

第 1 問（複数物体系の力学，衝突）

【メモ】

・衝突は以下 2 種の式を連立．条件が明示的でないものもあるが，日々の演習では，衝突時の条件は何かを必ず確認したい．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{（外力のない方向成分の）運動量保存則} \\ \text{全体の力学的エネルギー保存則} \end{array} \right.$$

・衝突は以下 2 種の式を連立．条件が明示的でないものもあるが，日々の演習では，衝突時の条件は何かを必ず確認したい．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{array} \right.$$

【解答】

問 1 運動量保存則・弾性衝突^{*1}より，

$$\left\{ \begin{array}{l} mv' + Mu = mv, \\ v' - u = -1(v - 0), \end{array} \right. \quad \therefore v = \frac{m - M}{M + m}v, \quad u = \frac{2m}{M + m}v.$$

問 2 系 S に x 方向の外力がはたらかないため，重心速度は一定に保たれる．重心速度は，重心の定義より，

$$V = \frac{Mu + M \cdot 0}{M + M} = \frac{m}{M + m}v.$$

問 3 はね返り係数の定義より，

$$v' - V = -e(v - 0), \quad \therefore e = \frac{M}{M + m}.$$

問 4 問 1 より，

$$\begin{aligned} -\Delta E &= \frac{1}{2}mv^2 - \left\{ \frac{1}{2}m \left(\frac{m - M}{M + m}v \right)^2 + M \left(\frac{2m}{M + m}v \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m}{(M + m)^2} v^2 \{ (M + m)^2 - (m - M)^2 - 2Mm \} \\ &= \left(\frac{m}{M + m} \right) Mv^2. \end{aligned}$$

^{*1} 1 次元の弾性衝突より，はね返り係数 1 と読む．

問 5 ばねの伸びが最大するとき，2 物体の速度は等しい^{*2}．系の運動量保存則，力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} Mw + Mw = M \frac{2m}{M+m} v, \\ \frac{1}{2} Mw^2 + \frac{1}{2} Mw^2 + \frac{1}{2} k(L - L_0)^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{2m}{M+m} v \right)^2, \end{cases}$$
$$\therefore L = \underbrace{L_0 + \frac{m}{M+m} v \sqrt{\frac{2M}{k}}}_{\text{}}.$$

^{*2} ばねの伸びは $(x_B - x_A) - L_0$ と表され，これが極大値を取るため，2 物体の速度は等しくなる．

第2問（荷電粒子の運動，仕事の計算）

【メモ】

- ・ y 方向は $y = vt$ を満たすように束縛されている。
- ・ 問4の仕事の計算は，エネルギー収支からでも求まるが定義通り計算するのが楽。

【解答】

問1 図より，

$$|\vec{v}| = \frac{v}{\cos \theta}.$$

ローレンツ力の x 成分 f_x ，および大きさ f は，

$$f_x = \underline{qvB}, \quad f = \sqrt{(qvB)^2 + (qv \tan \theta B)^2} = \frac{qvB}{\cos \theta}.$$

問2 運動方程式より^{*3}，

$$\begin{cases} ma_x = qvB, \\ m \cdot 0 = N - qv_x B, \end{cases} \quad \therefore a_x = \frac{qvB}{m}, \quad N = qv_x B.$$

加速度一定より $x = \frac{qvB}{2m}t^2$ と表せる．ここに $y = vt$ を代入して，

$$x = \frac{qvB}{2mv}y^2.$$

問3 問2より，

$$N = qv_x B = \frac{(qB)^2}{m}vt = \frac{(qB)^2}{m}y \quad (y \text{ 正方向}).$$

問4 仕事の定義より，

$$W = \int_0^{y_1} \frac{(qB)^2}{m}y dy = \frac{(qBy_1)^2}{2m}.$$

^{*3} y 方向の加速度は $y = vt$ より 0.

第3問（ボーアの原子モデル）

【解答】

問1 運動方程式（中心成分）は、

$$\underbrace{m \frac{v^2}{r}} = \underbrace{k_0 \frac{Ze^2}{r^2}}.$$

問2 運動方程式・量子条件より、

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{r} = k_0 \frac{Ze^2}{r^2}, \\ mvr = n \frac{h}{2\pi}, \end{cases}$$

$$\therefore \underbrace{r = \frac{h^2}{4\pi^2 m k_0 Ze^2} n^2}, \quad \underbrace{v = \frac{2\pi k_0 Ze^2}{h} n}.$$

問3 系の力学的エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + k_0 \frac{Ze(-e)}{r} = -k_0 \frac{Ze^2}{2r} = -\underbrace{\frac{2\pi^2 k_0^2 m Z^2 e^4}{h^2}} \frac{1}{n^2}.$$

問4 量子数 k の軌道から量子数 n の軌道へ遷移するとき、振動数条件より、

$$E_k - E_n = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

のエネルギーを持つ光子が放出される。これを整理すれば、

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

となり、ここに与えられた数値を代入して、

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\lambda R(1/n^2 - 1/k^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1.1 \times 10^7 / \text{m} \times 164 \times 10^{-9} \text{m} \times 5/36}} \doteq 2.$$

問5 (a) エネルギー等分配則より^{*4},

$$\frac{1}{2}M\overline{V^2} = \frac{3}{2}kT.$$

(b) 等方性より、

$$\overline{V_x^2} = \frac{1}{3}\overline{V^2}.$$

^{*4} 分子運動論の帰結の1つゆえ覚えなくてよい（ただしこの問題は解けなくなる）。分子運動論は主要な流れがなぞればそれでよい。

(c) 与式より,

$$\left(1 - \frac{\sqrt{V_x^2}}{c}\right) \lambda_0 \leq \lambda \leq \left(1 + \frac{\sqrt{V_x^2}}{c}\right) \lambda_0.$$

ここで, (a), (b) より,

$$\sqrt{V_x^2} = \sqrt{\frac{k}{M}} T$$

ゆえ

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{c} \underbrace{\sqrt{\frac{k}{M}} T}$$

問 6 与えられた数値を代入して,

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)^2 c^2 \frac{M}{k} \\ &= \left(\frac{1 \times 10^{-11} \text{ m}}{164 \times 10^{-9} \text{ m}}\right)^2 \times (3.0 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \times \frac{6.65 \times 10^{-27} \text{ kg}}{1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}} \\ &\doteq \underbrace{2 \times 10^5 \text{ K}}. \end{aligned}$$