 $t = \frac{3}{4}T$ での波形グラフは x 負方向に $\frac{3}{4}\lambda$ だけ平行移動したものとなる（下図）．



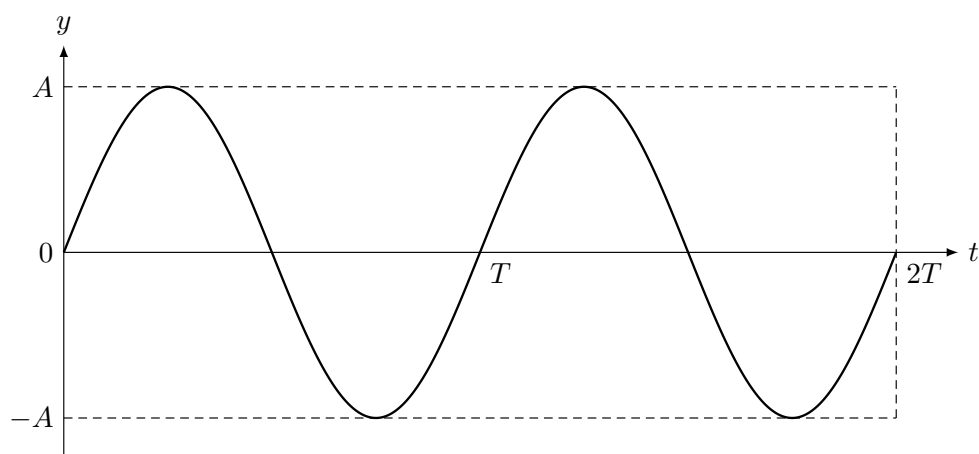
- (3) 時刻 $t = \frac{3}{4}T$ から少しだけ後の時刻でのグラフは下図の破線のようにになる．図より，

$$x = \underbrace{\frac{1}{4}\lambda}, \quad \underbrace{\frac{5}{4}\lambda}.$$



- (4) $t = 0$ で $y = 0$, $t = \frac{T}{4}$ で $y = A$ へえ,

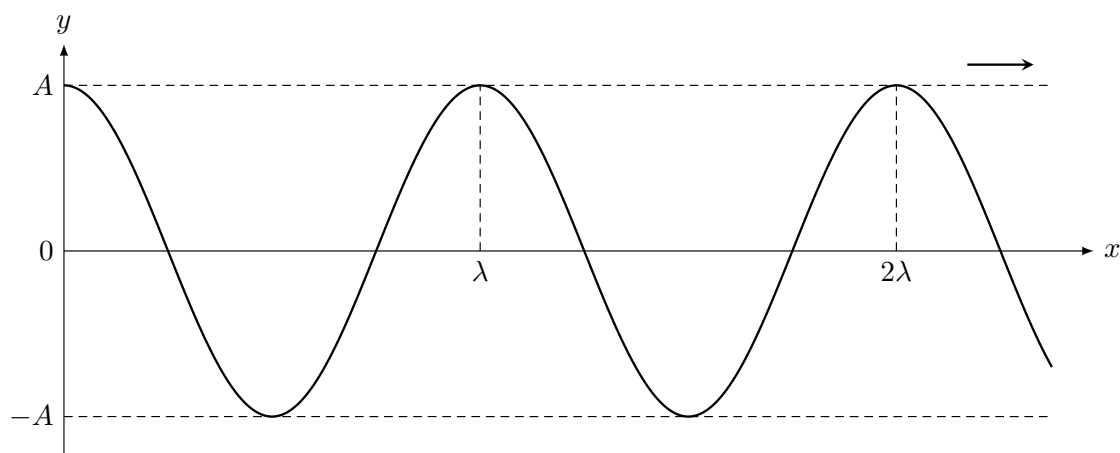
$$y(\lambda/2, t) = A \sin\left(\frac{2\pi v}{\lambda} t\right).$$



5. 波形グラフの読み取り（縦波）

x 軸の沿った媒質中を正方向に伝わる縦波（疎密波）の正弦波がある．時刻 $t = 0$ において，波形グラフ（縦軸媒質の変位 y ，横軸媒質の位置 x ）は図のようであった．媒質の変位 y の符号は， x 軸正の向きを正とする．

- (1) 時刻 $t = 0$ において，媒質が最も密になっている位置を， $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．
- (2) 時刻 $t = 0$ において，媒質が最も疎になっている位置を， $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．
- (3) 時刻 $t = 0$ において，媒質の速度が最大^{*2}となっている位置を， $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．



^{*2} 速度が最大ということは，正かつ最大ということである．
2025.11.14 版

【解答】

- (1) 密の位置は図から読み取って,

$$x = \underbrace{\frac{1}{4}}\lambda, \underbrace{\frac{5}{4}}\lambda.$$

- (2) 疎の位置は図から読み取って,

$$x = \underbrace{\frac{3}{4}}\lambda, \underbrace{\frac{7}{4}}\lambda.$$

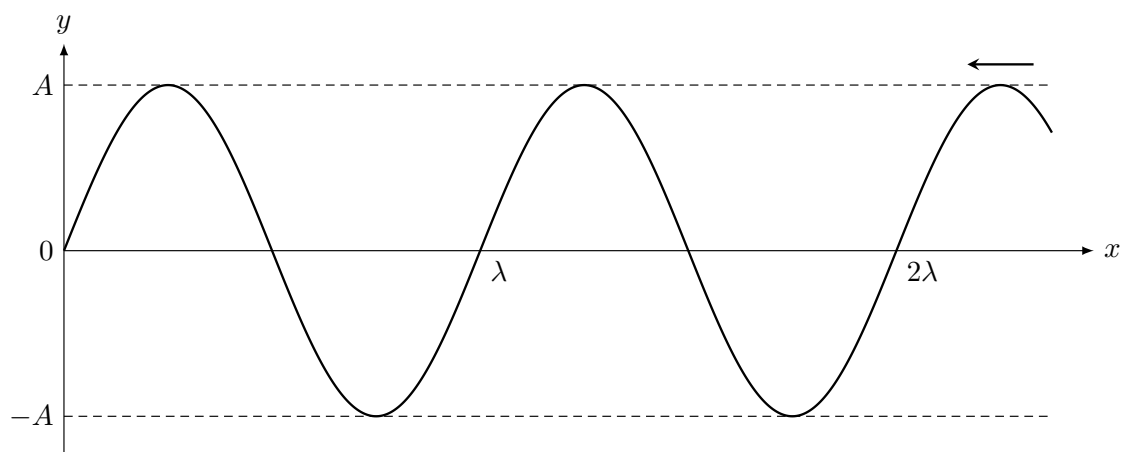
- (3) 少し後の状態を考えて,

$$x = \underbrace{\frac{1}{4}}\lambda, \underbrace{\frac{5}{4}}\lambda.$$

6. 波形グラフの読み取り（縦波）

x 軸の沿った媒質中を負方向に伝わる縦波（疎密波）の正弦波がある．時刻 $t = 0$ において，波形グラフ（縦軸媒質の変位 y ，横軸媒質の位置 x ）は図のようであった．媒質の変位 y の符号は， x 軸負の向きを正とする．

- (1) 時刻 $t = 0$ において，媒質が最も密になっている位置を， $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．
- (2) 時刻 $t = 0$ において，媒質の速さが x 正方向に最大となっている位置を， $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．
- (3) 時刻 $t = 0$ において，位置 $x = \lambda$ の振動グラフを， $0 \leq t \leq T$ の範囲で図示し，時刻 t の関数として表せ．ただし， T は振動周期を表す．



【解答】

- (1) 密の位置は図から読み取って,

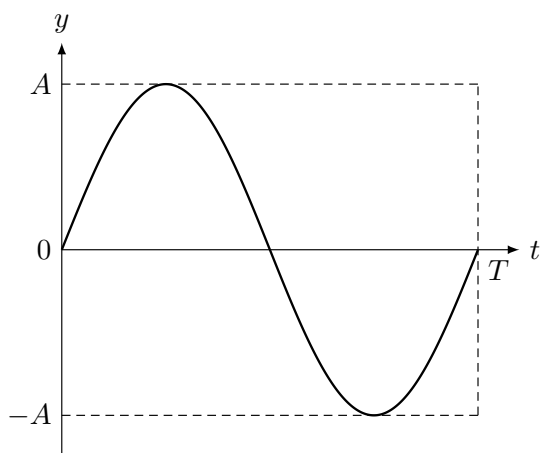
$$x = \underline{0}, \underline{\lambda}, \underline{2\lambda}.$$

- (2) 少し後の波形グラフから読み取って,

$$x = \underline{\frac{1}{2}\lambda}, \underline{\frac{3}{2}\lambda}.$$

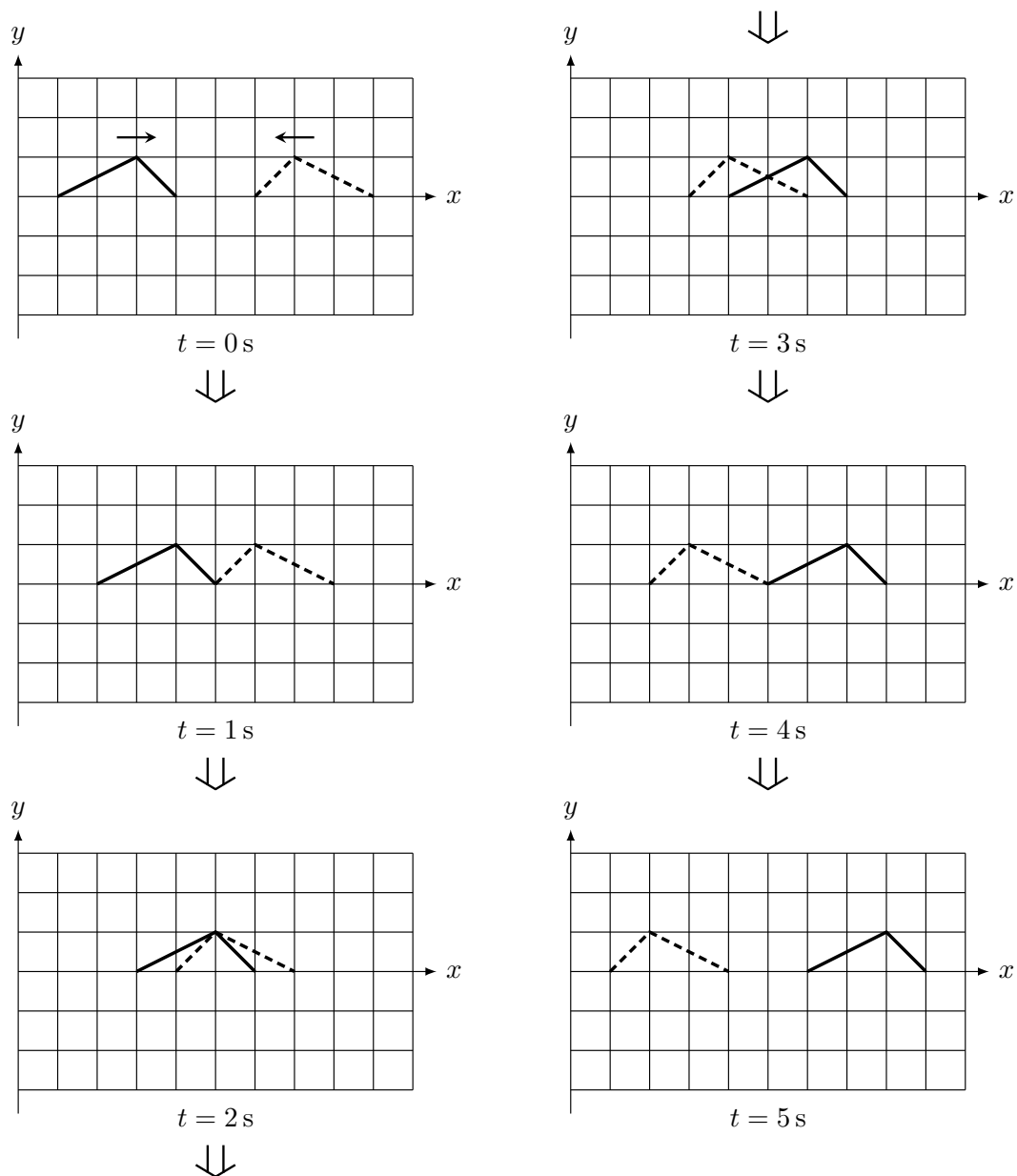
- (3) 振動グラフの関数は,

$$\underline{y(\lambda, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}.$$

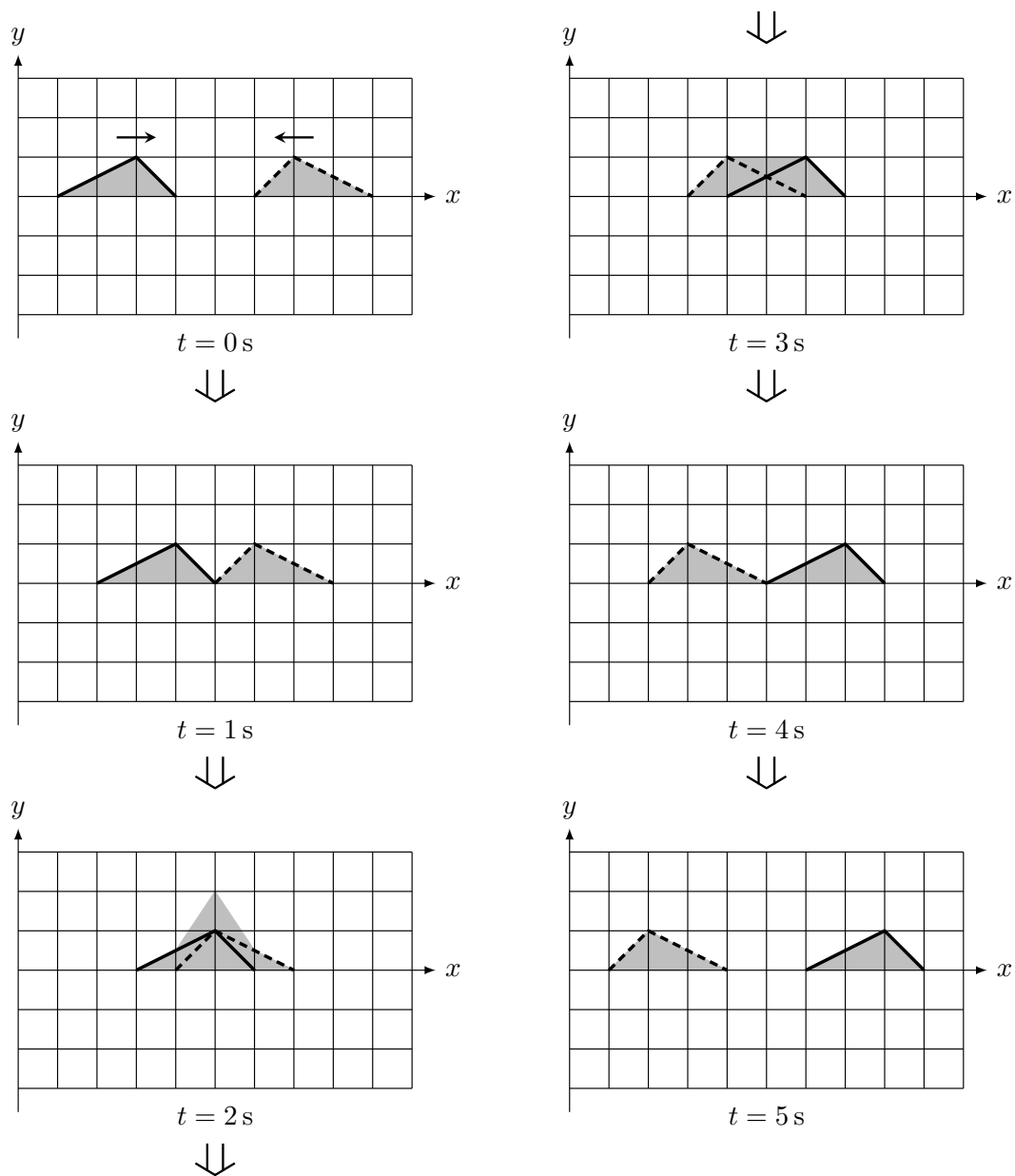


7. 合成波の作図

図のように、実線で描かれた右向き進行波（波1と呼ぶ）と、破線で描かれた左向き進行波（波2と呼ぶ）の各時刻における合成波を作図せよ。

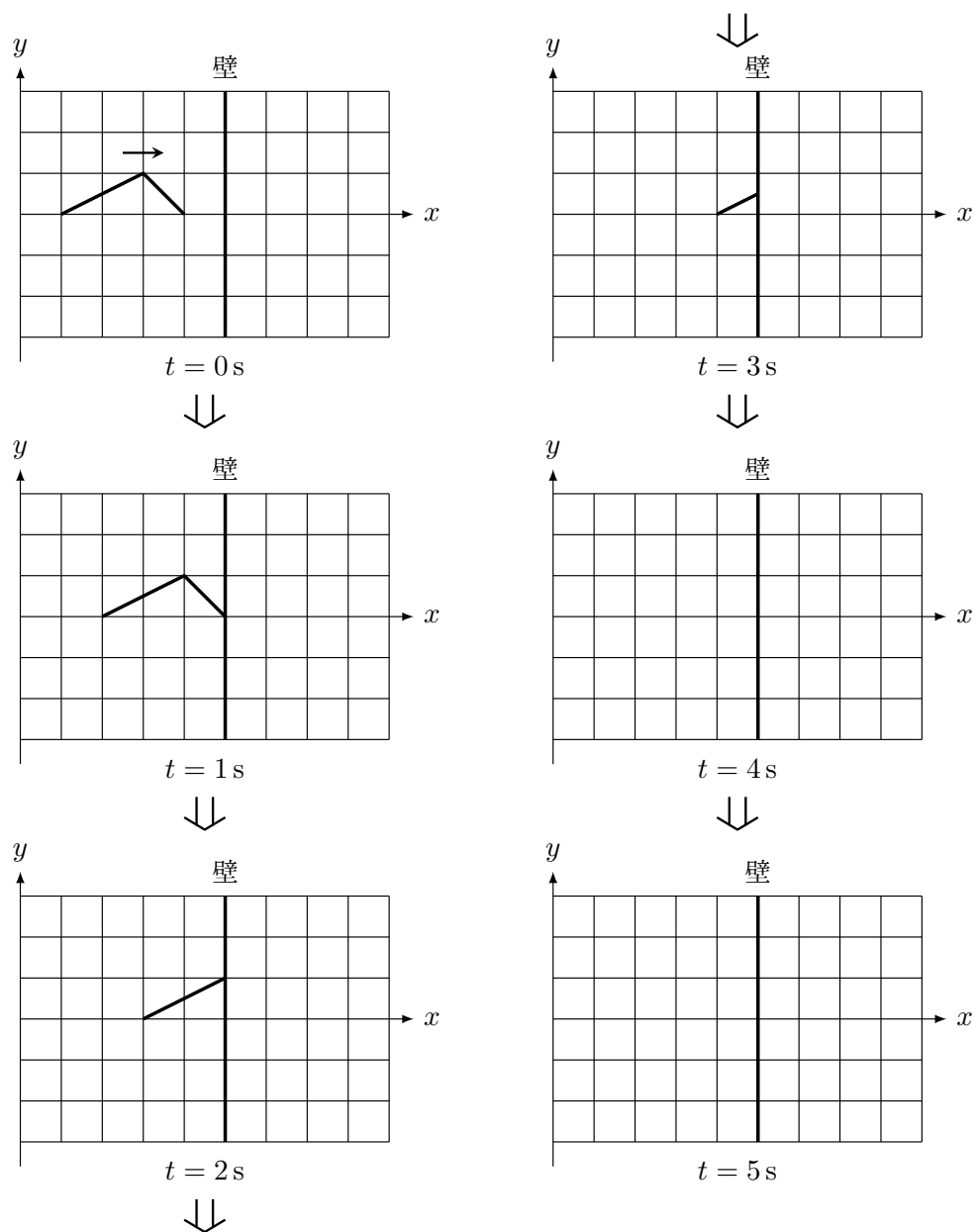


【解答】



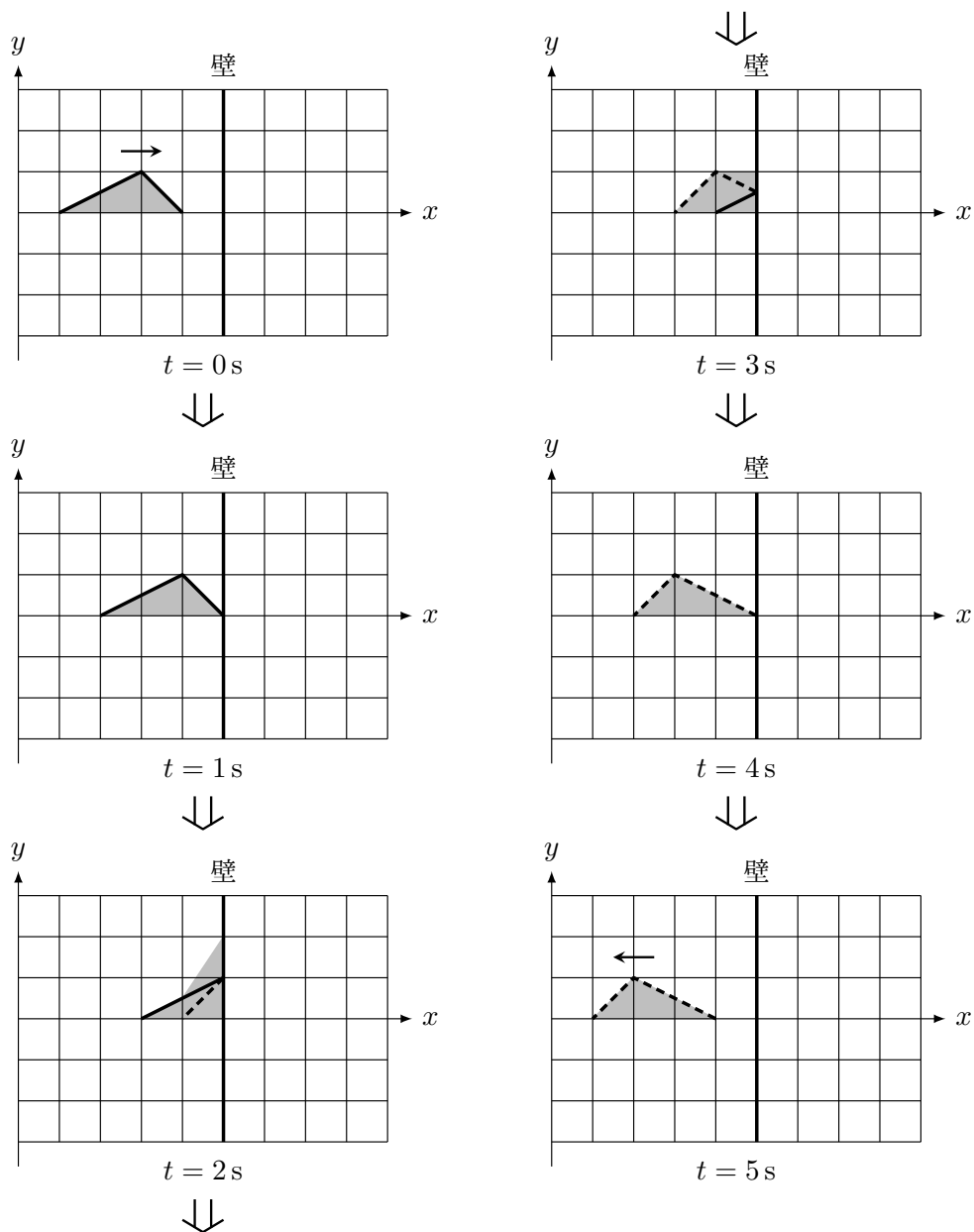
8. 反射波の作図①

図のように、実線で描かれた右向き進行波が壁（自由端）で反射する。各時刻で生じる反射波と、観測される合成波を作図せよ。



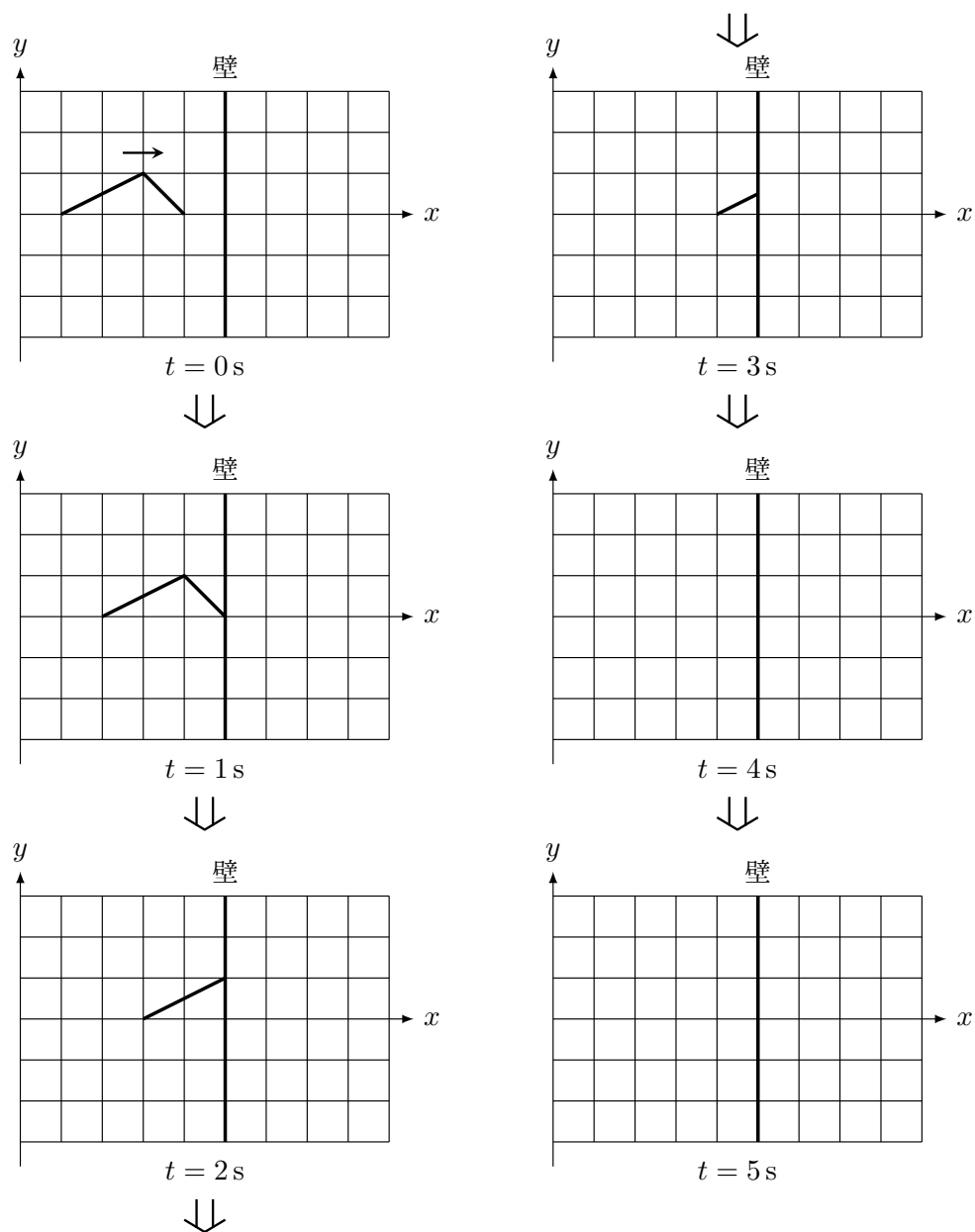
【解答】

反射波は破線、合成波は塗りつぶしで示す。



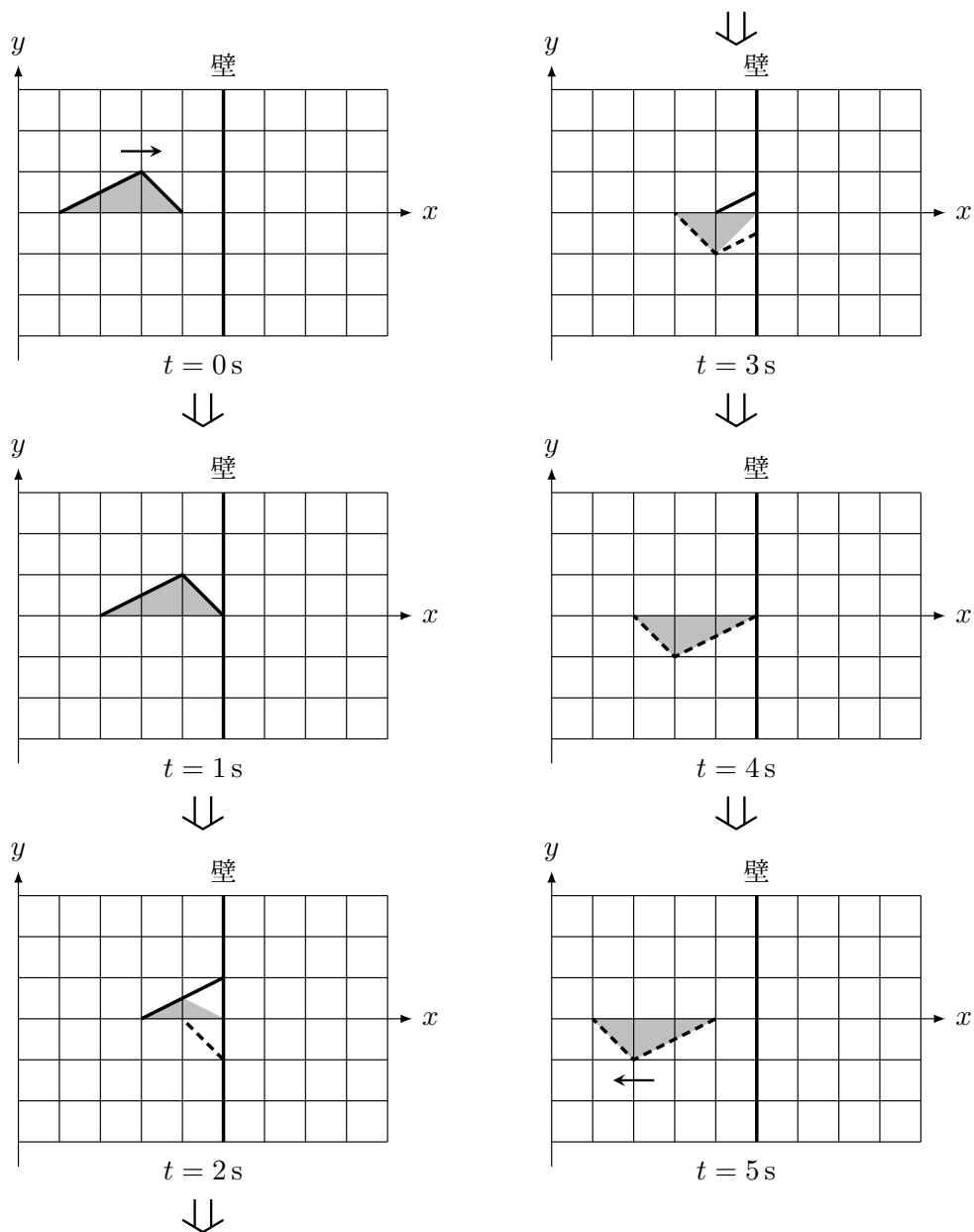
9. 反射波の作図②

図のように、実線で描かれた右向き進行波が壁（固定端）で反射する。各時刻で生じる反射波と、観測される合成波を作図せよ。



【解答】

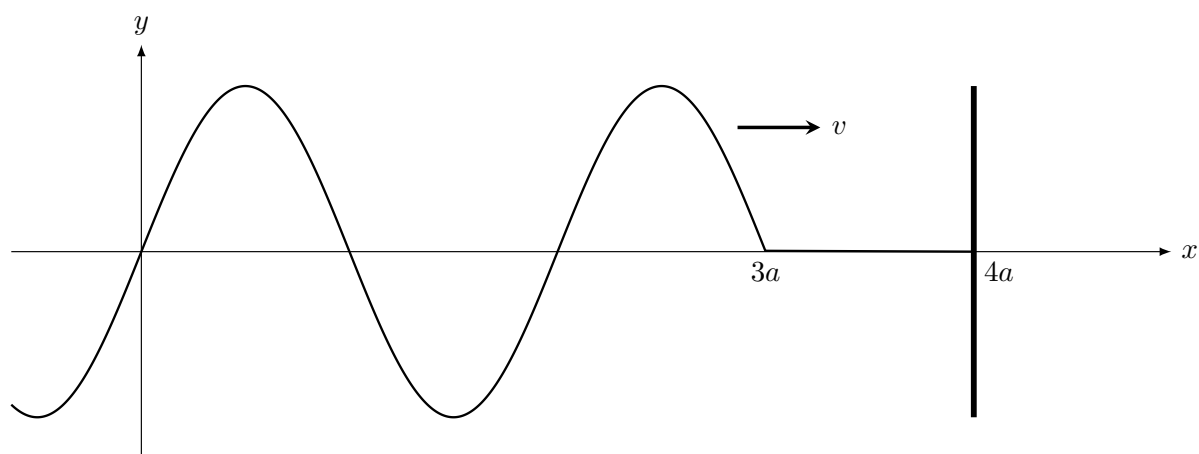
反射波は破線、合成波は塗りつぶしで示す。



10. 波の反射

図のように、 x 軸正方向に速さ v で伝播する正弦進行波（振幅 A ）を考える。図は時刻 $t = 0$ の瞬間を表している。 $x = 4a$ に反射板があり、進行波は反射板で自由端反射を行う。波の減衰は無視する。

- (1) 媒質の振動周期 T を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 4a$ の範囲で観測される定常波の節の数を求めよ。
- (3) $x = 3a$ にある媒質の振動グラフを、 $0 \leq t \leq 2T$ の範囲で図示せよ。
- (4) $x = \frac{7}{2}a$ にある媒質の振動グラフを、 $0 \leq t \leq T$ の範囲で図示せよ。



【解答】

- (1) 波の基本式より,

$$T = \frac{2a}{\underbrace{v}}$$

- (2) 自由端反射ゆえ $x = 4a$ は腹となる．そこから半波長（長さ a ）おきに腹が生じるので $x = 0, a, 2a, 3a, 4a$ の位置に腹が生じる．その間に節が存在するので節は 4 個．
- (3) $t = 0, t = \frac{1}{4}T, t = \frac{2}{4}T$ のように少しずつ時間経過した後のグラフを考え（解答では図を省略），その各時刻における $x = 3a$ の変位を見ればよい^{*3}．

■ $t = \frac{1}{4}T$ のとき，波は $v \cdot \frac{T}{4} = \frac{a}{2}$ だけ右へ平行移動している．このとき，入射波の先端はまだ反射板に達していないので， $x = 3a$ には入射波のみ存在する．よって，入射波の変位を見れば $y = A$ とわかる．

■ $t = \frac{2}{4}T = \frac{1}{2}T$ のとき，波は $v \cdot \frac{2}{4}T = a$ だけ右へ平行移動している．このとき，入射波の先端はちょうど反射板に達しており， $x = 3a$ には入射波のみ存在する．よって，入射波の変位を見れば $y = 0$ とわかる．

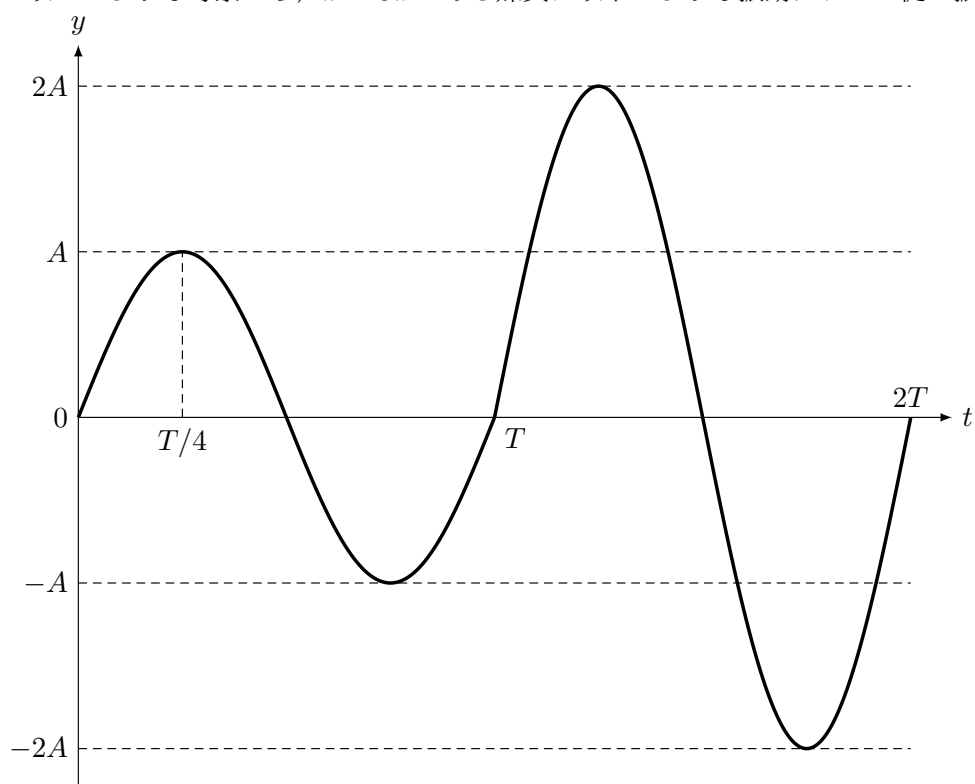
■ $t = \frac{3}{4}T$ のとき，波は $v \cdot \frac{3}{4}T = \frac{3}{2}a$ だけ右へ平行移動している．このとき，入射波の先端は反射板の右側 $\frac{a}{2}$ の位置まで達している（実際には反射板より右側の入射波は存在しておらず，便宜的に描いているだけであることに注意）．このとき，反射波の先端は $x = \frac{7}{2}a = 3.5a$ まで達しているが， $x = 3a$ にはまだ入射波のみが存在している．よって，入射波の変位を見れば $y = -A$ とわかる．

■ $t = T$ のとき，波は $vT = 2a$ だけ右へ平行移動している．このとき，入射波の先端は反射板の右側 a の位置まで達している（このときも，実際には反射板より右側の入射波は存在していないことに注意）．このとき，反射波の先端はちょうど $x = 3a$ まで達しており，これ以降 $x = 3a$ で観測される波は入射波と反射波の合成波となる．よって，入射波の変位が $y = 0$ ，反射波の変位が $y' = 0$ であるから， $x = 3a$ で観測される合成波の変位は $Y = 0$ とわかる．

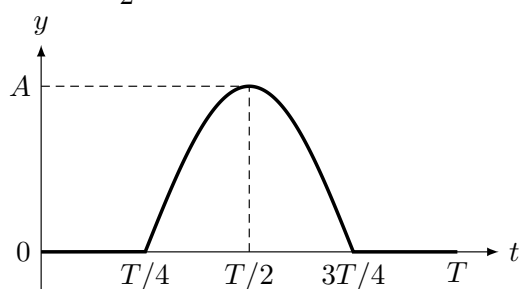
■ $t = \frac{5}{4}T$ のとき，波は $v \cdot \frac{5}{4}T = \frac{5}{2}a$ だけ右へ平行移動している．このとき，入射波の先端は反射板の右側 $\frac{3}{2}a$ の位置まで達している（このときも，実際には反射板より右側の入射波は存在していないことに注意）．このとき，反射波の先端はちょうど $x = \frac{5}{2}a$ まで達している．よって，入射波の変位が $y = A$ ，反射波の変位が $y' = A$ であるから， $x = 3a$ で観測される合成波の変位は $Y = 2A$ とわかる．

^{*3} $x = 3a$ は腹となる．反射波は $t = T$ で $x = 3a$ に達する．以上を踏まえて，グラフは上図のようになると判断してもよい．
 ▶ <https://koremura.net/>

以上のような考察から、 $x = 3a$ にある媒質は以下のような振動グラフに従い振動を行う。



- (4) 前問で作図した（はずの） $t = 0$, $t = \frac{1}{4}T$, $t = \frac{2}{4}T$ のように少しずつ時間経過した後の各グラフの $x = \frac{7}{2}a$ の媒質の変位を見ればよい^{*4}。

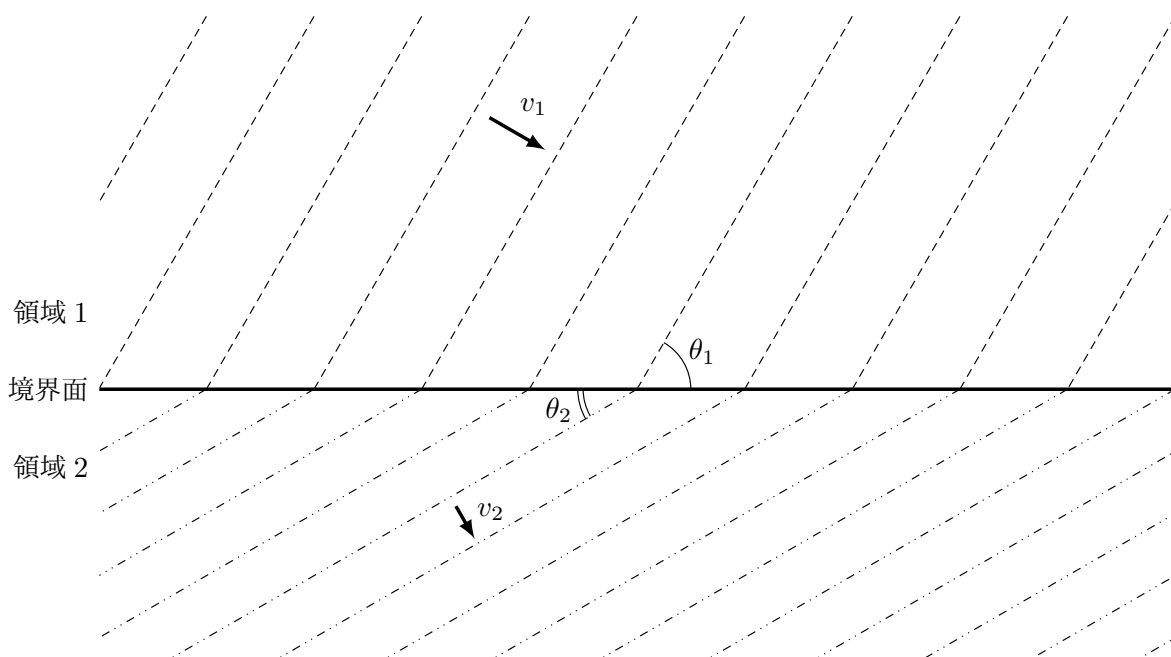


^{*4} $x = \frac{7}{2}a$ は節となる。反射波は $t = \frac{3}{4}T$ で $x = \frac{7}{2}a$ に達する。以上を踏まえて、グラフは上図のようになると判断してもよい。

11. 波面を見る波の反射・屈折

領域1内を速さ v_1 で伝わる入射波（波長 λ_1 ）の反射，屈折について考える．領域1側の媒質1に対する領域2の媒質2の相対屈折率^{*5}を n とする．

- (1) 入射波の振動数 f を求めよ．
- (2) 領域2における波の速さ v_2 ，および波長 λ_2 ，波の進行方向の正弦 $\sin \theta_2$ を求めよ．
- (3) 領域1では，入射波と反射波による合成波が観測される．合成波の節をつないだ節線の間隔 d を求めよ．



^{*5} 領域1の屈折率を1としたときの領域2の屈折率を指す．すなわち，基準物質の屈折率を1としたとき，媒質1の屈折率を n_1 ，媒質2の屈折率を n_2 としたとき， $\frac{n_2}{n_1}$ で定義される．

【解答】

(1) 波の基本式より,

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1}.$$

(2) 両媒質間で振動数は不変であり, 波長, 速さはそれぞれ,

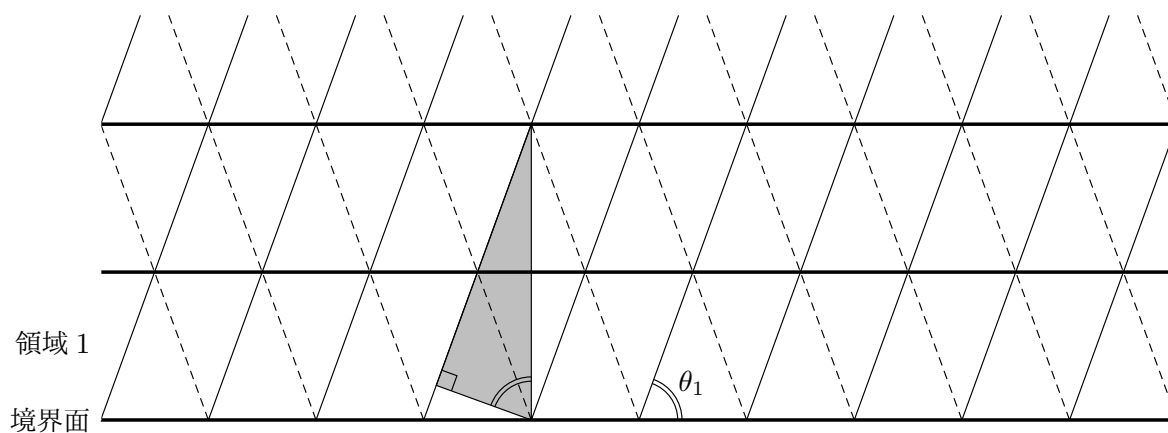
$$v_2 = \frac{v_1}{n}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{n}.$$

また, スネル則より,

$$1 \cdot \sin \theta_1 = n \sin \theta_2, \quad \therefore \sin \theta_2 = \frac{1}{n} \sin \theta_1.$$

(3) 以下の図より^{*6},

$$\lambda_1 = 2d \cos \theta_1, \quad \therefore d = \frac{\lambda_1}{2 \cos \theta_1}.$$



^{*6} 入射波を実線, 反射波を破線で示し, 節線, もしくは腹線を太い実線で示した. 固定端反射なら節線, 自由端反射なら腹線となるが, とともに間隔は等しいので図に示した太い実線の間隔を計算すればよい.

12. 正弦波の式①（基本）

以下では、媒質を伝わる波の速さを v 、媒質の振動周期を T とし、波源で生じた波が十分行き届いている状態を考える。

- (1) x 軸に沿った媒質を正方向へ伝わる正弦波を考える。位置 $x = 0$ における媒質の変位 y は、時刻 t の関数として、

$$y(0, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

と表される。時刻 t 、位置 $x (> 0)$ における媒質の変位 $y(x, t)$ を求めよ。

- (2) x 軸に沿った媒質を負方向へ伝わる正弦波を考える。位置 $x = 0$ における媒質の変位 y は、時刻 t の関数として、

$$y(0, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta_0\right)$$

と表される。時刻 t 、位置 $x (> 0)$ における媒質の変位 $y(x, t)$ を求めよ。

（できる人は） $x < 0$ の領域でも同じ波の式で表されることを確認せよ。

【解答】

- (1) 原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は $\frac{x}{v}$ である。よって、

$$\begin{pmatrix} \text{位置 } x \text{ での} \\ \text{今の変位} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{原点での} \\ x/v \text{ 前の変位} \end{pmatrix}$$

より、

$$y(x, t) = y\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = \underbrace{A \sin \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \right\}}.$$

- (2) 位置 x から原点まで波が伝わるのに要する時間は $\frac{x}{v}$ である。よって、

$$\begin{pmatrix} \text{位置 } x \text{ での} \\ \text{今の変位} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{原点での} \\ x/v \text{ 後の変位} \end{pmatrix}$$

より、

$$y(x, t) = y\left(0, t + \frac{x}{v}\right) = \underbrace{A \sin \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{x}{v} \right) + \theta_0 \right\}}.$$

なお、 $x < 0$ の領域についても、原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は $\frac{|x|}{v}$ であるから、

$$\begin{pmatrix} \text{位置 } x \text{ での} \\ \text{今の変位} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{原点での} \\ |x|/v \text{ 前の変位} \end{pmatrix}$$

より*7、

$$y(x, t) = y\left(0, t - \frac{|x|}{v}\right) = \underbrace{A \sin \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{x}{v} \right) + \theta_0 \right\}}.$$

*7 $x < 0$ ゆえ、 $|x| = -x$ となることに注意.

13. 正弦波の式②（反射）

以下では、媒質を伝わる波の速さを v 、媒質の振動数を f とし、波源で生じた波が十分行き届いている状態を考える。

- I x 軸に沿った媒質を伝わる正弦波を考える。位置 $x = 0$ には振動数 f で振動する波源があり、その変位 y は、時刻 t の関数として、

$$y(0, t) = A \sin(2\pi ft + \theta_0)$$

と表される。この振動によって生じた x 軸正方向に伝わる波を入射波と呼ぶ。位置 $x = L$ には反射板があり、入射波が反射板に入射することによって生じた波を反射波と呼ぶ。

- (1) 時刻 t 、位置 x ($0 < x < L$) における入射波の変位 $y_{\text{in}}(x, t)$ を求めよ。
- (2) 反射は自由端反射の条件下で行われたものとする。時刻 t 、位置 x ($0 < x < L$) における反射波の変位 $y_{\text{re}}(x, t)$ を求めよ。
- (3) 反射は固定端反射の条件下で行われたものとする。時刻 t 、位置 x ($0 < x < L$) における反射波の変位 $y_{\text{re}}(x, t)$ を求めよ。

- II x 軸に沿った媒質を伝わる正弦波を考える。位置 $x = 0$ には反射板があり、また、 $x = 0$ における x 負方向に伝わる波（入射波と呼ぶ）の変位 y は、時刻 t の関数として、

$$y(0, t) = A \sin(2\pi ft + \theta_0)$$

と表される。入射波が反射板に入射することによって生じた波を反射波と呼ぶ*8。

- (1) 時刻 t 、位置 x ($0 < x < L$) における入射波の変位 $y_{\text{in}}(x, t)$ を求めよ。
- (2) 反射は自由端反射の条件下で行われたものとする。時刻 t 、位置 x ($0 < x < L$) における反射波の変位 $y_{\text{re}}(x, t)$ を求めよ。
- (3) 反射は固定端反射の条件下で行われたものとする。時刻 t 、位置 x ($0 < x < L$) における反射波の変位 $y_{\text{re}}(x, t)$ を求めよ。

*8 このとき、反射波は x 正方向に伝搬する。

【解答】

- I (1) 原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は $\frac{x}{v}$ である。よって、

$$y_{\text{in}}(x, t) = y\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = \underbrace{A \sin \left\{ 2\pi f \left(t - \frac{x}{v} \right) + \theta_0 \right\}}.$$

- (2) 自由端反射では波形がそのままの形で反射される^{*9}。原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は反射していることを考慮すれば $\frac{2L-x}{v}$ である。よって、

$$y_{\text{re}}(x, t) = +y\left(0, t - \frac{2L-x}{v}\right) = \underbrace{A \sin \left\{ 2\pi f \left(t + \frac{x-2L}{v} \right) + \theta_0 \right\}}.$$

- (3) 固定端反射では波形が上下反転して反射される^{*10}。原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は反射していることを考慮すれば $\frac{2L-x}{v}$ である。よって、

$$y_{\text{re}}(x, t) = -y\left(0, t - \frac{2L-x}{v}\right) = \underbrace{-A \sin \left\{ 2\pi f \left(t + \frac{x-2L}{v} \right) + \theta_0 \right\}}.$$

- II (1) 位置 x から原点まで波が伝わるのに要する時間は $\frac{x}{v}$ である。よって、

$$y_{\text{in}}(x, t) = y\left(0, t + \frac{x}{v}\right) = \underbrace{A \sin \left\{ 2\pi f \left(t + \frac{x}{v} \right) + \theta_0 \right\}}.$$

- (2) 自由端反射では波形がそのままの形で反射される。原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は $\frac{x}{v}$ である。よって、

$$y_{\text{re}}(x, t) = +y\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = \underbrace{A \sin \left\{ 2\pi f \left(t - \frac{x}{v} \right) + \theta_0 \right\}}.$$

- (3) 固定端反射では波形が上下反転して反射される。原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は $\frac{x}{v}$ である。よって、

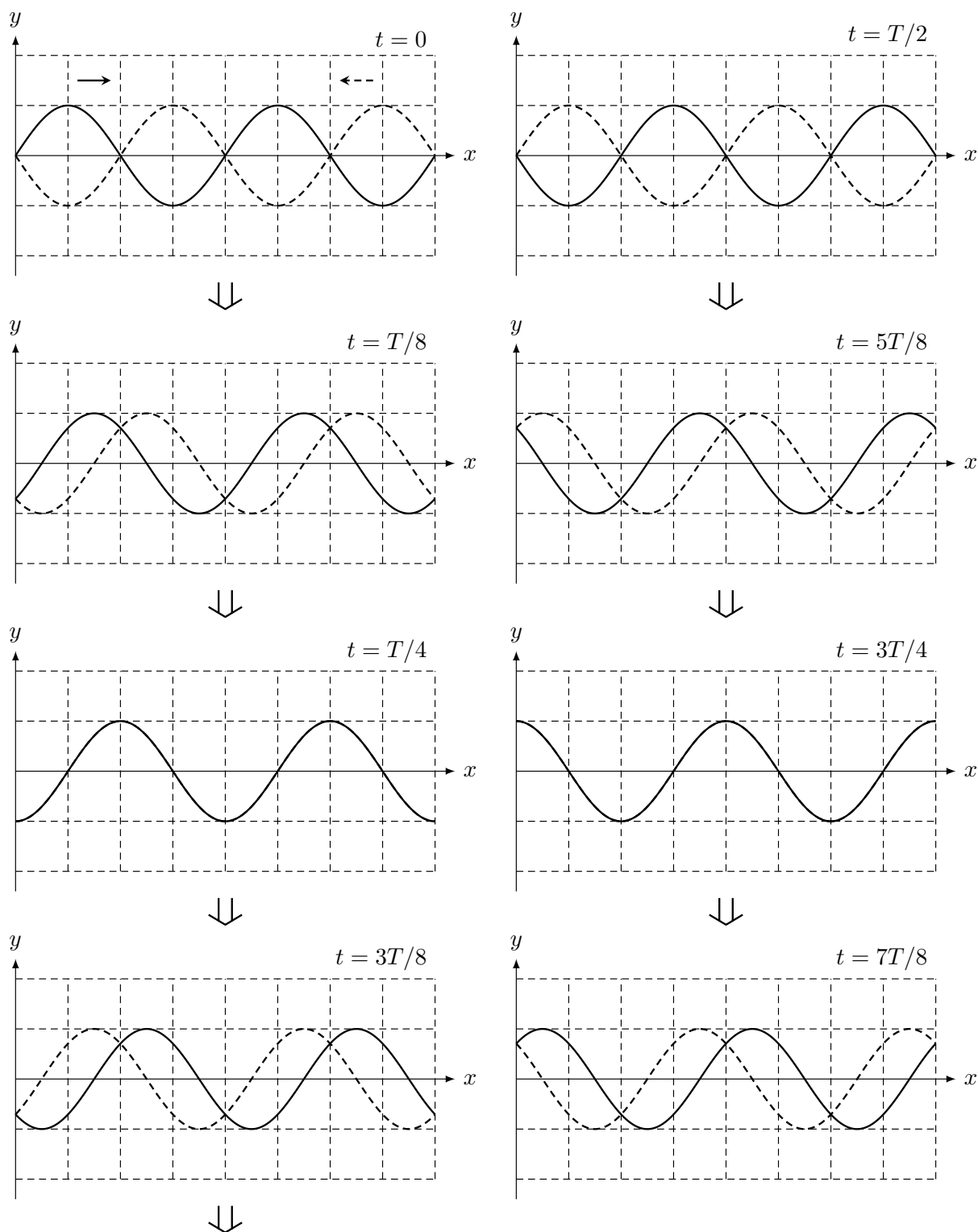
$$y_{\text{re}}(x, t) = -y\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = \underbrace{-A \sin \left\{ 2\pi f \left(t - \frac{x}{v} \right) + \theta_0 \right\}}.$$

^{*9} 位相で言えば、位相のずれがない。

^{*10} 位相で言えば、位相が π だけずれる。

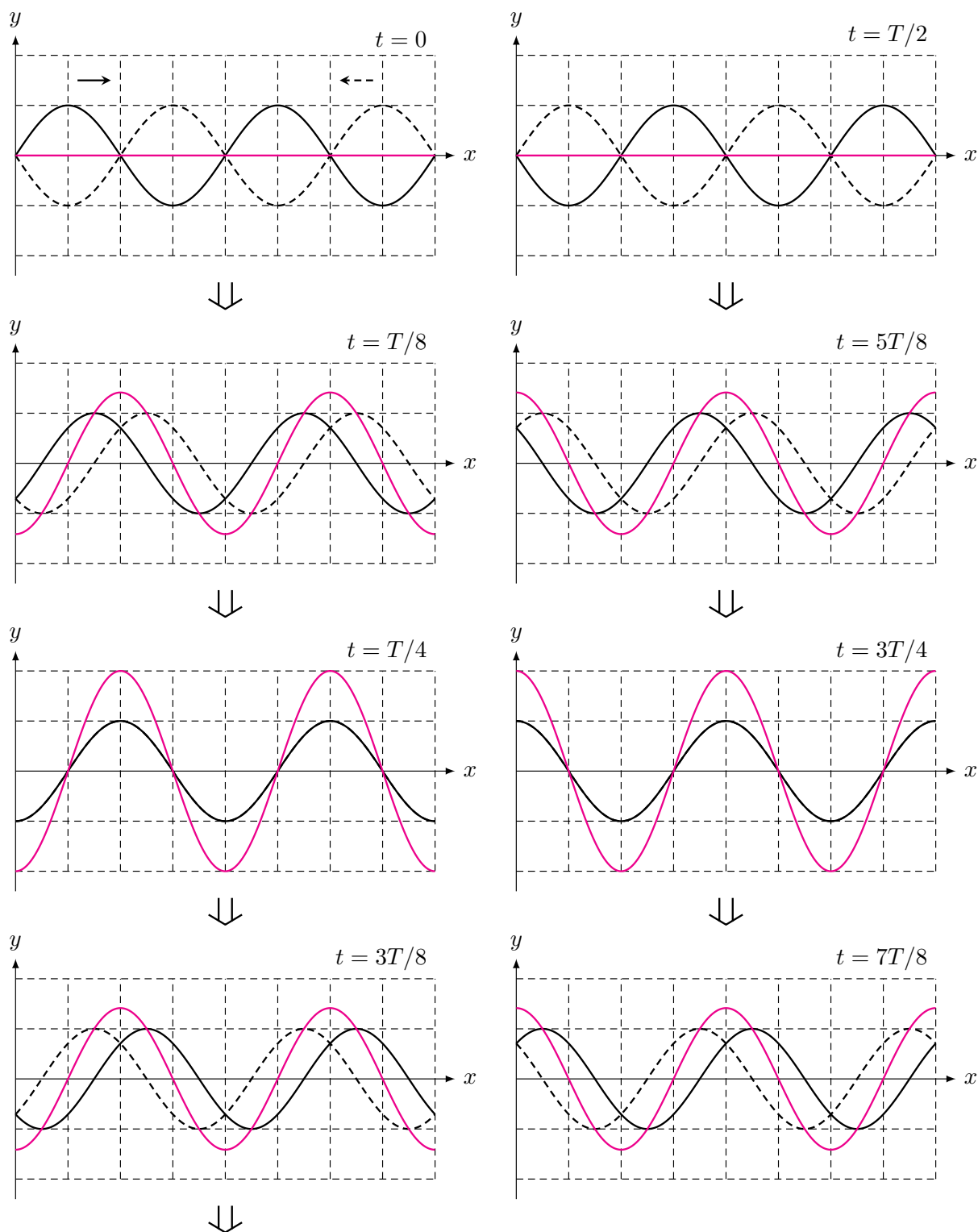
14. 干渉～定常波のグラフ

図のように、振幅、波長、振動数が等しい互いに逆向きに伝搬する正弦波の合成波を作図せよ。



【解答】

合成波はマゼンタの線で示す。



15. 干渉～正弦波の式③（定常波）

x 軸に沿った媒質を伝わる正弦波を考える．振幅 A ，波長 λ ，振動数 f が等しく互いに逆向きに伝わる波の重ね合わせによって定常波が生じる． x 正方向に伝わる正弦波の時刻 t ，位置 x における変位は，

$$y_+(x, t) = A \sin \left[2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right) + \theta_+ \right],$$

と表され， x 負方向に伝わる正弦波の時刻 t ，位置 x における変位は，

$$y_-(x, t) = A \sin \left[2\pi \left(ft + \frac{x}{\lambda} \right) + \theta_- \right],$$

と表される．時刻 t ，位置 x における定常波の変位 $Y(x, t)$ を，三角関数の積の形で表せ．

必要であれば，以下の三角関数の公式を用いてよい．

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right).$$

【解答】

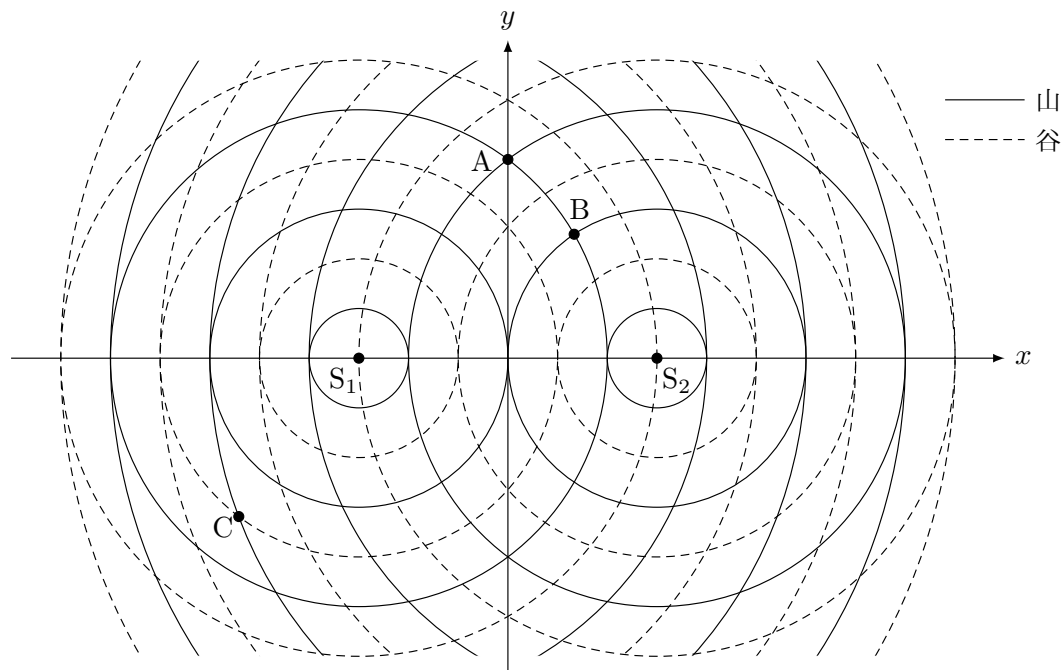
重ね合わせを考えて、

$$\begin{aligned} Y(x, t) &= y_+(x, t) + y_-(x, t) \\ &= A \{ \sin(\bullet) + \sin(\blacktriangle) \} \\ &= 2A \sin\left(\frac{\bullet + \blacktriangle}{2}\right) \cos\left(\frac{\bullet - \blacktriangle}{2}\right) \\ &= 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\theta_+ - \theta_-}{2}\right) \sin\left(2\pi ft + \frac{\theta_+ + \theta_-}{2}\right). \end{aligned}$$

16. 水面波の干渉

水面上の2点 S_1, S_2 が周期 T , 振幅 A で振動しており, 波長 λ の円形波が送り出されている. 図は時刻 $t = 0$ における水面波の様子で, S_1, S_2 から出は波の山を実線, 谷を破線で示してある. 各波源からの波の減衰は考えないものとする.

- (1) 点 A, B, C における振幅をそれぞれ求めよ.
- (2) 点 A において, 各波源から届く波の位相差を最も簡単な形で求めよ. ただし位相差は, S_1, S_2 からの位相をそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 とし, $\phi_1 - \phi_2$ として計算せよ.
- (3) 点 B において, 各波源から届く波の位相差を最も簡単な形で求めよ. ただし位相差は, S_1, S_2 からの位相をそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 とし, $\phi_1 - \phi_2$ として計算せよ.
- (4) 点 C において, 各波源から届く波の位相差を最も簡単な形で求めよ. ただし位相差は, S_1, S_2 からの位相をそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 とし, $\phi_1 - \phi_2$ として計算せよ.
- (5) 位相差の等しい点を結ぶと, xy 平面内には双曲線が生じる. 強め合いを結んだ曲線 (腹線と呼ぶ) は, 何本生じるか.



【メモ】

干渉条件は、次の通り位相差で議論できるようにしておく (m は整数).

$$(\text{位相差}) = \frac{2\pi}{\lambda}(\text{経路差}) + (\text{初期位相差}) + (\text{反射}) = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強め合い}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱め合い}). \end{cases}$$

なお、位相のずれがあれば左辺に π を足すか引くかしておけばよい.

【解答】

(1) A の振幅 : $2A$ B の振幅 : $2A$ C の振幅 : 0

(2) $\overline{S_1A} = \frac{5}{2}\lambda$, $\overline{S_2A} = \frac{5}{2}\lambda$ ゆえ位相差は,

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{5}{2}\lambda - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{5}{2}\lambda = 0.$$

よって、位相差が π の 0 倍 (π の偶数倍) となり、点 A では 2 つの波が強め合う (振幅最大となる) ことも確認できる.

(3) $\overline{S_1B} = \frac{5}{2}\lambda$, $\overline{S_2B} = \frac{3}{2}\lambda$ ゆえ位相差は,

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{5}{2}\lambda - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3}{2}\lambda = 2\pi.$$

よって、位相差が π の 2 倍 (π の偶数倍) となり、点 B では 2 つの波が強め合う (振幅最大となる) ことも確認できる.

(4) $\overline{S_1C} = 2\lambda$, $\overline{S_2C} = \frac{9}{2}\lambda$ ゆえ位相差は,

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\lambda - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{9}{2}\lambda = -\frac{5}{2}\pi.$$

よって、位相差が π の -5 倍 (π の奇数倍) となり、点 C では 2 つの波が弱め合う (振幅最小となる) ことも確認できる.

17. 水面波の干渉 (I, II は全員取り組みたい)

水面上の 2 点 S_1, S_2 が周期 T , 振幅 A で振動しており, 波長 λ の円形波が送り出されている. 図は時刻 $t = 0$ における水面波の様子で, S_1, S_2 から出は波の山を実線, 谷を破線で示してある. 各波源からの波の減衰は考えないものとする.

I (1) 図の瞬間において点 A, B, C で観測される合成波の変位を求めよ.

(2) 点 A, B, C で観測される合成波の振幅を求めよ.

(3) 波源の振動の周期を T とする. 水面波の伝わる速さ v を求めよ.

(4) 線分 S_1S_2 上では定常波が観測される. 線分 S_1S_2 上で観測される腹, および節の個数をそれぞれ求めよ. ただし, 波源 S_1, S_2 は数えないものとする.

II (1) 点 A で観測される水面波の変位の時間変化を $0 \leq t \leq \frac{3}{2}T$ の範囲で図示せよ.

(2) 線分 S_1S_2 の延長線上ではどのような波が観測されるか. 簡単に説明せよ.

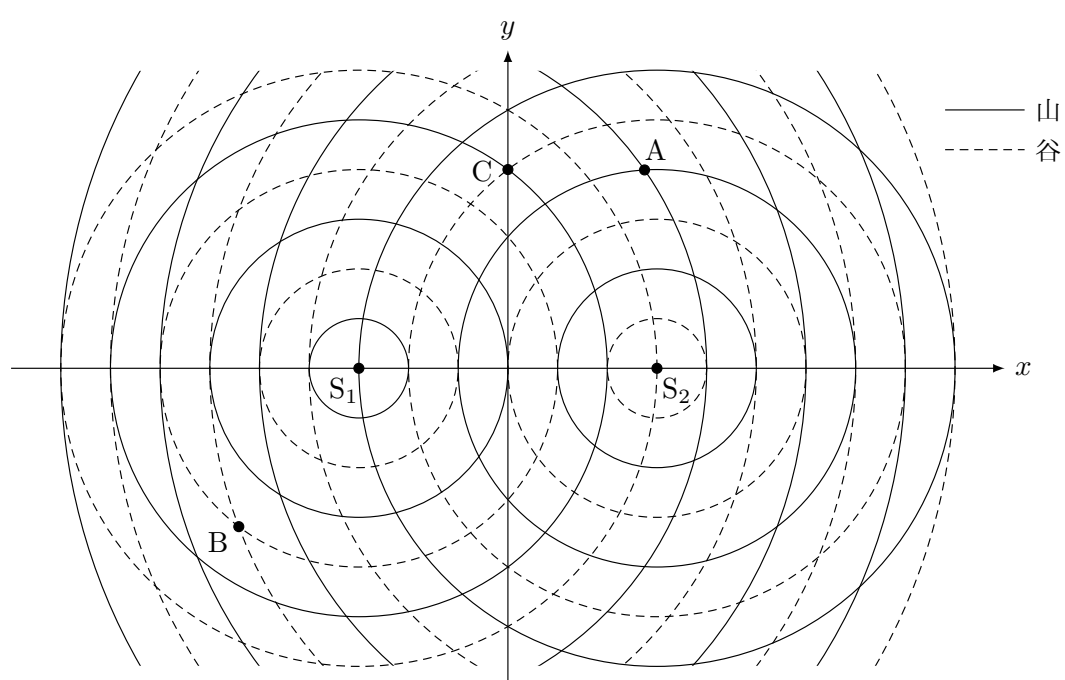
III 図のように, 水面上に xy 平面を貼り, その原点を線分 S_1S_2 の中点に定める. 原点から波源 S_1, S_2 それぞれまでの距離を a とし, xy 平面上の任意の点 $P(x, y)$ で観測される合成波について考える. 以下では, 波源 S_1, S_2 から点 P までの距離を $r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ とし, 時刻 t における波源の S_1, S_2 の振動はそれぞれ $y_1(0, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, $y_2(0, t) = -A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ と与えられる.

(1) 時刻 t に波源 S_1 から r_1 だけ離れた点 P に波源 S_1 からやってくる波の変位 $y_1(r_1, t)$ を求めよ.

(2) 時刻 t に波源 S_2 から r_2 だけ離れた点 P に波源 S_2 からやってくる波の変位 $y_2(r_2, t)$ を求めよ.

(3) 時刻 t に点 P で観測される合成波の変位 $y(x, y, t)$ を, r_1, r_2 を含む式で表せ. なお, 三角関数の恒等式 $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$ を用いて変形すること.

(4) 点 P での変位が恒等的に 0 となるような条件 (弱め合いの条件) を, 整数値 m を用いて表せ.



【メモ】

干渉条件は、次の通り位相差で議論できるようにしておく (m は整数)。

$$(\text{位相差}) = \frac{2\pi}{\lambda}(\text{経路差}) + (\text{初期位相差}) + (\text{反射}) = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強め合い}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱め合い}). \end{cases}$$

なお、位相のずれがあれば左辺に π を足すか引くかしておけばよい。

【解答】

I (1) 図より,

$$y_A = 2A, \quad y_B = -2A, \quad y_C = 0.$$

(2) 各点 A, B, C での位相差は,

$$\begin{aligned} \Delta\theta_A &= \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ 2\lambda - \left(3\lambda + \frac{1}{2}\lambda \right) \right\} - \pi = -4\pi = 2\pi \cdot (-2), \\ \Delta\theta_B &= \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \left(4\lambda + \frac{1}{2}\lambda \right) - 2\lambda \right\} - \pi = 4\pi = 2\pi \cdot 2, \\ \Delta\theta_C &= \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{5}{2}\lambda - \frac{5}{2}\lambda \right) - \pi = -\pi = (2 \cdot 0 - 1)\pi. \end{aligned}$$

よって、A は強め合い、B は強め合い、C は弱め合いの条件を満たしている。以上から^{*11},

$$A_A = A_B = 2A, \quad A_C = 0.$$

(3) 波源が周期 T で振動する間に波面は λ だけ伝播するので^{*12},

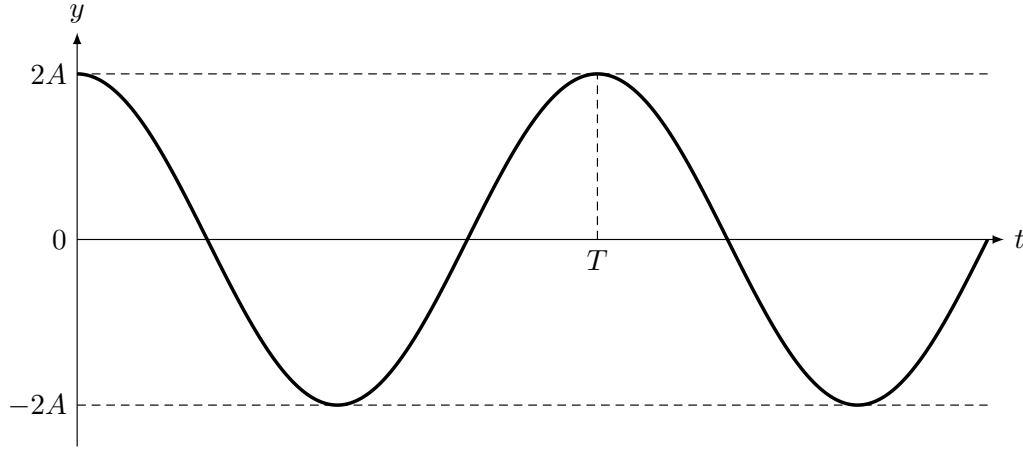
$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

(4) 図より/(2)より、 S_1 と S_2 の中点は節となる。節と節、腹と腹の間隔はそれぞれ $\frac{\lambda}{2}$ なので、
節は 5 個、腹は 6 個 となる。

II (1) 時刻 $t = 0$ で変位 $2A$ であり、振幅 $2A$ であることから以下ようになる。

^{*11} このような計算をしなくとも、「(1) より」でもいいです。

^{*12} 「波の基本式より」でもいいです。



(2) 図より, 振動は生じない^{*13}.

III (1) S_1 から距離 r_1 の位置 P まで波が伝わるのに要する時間 Δt_1 は $\Delta t_1 = \frac{r_1}{v} = \frac{r_1}{\lambda} T$ である.
よって,

$$y_1(r_1, t) = y_1(0, t - \Delta t_1) = A \sin \left\{ \frac{2\pi}{T} (t - \Delta t_1) \right\} = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1 \right).$$

(2) III(1) 同様に $r_1 \rightarrow r_2$ とすれば,

$$y_2(r_2, t) = y_2(0, t - \Delta t_2) = -A \sin \left\{ \frac{2\pi}{T} (t - \Delta t_2) \right\} = -A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2 \right).$$

(3) III(1), (2) より,

$$\begin{aligned} y(x, y, t) &= y_1(r_1, t) + y_2(r_2, t) \\ &= A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2 \right) - A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1 \right) \\ &= 2A \sin \left\{ \frac{\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \right\} \cos \left\{ \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{\lambda} (r_1 + r_2) \right\}. \end{aligned}$$

^{*13} III で与えられた関数形を用いると, 時刻 t , 位置 $x > a = \frac{3}{2}\lambda$ で観測される波源 S_1 からの波の変位 $y_1(x, t)$ は,

$$y_1(x, t) = A \sin \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x - a}{v} \right) \right\} = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3}{2} \pi \right) = -A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right)$$

となる. ここで, $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$ を用いている. 同様にして, 波源 S_2 からの波の変位 y_2 は,

$$y_2(x, t) = -A \sin \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x + a}{v} \right) \right\} = -A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3}{2} \pi \right) = +A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right).$$

よって, $|x| > a$ の領域で観測される合成波の変位は,

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 0.$$

ここで、 $2A \left| \sin \left\{ \frac{\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \right\} \right|$ が位置 (x, y) で観測される合成波の振幅を表す因子であり、
 $\cos \left\{ \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 + r_2) \right\}$ が $-1 \sim +1$ の振動を表す因子である。

- (4) 合成波の式において振幅因子の位相が π の整数倍となるような位置では、振幅因子は恒等的に 0 となり、弱め合いが観測される。よって*14,

$$\frac{\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = m\pi, \quad \therefore \underline{\underline{r_2 - r_1 = m\lambda}}.$$

*14 教科書ではこの結果のように経路差が波長の○倍のように説明しているが、受験まで想定すれば位相差で議論できるようになった方がよい。

§6.2 固有振動

第2章では、弦、および気柱の固有振動を扱う。物体を揺らすとき、大きな揺れ（定常波）が生じるような振動数が存在し、この現象を固有振動、このときの振動数を固有振動数と呼ぶ。固有振動の問題は、図を描き、状況から弦長/管長と波長との対応関係を立式すればよい。また、うなりもこのセクションに入れているが、うなりの振動数/周期の公式の導出については授業内かどこかの補講内で扱う。

■簡単なまとめ

- 固有振動の分類：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{弦} & \rightarrow \text{固定端} \cdot \text{固定端} (\text{節} \cdot \text{節}) \\ \text{開管} & \rightarrow \text{自由端} \cdot \text{自由端} (\text{腹} \cdot \text{腹}) \\ \text{閉管} & \rightarrow \text{自由端} \cdot \text{固定端} (\text{腹} \cdot \text{節}) \end{array} \right.$$

境界が自由端のものは、各境界ごとに開口端補正を考慮する。問題は「(系の長さ) = (波の長さ)」として波長を求め、速さの公式と組み合わせるだけである。

- 弦を伝わる波の速さ V は、弦の線密度（単位長さ当たりの質量） ρ 、弦にかかる張力 S を用いて、

$$V = \sqrt{\frac{S}{\rho}}.$$

- 音速 V は、日常的な温度 t （セ氏度）の範囲で以下の式で与えられる（音速に関しても弦を伝わる波の速さの公式とるいじしたものを導出できるが、教科書範囲外であり、以下の式がその近似式である）。

$$V = 331.5 + 0.6t.$$

- 振動数の近い波同士（ f_1 , f_2 とする）を重ね合わせるとうなりが生じる。うなりの振動数 f_b ：

$$f_b = |f_1 - f_2|.$$

うなりの周期は $\frac{1}{f_b}$ で与えられる。

1. 弦の固有振動①

長さ L の弦の固有振動について考える.

- (1) 基本振動における波長 λ_1 を求めよ.
- (2) 2 倍振動における波長 λ_2 を求めよ.
- (3) n 倍振動における λ_n を求めよ.

【解答】

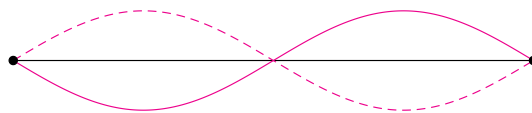
- (1) 基本振動は下図のようになる. 図より,

$$\frac{\lambda_1}{2} = L, \quad \therefore \lambda_1 = \underline{\underline{2L}}.$$



- (2) 2 倍振動は下図のようになる. 図より,

$$\frac{\lambda_2}{2} \cdot 2 = L, \quad \therefore \lambda_2 = \underline{\underline{L}}.$$



- (3) n 倍振動では, L の間に $\frac{\lambda_n}{2}$ が n 個含まれる. よって,

$$\frac{\lambda_n}{2} \cdot n = L, \quad \therefore \lambda_n = \underline{\underline{\frac{2L}{n}}}.$$

2. 弦の固有振動②

長さ L ，線密度 ρ で両端が固定された弦 A があり，大きさ S_0 の張力で張られている．

- (1) 弦 A の基本振動数 f_0 を求めよ．
- (2) 中央部に軽く指を触れ，中央部が振動しない状態で弦 A を弾く．このとき生じる音波の振動数のうち，最小のものを f_0 を用いて表せ．
- (3) 長さ L で両端が固定された弦 B が大きさ S_0 の張力で張られている．弦 B の基本振動数が $k f_0$ となるときの，弦 B の線密度 ρ_B を求めよ．

【解答】

- (1) 基本振動の波長は，

$$\frac{\lambda}{2} = L, \quad \therefore \lambda = 2L.$$

よって，波の基本式，および弦を伝わる波の速さの公式より，

$$\begin{cases} v = f\lambda, \\ v = \sqrt{\frac{S_0}{\rho}} \end{cases} \quad \therefore f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{S_0}{\rho}}.$$

- (2) 中央が節となる定常波を考えればよい．このとき，振動数が最小な固有振動は2倍振動であり，その波長は，

$$\frac{\lambda^*}{2} = L, \quad \therefore \lambda^* = L.$$

よって，

$$\begin{cases} v = f\lambda^*, \\ v = \sqrt{\frac{S_0}{\rho}} \end{cases} \quad \therefore f = \frac{v}{\lambda^*} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{S_0}{\rho}} = 2f_0.$$

- (3) 弦 B について，基本振動数の波長は (1) 同様にすれば $\lambda_B = 2L$ である．波の基本式，および弦を伝わる波の速さの公式より，

$$\begin{cases} v_B = f_B \lambda_B, \\ v_B = \sqrt{\frac{S_0}{\rho_B}} \end{cases} \quad \therefore f_B = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{S_0}{\rho_B}} = \frac{k}{2L} \sqrt{\frac{S_0}{\rho}}, \quad \therefore \rho_B = \frac{1}{k^2} \rho.$$

3. 気柱の固有振動①

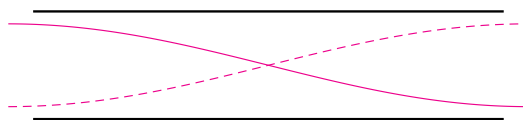
長さ L の開管の固有振動について考える．開口端補正を ΔL とする．

- (1) 基本振動における波長 λ_1 を求めよ．
- (2) 2 回目に共鳴したときの音波の波長 λ_2 を求めよ．
- (3) n 回目に共鳴したときの音波の波長 λ_n を求めよ．

【解答】

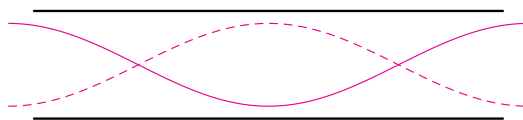
- (1) 基本振動は下図のようになる．図より，

$$\frac{\lambda_1}{2} \cdot 1 = L + 2\Delta L, \quad \therefore \lambda_1 = \underline{\underline{2(L + 2\Delta L)}}.$$



- (2) 2 回目の共鳴時の振動は下図のようになる．図より，

$$\frac{\lambda_2}{2} \cdot 2 = L + 2\Delta L, \quad \therefore \lambda_2 = \underline{\underline{L + 2\Delta L}}.$$



- (3) n 回目の共鳴時， $L + \Delta L$ の間には $\frac{\lambda_n}{2}$ が n 個含まれる．よって，

$$\frac{\lambda_n}{2} \cdot n = L + 2\Delta L, \quad \therefore \lambda_n = \underline{\underline{\frac{2}{n}(L + 2\Delta L)}}.$$

4. 気柱の固有振動②

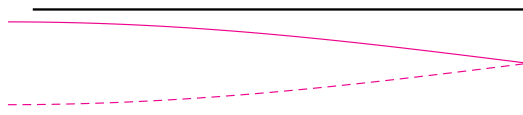
長さ L の閉管の固有振動について考える．開口端補正を ΔL とする．

- (1) 基本振動における波長 λ_1 を求めよ．
- (2) 2 回目に共鳴したときの音波の波長 λ_2 を求めよ．
- (3) n 回目に共鳴したときの音波の波長 λ_n を求めよ．

【解答】

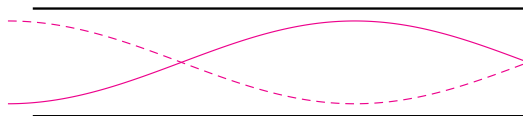
- (1) 基本振動は下図のようになる．図より，

$$\frac{\lambda_1}{4} = L + \Delta L, \quad \therefore \lambda_1 = \underbrace{4(L + \Delta L)}.$$



- (2) 2 回目の共鳴時の振動は下図のようになる．図より，

$$\frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_2}{2} = L + \Delta L, \quad \therefore \lambda_2 = \underbrace{\frac{4}{3}(L + \Delta L)}.$$



- (3) n 回目の共鳴時， $L + \Delta L$ の間には $\frac{\lambda_n}{4}$ が 1 個と， $\frac{\lambda_n}{2}$ が $n - 1$ 個含まれる．よって，

$$\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n}{2}(n - 1) = L + \Delta L, \quad \therefore \lambda_n = \underbrace{\frac{4}{2n - 1}(L + \Delta L)}.$$

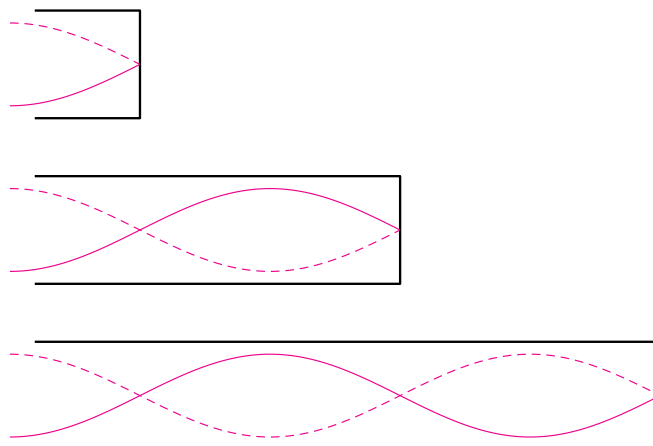
5. 気柱の固有振動③

振動数 f の音源の近くに長さを変えられることができる直線的な開管，および閉管がある．管の長さが L_1 ， L_2 ， L_3 ， $\dots$ のとき閉管は共鳴し，管の長さが ℓ_1 ， ℓ_2 ， ℓ_3 ， $\dots$ のとき開管は共鳴した．音速を V ，開口端補正を ΔL とする．

- (1) L_1 ， L_2 ， L_3 をそれぞれ求めよ．
- (2) ℓ_1 ， ℓ_2 ， ℓ_3 をそれぞれ求めよ．

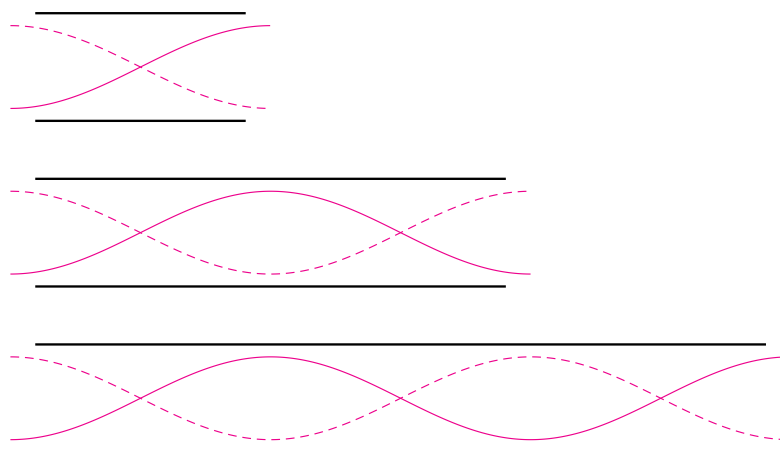
【解答】

(1) 各振動の様子は下図のようになる。

図より，管の長さ L と波長 λ を対応付け波長を求め，波の基本式を利用して，

$$L_1 = \frac{V}{4f} - \Delta L, \quad L_2 = \frac{3V}{4f} - \Delta L, \quad L_3 = \frac{5V}{4f} - \Delta L.$$

(2) 各振動の様子は下図のようになる。

図より，管の長さ L と波長 λ を対応付け波長を求め，波の基本式を利用して，

$$\ell_1 = \frac{V}{2f} - 2\Delta L, \quad \ell_2 = \frac{V}{f} - 2\Delta L, \quad \ell_3 = \frac{3V}{2f} - 2\Delta L.$$

6. 気柱の固有振動の例題

振動数 f のおんさを利用し、伸縮自在の閉管^{*15}によって共鳴実験を行った。管を十分短い長さから徐々に伸ばしていくと、長さ L_1 で1回目の共鳴が、長さ L_2 のときに2回目の共鳴が生じた。

- (1) 音の波長 λ 、および開口端補正 ΔL を求めよ。
- (2) 音速 V を求めよ。
- (3) $f = 500 \text{ Hz}$, $L_1 = 16.5 \text{ cm}$, $L_2 = 50.5 \text{ cm}$ のとき、気体の温度 t を有効数字2桁まで求めよ。
ただし、セ氏温度 t の下での気中の音速は $V = 331.5 + 0.6t$ と近似できることを利用してよい。

【解答】

- (1) 系の長さと波長を対応付けて、

$$\begin{cases} L_1 + \Delta L = \frac{1}{4}\lambda, \\ L_2 + \Delta L = \frac{3}{4}\lambda \end{cases} \quad \therefore \lambda = \underbrace{2(L_2 - L_1)}, \quad \Delta L = \underbrace{\frac{L_2 - 3L_1}{2}}.$$

- (2) 波の基本式より、

$$V = \underbrace{2f(L_2 - L_1)}.$$

- (3) 与えられた数値を用いれば $\lambda = 0.680 \text{ m}$ となり、 $V = 340 \text{ m/s}$ となる。よって、

$$340 = 331.5 + 0.6t \quad \therefore t = \frac{85}{6} \approx \underline{14^\circ\text{C}}.$$

^{*15} 伸縮自在の愛ではありません。

7. うなり

振動数 440 Hz のおんさ 1 と振動数 f のおんさ 2 を同時に鳴らしたところ、毎秒 2 回のうなりが聞こえた。おんさ 2 の方がおんさ 1 よりも高い音を出すとき、 f を求めよ。

【解答】

$f > 440\text{ Hz}$ ゆえ、うなりの公式より

$$2 = |f - 440| = f - 440, \quad \therefore f = \underline{\underline{442\text{ Hz}}}.$$

§6.3 ドップラー効果

第 3 章では、音波のドップラー効果を扱う。ドップラー効果は、大きく分けて、公式を導出する問題と、公式を使うだけの問題に分けられる。公式の標準的な導出方法は授業で丁寧に扱うことにし、この冊子では公式を使うだけの問題、少し珍しいけどたまに聞かれる公式の導出を中心に扱う。以降の問題では、音速は一定で、特に言及していない限り風は吹いていないものとする。

■簡単なまとめ

- ドップラー効果の公式：

$$f = \frac{\text{観測者の聞く音の音速}}{\text{観測者の聞く音の波長}} = \frac{V \pm v_{\text{観測者}}}{\frac{V \pm v_{\text{音源}}}{f_0}} = \frac{V \pm v_{\text{観測者}}}{V \pm v_{\text{音源}}} f_0 \quad (f_0: \text{音源の振動数})$$

1. 音源だけが動く

I 静止した観測者に速さ u で音源（振動数 f_0 ）が近づく．音速を V とする．

- (1) 観測者が聞く音の波長 λ を求めよ．
- (2) 波の基本式より，観測者が聞く音の振動数 f を求めよ．

II 静止した観測者に速さ u で音源（振動数 f_0 ）が遠ざかる．音速を V とする．

- (1) 観測者が聞く音の波長 λ を求めよ．
- (2) 波の基本式より，観測者が聞く音の振動数 f を求めよ．

【解答】

I (1) $(V - u)t$ の区間に ft 個の波があるので^{*16}，

$$\lambda = \frac{V - u}{\underbrace{f_0}}.$$

(2) 波の基本式より，

$$f = \frac{V}{\underbrace{V - u}} f_0.$$

II (1) $(V + u)t$ の区間に ft 個の波があるので，

$$\lambda = \frac{V + u}{\underbrace{f_0}}.$$

(2) 波の基本式より，

$$f = \frac{V}{\underbrace{V + u}} f_0.$$

^{*16} ここでは丁寧に計算しているが， f の公式を覚えて逆算に求めても良い．

2. 観測者だけが動く

I 静止した音源（振動数 f_0 ）に速さ v で観測者が近づく．音速を V とする．

- (1) 観測者が聞く音の波長 λ を求めよ．
- (2) 観測者が聞く音の振動数 f を求めよ．

II 静止した音源（振動数 f_0 ）に速さ v で観測者が遠ざかる．音速を $V (> v)$ とする．

- (1) 観測者が聞く音の波長 λ を求めよ．
- (2) 観測者が聞く音の振動数 f を求めよ．

【解答】

I (1) 音源は静止しているので、

$$\lambda = \frac{V}{\underbrace{f_0}}.$$

(2) t 秒間に $\frac{(V+v)t}{\lambda}$ 個の波を聞くので、

$$f = \frac{(V+v)t/\lambda}{t} = \frac{V+v}{\underbrace{V}} f_0.$$

II (1) 音源は静止しているので、

$$\lambda = \frac{V}{\underbrace{f_0}}.$$

(2) t 秒間に $\frac{(V-v)t}{\lambda}$ 個の波を聞くので、

$$f = \frac{(V-v)t/\lambda}{t} = \frac{V-v}{\underbrace{V}} f_0.$$

3. どちらも動く

- (1) 音源（振動数 f_0 ）は速さ v で観測者に近づく向きに動き、音源と同じ方向に速さ u で観測者が動く。音速を V とする。観測者が聞く音の波長 λ 、観測者が聞く音の振動数 f をそれぞれ求めよ。
- (2) 音源（振動数 f_0 ）は速さ v で、観測者は速さ u で互いに近づき合う向きに動く。音速を $V (> v)$ とする。観測者が聞く音の波長 λ 、観測者が聞く音の振動数 f をそれぞれ求めよ。

【解答】

- (1) 公式より、

$$f = \frac{V - u}{V - v} f_0, \quad \lambda = \frac{V - v}{f_0}.$$

- (2) 公式より、

$$f = \frac{V + u}{V - v} f_0, \quad \lambda = \frac{V - v}{f_0}.$$

4. 反射あり

I 音源（振動数 f ），観測者 A，反射板の順に並んでいる．静止した音源，観測者に向かい速さ u で反射板が近づく．反射板には反射板と共に動く観測者 B いるものとし，音速を c とする．

- (1) 観測者 B が聞く音の波長 λ_1 ，観測者 B が聞く音の振動数 f_1 をそれぞれ求めよ．
- (2) 観測者 A が聞く反射板によって反射された音の波長 λ_2 ，観測者 A が聞く反射板によって反射された音の振動数 f_2 をそれぞれ求めよ．
- (3) 観測者 A が聞く音波はうなりとなって聞こえた．うなりの振動数 f_b を求めよ．

II 音源（振動数 f ），観測者 A，反射板の順に並んでいる．静止した音源，観測者から速さ u で反射板が遠ざかる．反射板には反射板と共に動く観測者 B いるものとし，音速を c とする．

- (1) 観測者 B が聞く音の波長 λ_3 ，観測者 B が聞く音の振動数 f_3 をそれぞれ求めよ．
- (2) 観測者 A が聞く反射板によって反射された音の波長 λ_4 ，観測者 A が聞く反射板によって反射された音の振動数 f_4 をそれぞれ求めよ．
- (3) 観測者 A が聞く音波はうなりとなって聞こえた．うなりの振動数 f_b を求めよ．

【解答】

I (1) 公式より,

$$f_1 = \frac{c+u}{\underbrace{c}} f, \quad \lambda_1 = \frac{c}{\underbrace{f}}.$$

(2) 公式より,

$$f_2 = \frac{c}{c-u} f_1 = \frac{c+u}{\underbrace{c-u}} f, \quad \lambda_2 = \frac{c-u}{f_1} = \frac{c-u}{\underbrace{c+u}} \frac{c}{\underbrace{f}}.$$

(3) 公式より,

$$f_b = |f_2 - f| = f_2 - f = \frac{2u}{\underbrace{c-u}} f.$$

II (1) 公式より,

$$f_3 = \frac{c-u}{\underbrace{c}} f, \quad \lambda_3 = \frac{c}{\underbrace{f}}.$$

(2) 公式より,

$$f_4 = \frac{c}{c+u} f_3 = \frac{c-u}{\underbrace{c+u}} f, \quad \lambda_4 = \frac{c+u}{f_3} = \frac{c+u}{\underbrace{c-u}} \frac{c}{\underbrace{f}}.$$

(3) 公式より,

$$f_b = |f_4 - f| = f - f_4 = \frac{2u}{\underbrace{c+u}} f.$$

5. 風が吹く場合①

I 音源（振動数 f ）は速さ v で観測者から遠ざかる向きに動き、音源と同じ方向に速さ u で観測者が動く。このとき、観測者の動く向きと同じ方向に風速 w の風が吹いている。音速を V とする。観測者が聞く音の波長 λ^* 、観測者が聞く音の振動数 f^* をそれぞれ求めよ。

II 音源（振動数 f ）、観測者 A、壁の順に並んでいる。音源は静止しており、観測者 A は音源から遠ざかる向きに速さ u で動き、壁は音源・観測者 A に向かい速さ v で近づく。壁には壁と共に動く観測者 B いるものとし、観測者 A の動く向きと逆方向に風速 w の風が吹いている。音速を V とする。

- (1) 観測者 A が音源から直接聞く音の波長 λ_1 、振動数 f_1 をそれぞれ求めよ。
- (2) 観測者 B が聞く音の波長 λ_2 、振動数 f_2 をそれぞれ求めよ。
- (3) 観測者 A が聞く壁によって反射された音の波長 λ_3 、振動数 f_3 をそれぞれ求めよ。

【解答】

I 公式より $V \rightarrow V - w$ として、

$$f^* = \frac{V - w + u}{V - w + v} f, \quad \lambda = \frac{V - w + v}{f}.$$

II (1) 公式より $V \rightarrow V - w$ として、

$$f_1 = \frac{V - w - u}{V - w} f, \quad \lambda_1 = \frac{V - w}{f}.$$

(2) 公式より $V \rightarrow V - w$ として、

$$f_2 = \frac{V - w + v}{V - w} f, \quad \lambda_2 = \frac{V - w}{f}.$$

(3) 公式より $V \rightarrow V + w$ として、

$$f_3 = \frac{V + w + u}{V + w - v} f_2 = \frac{(V + w + u)(V - w + v)}{(V + w - v)(V - w)} f,$$

$$\lambda_3 = \frac{V + w - v}{f_2} = \frac{(V - w)(V + w - v)}{(V - w + v)f}.$$

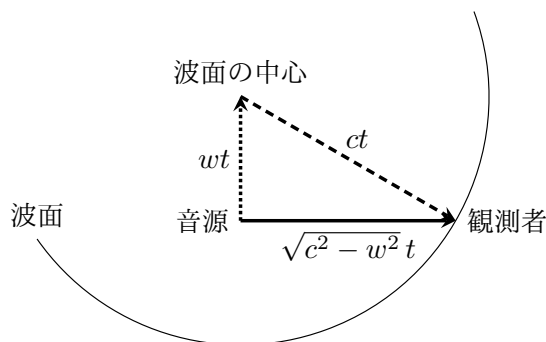
6. 風が吹く場合②

音源（振動数 f ）は速さ v で観測者に近づく向きに動き、音源と逆方向に速さ u で観測者が動く。このとき、鉛直上向きに風速 w の風が吹いている。音速を c とする。

観測者が聞く音の波長 λ 、観測者が聞く音の振動数 f をそれぞれ求めよ。

【解答】

時刻 $t = 0$ に生じた音を、時刻 t に観測者が聞く様子は図のようである^{*17}。



よって、音源から観測者の届く音の速さ c^* は、

$$c^* = \frac{\sqrt{c^2 - w^2}t}{t} = \sqrt{c^2 - w^2}.$$

以上から、公式より、

$$f = \frac{\sqrt{c^2 - w^2} + u}{\sqrt{c^2 - w^2} - v} f, \quad \lambda = \frac{\sqrt{c^2 - w^2} - v}{f}.$$

^{*17} 簡単のため、音源と観測者の運動は図示していない。

7. 斜め方向（公式処理）

水平面内に xy 平面とその原点 O を定める． x 軸に沿って x 正方向に音源（振動数 f ）を速さ v で運動しており， y 軸上の点 P にいる観測者（静止）が音源から発された音を観測している．時刻 t における音源の位置を S としたとき， x 軸正方向から線分 PS までの角度を θ と定める．すなわち， $0 \leq \theta \leq \pi$ である．また，音速を c とする．

I 音源が S で発した音波を観測者が観測するときの振動数 λ を求めよ．

II 以下のそれぞれの場合について，点 P で観測される振動数 f' を求めよ．

- (1) 音源が x 軸負方向の十分遠方にあるときに発された音を観測した場合の振動数．
- (2) 音源が x 軸正方向の十分遠方にあるときに発された音を観測した場合の振動数．
- (3) 音源が原点を通過した瞬間に発された音を観測した場合の振動数．
- (4) 音源が原点を通過する瞬間に聞く音の振動数．

【解答】

I 公式より,

$$\lambda = \frac{c - v \cos \theta}{f}, \quad f' = \frac{c}{c - v \cos \theta} f.$$

II (1) 公式より, $\theta = 0$ として,

$$f' = \frac{c}{c - v} f.$$

(2) 公式より, $\theta = \pi$ として,

$$f' = \frac{c}{c + v} f.$$

(3) 公式より, $\theta = \frac{\pi}{2}$ として,

$$f' = f.$$

(4) 音を発した時刻を $t = 0$ とし, その瞬間の音源の位置を S, 原点を通過する時刻を t とすると, $\overline{SO} = vt$, $\overline{SP} = ct$ より, $\cos \theta = \frac{v}{c}$ である. よって,

$$f' = \frac{c^2}{c^2 - v^2} f.$$

8. 斜め方向その③（公式処理，難しいので解く/解かないは各自で判断）

図のように，点 O から距離 d の位置に音源 S （振動数 f ）の音源があり，点 O から距離 $r(>d)$ を保ちながら単位時間当たりの回転角 ω で反時計回りに円運動をしている観測者 P が， S からの音を観測している． P の速さは，円の接線方向に大きさ $r\omega$ で与えられる．時刻 t において $\angle POS = \omega t$ ($0 \leq \omega t \leq 2\pi$) とし， $t=0$ において P には S からの音は届いているものとする．音速を c とする．

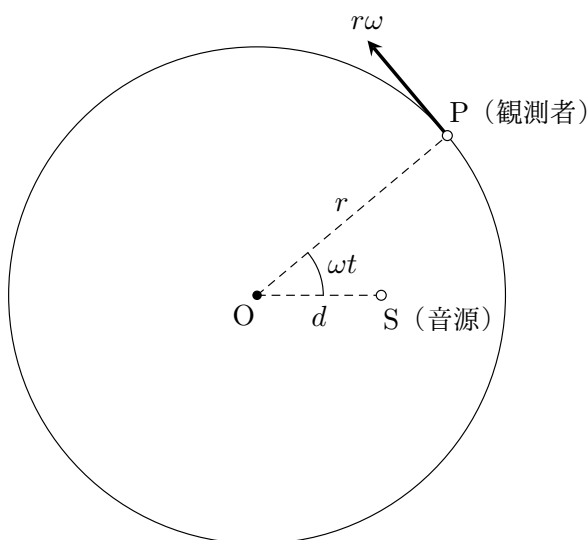
I $t > 0$ の時刻 t において，再び f の振動数を観測する最初の時刻 t_1 を求めよ．

II 時刻 t において， P で観測される音の振動数 $f_P(t)$ を，以下の手順に従って求めよ．

- (1) $\overline{PS}$ を求めよ．
- (2) $\angle OPS = \theta$ とする． $\sin \theta$ を求めよ．
- (3) $f_P(t)$ を求めよ．

III $\cos(\omega t) = \frac{d}{r}$ を満たす時刻 t_m ， $t_M(>t_m)$ において， $f_P(t)$ は最小値 $\min\{f_P\} = f_P(t_m)$ ，および最大値 $\max\{f_P\} = f_P(t_M)$ を取る^{*18}． $f_P(t_m)$ ， $f_P(t_M)$ をそれぞれ求めよ．

IV $r = 2d$ のとき， $t_M - t_m$ を求めよ．



^{*18} $\cos(\omega t) = \frac{d}{r}$ で最大・最小を取ることは関数 $g(\theta) = \frac{rd \sin \theta}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}}$ を微分して，その増減を確認すればよい．

【メモ】

図形の考察は、閃きではなくパターン処理できる．詳しくは幾何光学の分野で紹介する．

【解答】

I 半周した位置ゆえ、

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega}.$$

II (1) 余弦定理より、

$$\overline{PS} = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\omega t)}.$$

(2) 正弦定理より、

$$\sin \theta = \frac{d \sin(\omega t)}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\omega t)}}.$$

(3) 観測者が音源から遠ざかる速度成分は $r\omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ である．よって、公式より^{*19}、

$$f_P(t) = \frac{c - r\omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{c} f = \frac{c - \frac{rd\omega \sin(\omega t)}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\omega t)}}}{c}.$$

III 上記の結果より、 $\sin(\omega t_m) = \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r}$ 、 $\sin(\omega t_M) = -\frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r}$ を代入して、

$$f_P(t_m) = \frac{c - d\omega}{c} f, \quad f_P(t_M) = \frac{c + d\omega}{c} f.$$

IV 与えられた数値より、

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}, \quad \therefore t = \frac{\pi}{3\omega}, \frac{5\pi}{3\omega}.$$

よって、

$$t_M - t_m = \frac{5\pi}{3\omega} - \frac{\pi}{3\omega} = \frac{4\pi}{3\omega}.$$

^{*19} $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$.

9. ドップラー効果の公式の導出いろいろ① (時系列)

水平右向きに x 軸を定める. 時刻 $t = 0$ に音源 P (振動数 f_0) は位置 $x = 0$ にあり, 反射板 Q は位置 $x = \ell$ にある. P は速度 v , Q は速度 u で運動している. 音速を V とし, P および Q の速度の大きさは音速よりも小さいものとする. $t = 0$ に音源は音を発し始めた.

I Q が聞く音の振動数について考える.

- (1) Q が音を聞き始める時刻 t_1 を求めよ.
- (2) Q が, 時刻 t に P が発した音を聞く時刻 t_2 を求めよ.
- (3) Q が聞く音の振動数 f を求めよ.

II P が聞く Q による反射音の振動数について考える. Q で音を反射し始めた時刻を改めて $T = 0$ と定義し, このときの PQ 間の距離を L とする.

- (1) P が反射音を聞き始める時刻 T_1 を求めよ.
- (2) P が, 時刻 T に Q から反射された音を聞く時刻 T_2 を求めよ.
- (3) P が聞く反射音の振動数 F を求めよ.

【解答】

I (1) 図1より, 音速 V で距離 $L + ut_1$ だけ進む時間を求めて,

$$Vt_1 = \ell + ut_1, \quad \therefore t_1 = \frac{\ell}{\underline{V - u}}.$$

(2) 図1より,

$$vt + V(t_2 - t) = \ell + ut_2, \quad \therefore t_2 = \frac{\ell + (V - v)t}{\underline{V - u}}.$$

(3) $t_2 - t_1$ の間に $f_0 t$ 個の波形を受けるので,

$$f(t_2 - t_1) = f_0 t, \quad \therefore f = \frac{V - u}{\underline{V - v}} f_0.$$

II (1) 図2より, 音速 V で距離 $L - vt_1$ だけ進む時間を求めて,

$$VT_1 = L - vt_1, \quad \therefore t_1 = \frac{L}{\underline{V + v}}.$$

(2) 図2より,

$$vT_2 + V(T_2 - T) = L + uT, \quad \therefore T_2 = \frac{L + (V + u)T}{\underline{V + v}}.$$

(3) $T_2 - T_1$ の間に fT 個の波形を受けるので,

$$F(T_2 - T_1) = fT, \quad \therefore F = \frac{V + v}{V + u} f = \frac{V + v}{V + u} \frac{V - u}{V - v} f_0.$$

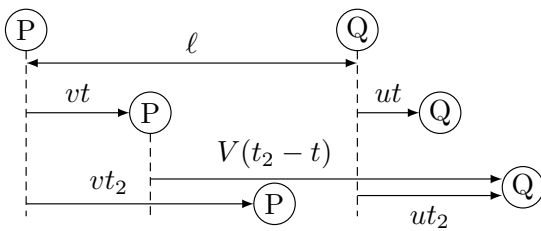


図1

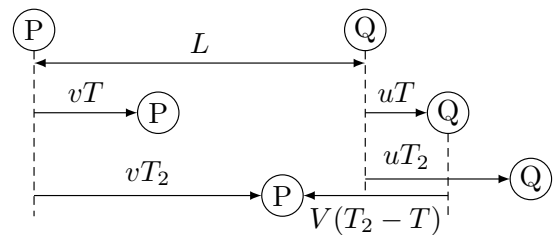
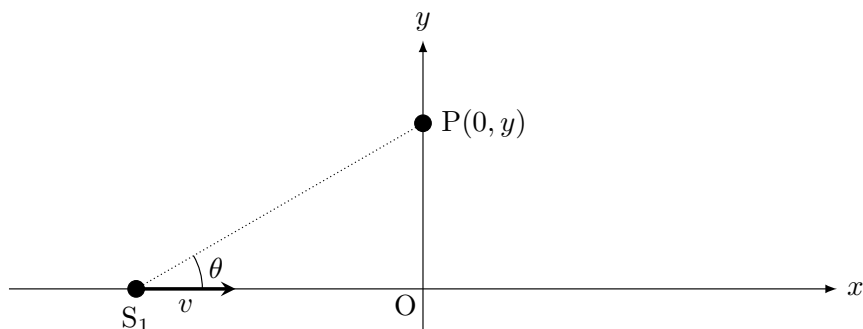


図2

10. 斜め方向の公式導出（時系列）

水平面内に xy 平面とその原点 O を定める． x 軸に沿って x 正方向に音源（振動数 f ）を速さ v で運動しており， y 軸上の点 $P(0, y)$ にいる観測者（静止）が音源から発された音を観測している．時刻 $t = 0$ における音源の位置を S_1 としたとき， x 軸正方向から線分 PS_1 までの角度を θ と定める．音源が S_1 を通過するとき，ごく短い時間 t だけ音源から音を発した．時刻 t における音源の位置を S_2 とし，音速を V とする．

- (1) 時刻 $t = 0$ に音源が S_1 で発した音波の波面が観測者の届く時刻 t_1 を求めよ．
- (2) t がごく短いことから， $\overline{S_1 S_2}$ が $\overline{S_1 P}$ に比べて十分小さく， $\overline{S_1 P}$ と $\overline{S_2 P}$ は平行とみなせる．
 $\overline{S_1 P} - \overline{S_2 P}$ を求めよ．
- (3) 音源が S_2 で発した音波の波面が観測者の届く時刻 t_2 を求めよ．
- (4) 音源が S_1 で発した音波が点 P で観測されるときの振動数 f' を求めよ．



【解答】

$$(1) \quad \overline{S_1P} = Vt_1, \quad \cos \theta = \frac{y}{\overline{S_1P}} \text{ より,}$$

$$t_1 = \frac{y}{\underbrace{V \cos \theta}}.$$

(2) S_2 から S_1P に下ろした垂線と S_1P との交点を H とすると,

$$\overline{S_1P} - \overline{S_2P} \doteq \overline{S_1P} - \overline{HP} = \overline{S_1H} = \underbrace{vt \cos \theta}.$$

(3) 状況を丁寧に整理して,

$$t_2 = t + \frac{\overline{S_2P}}{V} = t + \frac{\overline{S_1P} - vt \cos \theta}{V} = t \left(\underbrace{1 - \frac{v}{V} \cos \theta} \right) + \frac{y}{\underbrace{V \cos \theta}}.$$

(4) 観測者は $t_2 - t_1$ 間音を聞くので

$$f'(t_2 - t_1) = ft, \quad \therefore f' = \frac{t}{t_2 - t_1} f = \frac{V}{\underbrace{V - v \cos \theta}} f.$$

11. ドップラー効果の公式の導出いろいろ②（正弦波の式）

x 軸上の原点に音源 S があり、 S からは以下の関数形で表される音波が発されている．なお、 y は音波の変位、 A は振幅、 f は振動数を表し、以下では、時刻 $t = 0$ での観測者 P の位置を $x (> 0)$ 、音速を c とする．

$$y_S(t) = A \sin(2\pi f t)$$

I S 、および P がともに静止している場合を考える． P で観測される波の式を求めよ．

II S が速さ v で静止している P に近づく場合を考える．

(1) P が時刻 t に聞く音は、時刻 t_0 に $x_S = vt_0$ の位置で音源が発した音であるとする． t_0 を求めよ．

(2) P で観測される波の式は、以下のようになる．あ、い を求めよ．

$$y_P(x, t) = A \sin \left\{ 2\pi \text{ あ } \left(t - \frac{x}{\text{ い }} \right) \right\}$$

III P が速さ u で静止している S に近づく場合を考える． P で観測される波の式は、以下のようになる．う、え を求めよ．

$$y_P(x, t) = A \sin \left\{ 2\pi \text{ う } \left(t - \frac{x}{\text{ え }} \right) \right\}$$

【解答】

I 原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は $\frac{x}{v}$ である。よって、

$$\left(\begin{array}{l} \text{時刻 } t \text{ において} \\ \text{位置 } x \text{ で聞く音} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} x/c \text{ だけ過去に} \\ \text{音源から発された音} \end{array} \right)$$

より、

$$y_P(x, t) = y_S \left(t - \frac{x}{c} \right) = A \sin \left\{ 2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\}.$$

II (1) 状況を整理して、

$$x = c(t - t_0) + vt_0, \quad \therefore t_0 = \frac{c}{c-v} \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

(2) II(1) より、

$$\left(\begin{array}{l} \text{時刻 } t \text{ において} \\ \text{位置 } x \text{ で聞く音} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{時刻 } t_0 \text{ において} \\ \text{音源から発された音} \end{array} \right)$$

ゆえ、

$$y_P(x, t) = y_S(t_0) = A \sin \left\{ 2\pi \frac{c}{c-v} f \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\}.$$

よって、

$$\boxed{\text{あ}} = \frac{c}{c-v} f, \quad \boxed{\text{い}} = c.$$

III P が静止しているとき（すなわち $u = 0$ のとき）、結果はIのようになる。 $t = 0$ における P の位置を x としたとき、P が音源に向かい速さ u で運動することから、時刻 t における P の位置 x_P は、 $x_P = x - ut$ となる。時刻 t において P が聞く音は、

$$\left(\begin{array}{l} \text{時刻 } t \text{ において} \\ \text{位置 } x_P \text{ で聞く音} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} x_P/c \text{ だけ過去に} \\ \text{音源から発された音} \end{array} \right)$$

ゆえ*20、

$$y_P(x, t) = y_S \left(t - \frac{x - ut}{c} \right) = A \sin \left\{ 2\pi \frac{c+u}{c} f \left(t - \frac{x}{c+u} \right) \right\}.$$

よって、

$$\boxed{\text{う}} = \frac{c+u}{c} f, \quad \boxed{\text{え}} = c+u.$$

*20 文字通り式を表現すれば、左辺は $y_P(x_P, t)$ となるが、 x_P は x, t で決まる変数であることから、関数の引数は x, t のみで書ける。