

1 単振動の時間追跡

【メモ】

- ・問1は摩擦の条件, 問2~6はいずれも時間追跡. なお, 問5のみ等速度運動である.
- ・問2~6の単振動の設問は, いずれも特徴的な瞬間であるから素直に時間追跡しなくてもよい.
- ・単振動を行う物体の位置, および速度は以下の通り.

$$\begin{cases} x(t) = x_c + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t), \\ v(t) = \frac{dx}{dt}. \end{cases}$$

- ・解答は最短経路で解答に至るもので書いた. 【補足】に詳細な解説を記した.

【解答】

問1 静止摩擦力の大きさを R , 伸びを s_0 とする. つりあい, および滑る条件^{*1}より,

$$\begin{cases} 2m \cdot 0 = ks_0 - R, \\ R \leq \mu N \end{cases} \quad \therefore s_0 \geq \frac{2\mu mg}{k}.$$

問2 O を原点とし, ばねの自然長を ℓ とすると, 問1より台の位置は $\ell + s_0 = \ell + \frac{2\mu mg}{k}$ であり, 物体の位置は $\ell + \frac{2\mu mg}{k} - x$ と書ける. 物体の運動方程式は,

$$2ma = k \left(\ell + \frac{2\mu mg}{k} - x - \ell \right) \quad \therefore a = -\frac{k}{2m} \left(x - \frac{2\mu mg}{k} \right)$$

であり, 角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$, 振動中心 $x_c = \frac{2\mu mg}{k}$ である. 初期条件 $x(0) = 0$, $v(0) = 0$ であるから, 振幅は $\frac{2\mu mg}{k}$ である. 運動を始めてから折り返すまでゆえ, 単振動の半周期であるから, 求める時間は

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$$

であり, 折り返す位置は,

$$x = \frac{2\mu mg}{k} + \frac{2\mu mg}{k} = \frac{4\mu mg}{k}.$$

問3 物体間の垂直抗力の大きさを N とすると, 2物体の運動方程式より,

$$\begin{cases} ma = N - k \left(x - \frac{2\mu mg}{k} \right), \\ ma = -N \end{cases} \quad N = \frac{k}{2} \left(x - \frac{2\mu mg}{k} \right)$$

^{*1} $R < \mu N$ のとき静止摩擦力が存在し滑らないので, その対偶を考えて, 滑るとき $R \geq \mu N$ である.

と求まる．分離する瞬間ゆえ $N = 0$ を考えて，

$$\frac{k}{2} \left(x - \frac{2\mu mg}{k} \right) = 0 \quad \therefore x = \frac{2\mu mg}{k}$$

であるから，このときのばねの伸び s は，

$$s = \ell + \frac{2\mu mg}{k} - \frac{2\mu mg}{k} - \ell = 0.$$

また， $x = \frac{2\mu mg}{k}$ は振動中心ゆえ，考える瞬間は $\frac{3}{4}$ 周期の時点であるから，

$$t_2 = \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

問 4 振動中心を通過する瞬間ゆえ，その速さは振幅と角振動数の積に等しく，

$$|v| = \frac{2\mu mg}{k} \sqrt{\frac{k}{2m}} = \mu g \sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

問 5 分離後の A は水平方向の力を受けないため等速度で運動する．分離した瞬間を再度 $t = 0$ とすれば $x_A(0) = \frac{2\mu mg}{k}$ ， $v_A(0) = -\mu g \sqrt{\frac{2m}{k}}$ であるから，時刻 t における A の位置 x_A は，

$$x_A = \frac{2\mu mg}{k} - \mu g \sqrt{\frac{2m}{k}} t$$

と表せる．よって， $x_A = 0$ を考えて，

$$x_A = \frac{2\mu mg}{k} - \mu g \sqrt{\frac{2m}{k}} t = 0 \quad \therefore t = \sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

問 6 運動方程式は，

$$ma = -k \left(x - \frac{2\mu mg}{k} \right) \quad \therefore a = -\frac{k}{m} \left(x - \frac{2\mu mg}{k} \right)$$

であり，角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，振動中心 $x_c = \frac{2\mu mg}{k}$ である．よって，位置 x ，および速度 v は，

$$\begin{cases} x = \frac{2\mu mg}{k} + C \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + D \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \\ v = C \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - D \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \end{cases}$$

と表せる．初期条件 $x(0) = \frac{2\mu mg}{k}$ ， $v(0) = -\mu g \sqrt{\frac{2m}{k}}$ より，

$$\begin{cases} \frac{2\mu mg}{k} = \frac{2\mu mg}{k} + D, \\ -\mu g \sqrt{\frac{2m}{k}} = C \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad \therefore C = -\frac{\sqrt{2} \mu mg}{k}, \quad D = 0$$

と求まり，以下のようになる．

$$x = \frac{2\mu mg}{k} - \frac{\sqrt{2}\mu mg}{k} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

【補足】問 2，3，4 の時間追跡

物体が分裂する以前の運動方程式は，

$$2ma = k\left(\ell + \frac{2\mu mg}{k} - x - \ell\right) \quad \therefore a = -\frac{k}{2m}\left(x - \frac{2\mu mg}{k}\right).$$

このとき，初期条件 $x(0) = 0$ ， $v(0) = 0$ より，

$$\begin{cases} x = \frac{2\mu mg}{k} \left\{1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right)\right\}, \\ v = \frac{2\mu mg}{k} \sqrt{\frac{k}{2m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right) \end{cases}$$

を得る．

問 2 折り返しゆえ $v = 0$ を解いて，

$$\frac{2\mu mg}{k} \sqrt{\frac{k}{2m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right) = 0 \quad \therefore t = \pi \sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

このとき，

$$x = \frac{2\mu mg}{k} (1 - \cos \pi) = \frac{4\mu mg}{k}.$$

問 3 物体間の垂直抗力の大きさを N とすると，2 物体の運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = N - k\left(x - \frac{2\mu mg}{k}\right), \\ ma = -N \end{cases} \quad N = \frac{k}{2}\left(x - \frac{2\mu mg}{k}\right)$$

であるから， $x = \frac{2\mu mg}{k}$ のとき $N = 0$ となる． $x = \frac{2\mu mg}{k}$ を考えて，

$$x = \frac{2\mu mg}{k} \left\{1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t\right)\right\} = \frac{2\mu mg}{k} \quad \therefore t = \frac{3}{2}\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

問 4 $t = \frac{3}{2}\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$ を代入して，

$$|v| = \left| \frac{2\mu mg}{k} \sqrt{\frac{k}{2m}} \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \right| = \mu g \sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

2 天体の運動

【メモ】

・円軌道は等速円運動となるため、以下の等速円運動の定石に従う。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{運動方程式 (中心成分)} \\ \text{つりあい} \leftarrow \text{使わないことも} \end{array} \right.$$

・非円軌道の定石は以下の通り。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{面積速度保存則} \end{array} \right.$$

求める文字が1文字だけの場合力学的エネルギー保存則だけでよい。また、楕円軌道の周期はケプラー第3法則で求めるのが基本、面積速度保存則を用いても決定できる。なお、ケプラー第3法則を用いる際は「楕円軌道=円軌道」で用いる。

【解答】

問1 速さ V_L で等速円運動ゆえ、

$$m \frac{V_L^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2} \quad V_L = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

問2 無限遠での運動エネルギーを K_∞ とする。無限遠に到達しないためには K_∞ が存在しなければよいので $K_\infty < 0$ を考えればよい。力学的エネルギー保存則より、

$$K_\infty + 0 = \frac{1}{2} m V_0^2 + \left(-G \frac{Mm}{R} \right) < 0 \quad \therefore V_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R}} (= V_U).$$

問3 面積速度保存則より、

$$\frac{1}{2} R V_0 = \frac{1}{2} R' V_0' \quad \therefore R = \frac{V_0'}{V_0} R'.$$

問4 面積速度保存則、および力学的エネルギー保存則より、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} R V_0 = \frac{1}{2} R' V_0', \\ \frac{1}{2} m V_0^2 + \left(-G \frac{Mm}{R} \right) = \frac{1}{2} m V_0'^2 + \left(-G \frac{Mm}{R'} \right) \end{array} \right.$$

$$\therefore V_0' = \frac{2GM}{R V_0} - V_0, \quad R' = \frac{R V_0^2}{2GM - R V_0^2}.$$

問5 等速円運動ゆえ、

$$(m - m_1) \frac{V_L^2}{R} = G \frac{M(m - m_1)}{R^2} \quad V_L = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

問6 速さ V_1 で円周 $2\pi R$ 進む時間を求めて,

$$T = \frac{2\pi R}{V_1} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}}.$$

問7 運動量保存則, および条件 (相対速度) より,

$$\begin{cases} m_1 V + (m - m_1)V_1 = mV_0, \\ V - V_1 = +v \end{cases} \quad \therefore v = \frac{m}{m_1}(V_0 - V_1) = \frac{m}{m_1} \left(V_0 - \sqrt{\frac{GM}{R}} \right).$$

問8 無限遠での運動エネルギーを K_∞ とする. 無限遠に到達しないためには K_∞ が存在しなければよいので $K_\infty < 0$ を考えればよい. 力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{aligned} K_\infty + 0 &= \frac{1}{2}m_1 \left\{ \frac{m}{m_1}V_0 - \left(\frac{m}{m_1} - 1 \right) V_1 \right\}^2 + \left(-G \frac{Mm_1}{R} \right) < 0 \\ \therefore m_1 &< \underbrace{\left(\sqrt{2} + 1 \right) \left(V_0 \sqrt{\frac{R}{GM}} - 1 \right)}_{(= m_u)}. \end{aligned}$$

問9 題意より, 力学的エネルギー変化を計算して,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \left\{ \frac{1}{2}m_1 V^2 + \left(-G \frac{Mm_1}{R} \right) + \frac{1}{2}(m - m_1)V_1^2 + \left(-G \frac{M(m - m_1)}{R} \right) \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2}mV_0^2 + \left(-G \frac{Mm}{R} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2}m_1 \left\{ \frac{m}{m_1}V_0 - \left(\frac{m}{m_1} - 1 \right) V_1 \right\}^2 + \frac{1}{2}(m - m_1)V_1^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 \\ &= \frac{m}{2} \left(\frac{m}{m_1} - 1 \right) (V_0 - V_1)^2 \\ \therefore C &= \frac{m}{2} \left(\frac{m}{m_1} - 1 \right). \end{aligned}$$

3 A コンデンサの内部構造

【メモ】

・問 1 は電場の決定。大きさのある帯電体の作る電場はガウスの法則を利用する。電荷 Q が一様に帯電した面積 S 平板の作る電場 E はガウスの法則より、真空の誘電率を ϵ_0 として*2,

$$E \cdot 2S = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \therefore E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}.$$

これは、導出ができる状態にしておきながら覚えておきたい「公式」。

・問 2, 問 3, 問 5 は電荷の決定。電荷の決定は回路の状態決定に基づいて行えばよい。回路の状態決定は,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{キルヒホッフの法則 (第 2 法則)} \\ \text{電荷保存則 (キルヒホッフ第 1 法則を含む)} \\ \text{素子の性質} \end{array} \right.$$

によって一意に決まる。今回、金属板ゆえ導体内部電場 0*3を利用する (素子の性質)。

・平行平板コンデンサ (間隔 d) の内部電場は平行一様電場と見なせるため、コンデンサの電位差 $\Delta\phi$ と極板間電場 E の間には次の関係がある。

$$\Delta\phi = Ed.$$

ここにガウスの法則を合わせれば,

$$Q = \epsilon_0 \frac{S}{d} \Delta\phi.$$

となり、静電容量 $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ を得る*4。

・コンデンサの中身を見る問題は、電位の関係として $\Delta\phi = \frac{Q}{C}$ を使う問題、 $\Delta\phi = Ed$ を使う問題 (と両方を使い分ける問題) に分類される。今回後者。

【解答】

問 1 ガウスの法則より,

$$E_b \cdot 2S = \frac{Q_b}{\epsilon} = 4\pi k_0 Q_b \quad \therefore E_b = \frac{2\pi k_0 Q_b}{S}.$$

*2 ここでは、平板の端の影響を考えていない。

*3 電流の流れていない導体内部の電場は 0 となる。

*4 他の形状のコンデンサの容量を求める場合も、ガウスの法則より E と Q の関係、電位の関係 (キルヒホッフの法則) より $\Delta\phi$ と E の関係を得て、これらを組み合わせることで Q と $\Delta\phi$ の関係を作り、この比例係数から容量を読み取る流れとなる。

問2 装置は接地されていないため、全体の電荷は保存する。また、図の下向きの電場成分を正とする。導体内部の電場が0であること、および全体での電荷保存則から、

$$\begin{cases} \frac{2\pi k_0}{S}(Q_a - Q_b - Q_c - Q_b) = 0, \\ \frac{2\pi k_0}{S}(Q_a + Q_b + Q_c - Q_b) = 0, \\ Q_a + Q_b + Q_c + Q_b = 0 \end{cases} \quad \therefore Q_a = Q_d = 0, \quad Q_b = -Q_c.$$

よって、

$$\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{Q_d}{Q_b} = 0, \quad \frac{Q_c}{Q_b} = -1.$$

問3 キルヒホッフの法則より、

$$\begin{aligned} V - \frac{2\pi k_0}{S}(Q_a + Q_b - Q_c - Q_b)\ell &= 0 \\ V - \frac{4\pi k_0 \ell}{S}Q_b &= 0 \quad \therefore Q_b = \frac{SV}{4\pi k_0 \ell}. \end{aligned}$$

問4 公式より、

$$U = \frac{Q_b^2}{2C} = \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2\ell}.$$

問5 上側の極板は電氣的に孤立するため電荷は $Q_a + Q_b$ で保存される。また、下側の極板は接地されているため、面 d より下側の電位は0で一定（電位差0）、つまり電場も0である。よって、導体内部の電場が0であること、d より下側の電場が0であること、および電荷保存則より、

$$\begin{cases} \frac{2\pi k_0}{S}(Q_a - Q_b - Q_c - Q_b) = 0, \\ \frac{2\pi k_0}{S}(Q_a + Q_b + Q_c - Q_b) = 0, \\ \frac{2\pi k_0}{S}(Q_a + Q_b + Q_c + Q_b) = 0, \\ Q_a + Q_b = \frac{SV}{4\pi k_0 \ell} \end{cases} \quad \therefore \begin{aligned} Q_a &= Q_d = 0, \\ Q_b &= -Q_c = \frac{SV}{4\pi k_0 \ell}. \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{Q_d}{Q_b} = 0, \quad \frac{Q_c}{Q_b} = -1.$$

B コンデンサの内部構造, 分極

【メモ】

・問 1 は公式処理でよい。コンデンサの合成則は成立条件含め覚えておく。問 2, 問 3 は公式処理。問 4 は回路のエネルギー収支を考えればよい。各素子のエネルギー的な役割を押さえておく。

【解答】

真空の誘電率を ε_0 , 比誘電率 ε_r とすると,

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d}, \quad C_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{a^2}{d}.$$

問 1 容量の並列合成則より*5,

$$C(x) = \varepsilon_0 \frac{ax}{d} + \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{a(a-x)}{d} = \frac{x}{a} + \frac{a-x}{a} C_1 = \underbrace{C_1 - (C_1 - C_0) \frac{x}{a}}.$$

問 2 誘電体を x だけ引いた位置にあるときの極板の帯電量 $Q(x)$ はキルヒホッフの法則より,

$$V - \frac{Q(x)}{C(x)} = 0 \quad \therefore Q(x) = C(x)V.$$

よって, 誘電体を d だけ引く間の静電エネルギー変化は,

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2} \frac{\{C(x+d)V\}^2}{C(x+d)} - \frac{1}{2} \frac{\{C(x)V\}^2}{C(x)} \\ &= \frac{1}{2} C(x+d)V^2 - \frac{1}{2} C(x)V^2 \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\{C(x+d) - C(x)\}V^2}. \end{aligned}$$

問 3 前問で計算した $Q(x)$ を用いて,

$$\Delta Q = C(x+d)V - C(x)V = \underbrace{\{C(x+d) - C(x)\}V}.$$

問 4 外力の仕事 W_{ex} , 電池の仕事 W_{bat} とする。回路のエネルギー収支より,

$$\Delta U = W_{\text{bat}} + W_{\text{ex}} = \Delta QV + W_{\text{ex}} \quad \therefore W_{\text{ex}} = -\frac{1}{2} \{C(x+d) - C(x)\}V$$

である。ここに $C(x)$ を代入すれば,

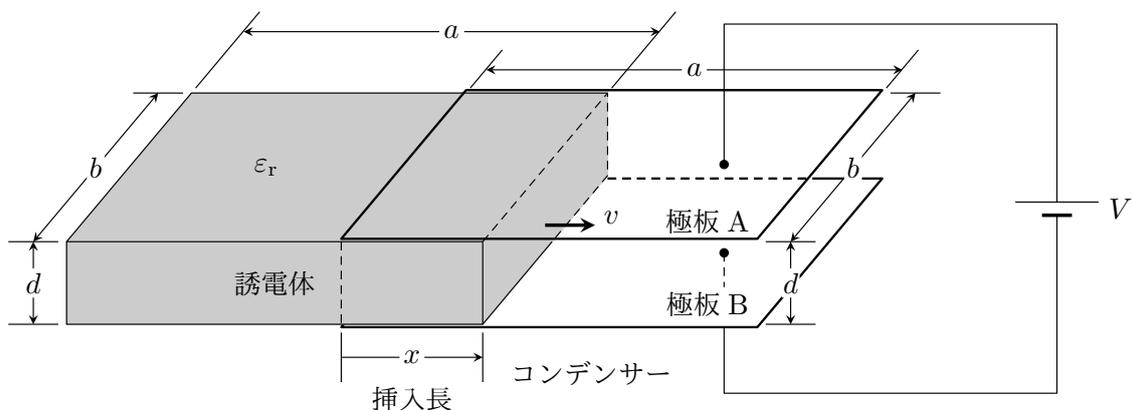
$$W_{\text{ex}} = -\frac{1}{2} \{C(x+d) - C(x)\}V^2 = \frac{C_1 - C_0}{2a} V^2 d$$

*5 並列合成則に関しては万能なため覚えておきたい。直列合成則は使えるときとそうでないとき（初期状態での電荷の有無に依存）があるため極力使わないのがよい。並列合成の公式を用いないで計算する方法は【補足2】に示した。

と d に比例するため、大きさ一定の力 \vec{f} が $\Delta\vec{x}$ の区間作用する間の仕事が $W = \vec{f}\Delta\vec{x} = f\Delta x \cos\theta$ (θ は \vec{f} と $\Delta\vec{x}$ のなす角) であることを踏まえれば F は一定と分かる。よって、 $W_{\text{ex}} = Fd$ と書けるので、

$$F = \frac{W_{\text{ex}}}{d} = \frac{C_1 - C_0}{2a} V^2.$$

【補足 1】誘電体挿入時の力の関数形について



図のように、コンデンサに引き摺り込まれる誘電体にはたらく力の関数形について考察する。コンデンサにかかる電位差を V とし、誘電体の挿入長が x のときの誘電体の速度を $v = \frac{dx}{dt}$ 、誘電体のコンデンサの容量を $C(x)$ 、コンデンサの帯電量を $Q(x)$ とする。

キルヒホッフの法則は、

$$V = \frac{Q(x)}{C(x)}$$

であり、ここに回路に流れる電流 $I = \frac{dQ}{dt}$ をかけて、

$$VI = \frac{Q(x)}{C(x)} \frac{dQ}{dt}.$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) &= \frac{d}{dQ} \left(\frac{1}{2} Q^2 C \right) \frac{dQ}{dt} + \frac{d}{dC} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) \frac{dC}{dt} \\ &= \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{C} \right)^2 \frac{dC}{dx} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} - \frac{1}{2} \frac{dC}{dx} V^2 v \end{aligned}$$

より,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{Q}{C} \right)}_{\text{静電エネルギーの時間変化率}} = \underbrace{VI}_{\text{電池の仕事率}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \frac{dC}{dx} V^2 v \right)}_{\text{外力の仕事率と解釈できる}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を得る.

さて, 運動方程式は, 誘電体に加える外力を F_{ex} , 極板から受ける力を f とすると,

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\text{ex}} + f$$

と書け, 両辺に v をかければ,

$$mv \frac{dv}{dt} = F_{\text{ex}} v + f v$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = F_{\text{ex}} v + f v$$

となる. つりあいを保ちながら誘電体を挿入したとすれば速さは一定値を取るから,

$$0 = F_{\text{ex}} v + f v \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を得る.

以上①, ②より, 誘電体が引き摺り込まれる力が求まる.

$$f v = -F_{\text{ex}} v = \frac{1}{2} \frac{dC}{dt} V^2 v \quad \therefore f = \frac{1}{2} \frac{dC}{dx} V^2.$$

例えば, 上図のように長方形の面積を ab , 極板間隔を d , 真空の誘電率を ϵ_0 , 誘電体の比誘電率を ϵ_r とすれば,

$$C(x) = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{bx}{d} + \epsilon_0 \frac{b(a-x)}{d}$$

であるから,

$$\frac{dC(x)}{dx} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \frac{b}{d}$$

となり, 誘電体を受ける力は,

$$f = \frac{1}{2} \frac{dC}{dx} V^2 = \frac{(\epsilon_r - 1) \epsilon_0 b V^2}{2d}$$

と求まる.

【補足 2】容量を定義通り計算

【補足 1】中の図に示したコンデンサの容量を、定義から計算してみる。極板の面積を $S (= ab)$ ，極板間隔を d ，真空の誘電率を ε_0 ，誘電体の比誘電率を ε_r とする。

真空側（面積 $S_1 = b(a - x)$ ）の帯電量を q_1 ，誘電体挿入側（面積 $S_2 = bx$ ）の帯電量を q_2 とすると，真空側の極板間電場の大きさ E_1 ，および誘電体側の極板間電場の大きさ E_2 はそれぞれ，

$$E_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S_1}, \quad E_2 = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{q_2}{\varepsilon_0 S_2}$$

と表される。同一導体ゆえ電位差は等しいから，

$$E_1 d = E_2 d$$

$$\frac{q_1}{\varepsilon_0 S_1} d = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{q_2}{\varepsilon_0 S_2} d \quad \therefore q_2 = \frac{\varepsilon_r S_2}{S_1} q_1$$

を得る。

コンデンサが外部電源に繋がっていて電位差が V で与えるとき，

$$V = E_1 d = E_2 d$$

であるから，真空側の面積が $S_1 = b(a - x)$ ，誘電体側の面積が $S_2 = bx$ であることに留意すれば，

$$q_1 = \varepsilon_0 \frac{b(a - x)}{d} V, \quad q_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{bx}{d} V$$

となり，極板全体の帯電量 Q は，

$$Q = \varepsilon_0 \frac{b(a - x)}{d} + \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{bx}{d} = \frac{\{(\varepsilon_r - 1)x + a\} \varepsilon_0 b}{d} V$$

となり，このコンデンサの容量は，

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\{(\varepsilon_r - 1)x + a\} \varepsilon_0 b}{d}$$

となる。

また，コンデンサが電氣的に孤立していてその帯電量が Q である場合，電荷保存則より，

$$Q = q_1 + q_2 = q_1 + \frac{\varepsilon_r S_2}{S_1} q_1 \quad \therefore q_1 = \frac{S_1}{S_1 + \varepsilon_r S_2} Q$$

となり，極板間電位差は，

$$V = E_1 d = \frac{1}{\varepsilon_0 S_1} \frac{S_1}{S_1 + \varepsilon_r S_2} Q d = \frac{Q d}{\varepsilon_0 b \{(\varepsilon_r - 1)x + a\}}$$

となり，このコンデンサの容量は，

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\{(\varepsilon_r - 1)x + a\} \varepsilon_0 b}{d}$$

となる。

このように， Q が既知の場合， V が既知の場合といずれの場合でも容量は等しくなる。

4 A コンデンサの内部構造, 分極

【メモ】

・ 3 B と同じ.

【解答】 略

B コンデンサの内部構造

【メモ】

- ・問 1, 問 3, 問 5 は力の公式を用いてつりあいを考えるだけ.
- ・問 2, 問 4 は電荷の決定. 回路の状態決定 (電荷の決定) は, 以下に従う.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{キルヒホッフの法則 (第 2 法則)} \\ \text{電荷保存則 (キルヒホッフ第 1 法則を含む)} \\ \text{素子の性質} \end{array} \right.$$

【解答】

極板間の誘電率を ε_0 , 極板の面積を S とする.

- 問 1 極板間隔が 2ℓ のときばねは自然長であるから, 極板間隔が y_0 のときのばねの伸びは $2\ell - y_0$ である. よって,

$$F_0 = k(2\ell - y_0).$$

- 問 2 ガウスの法則より, 各極板に蓄えられている $\pm Q$ の作る電場の大きさ E_{\pm} は,

$$E_{\pm} \cdot 2S = \frac{|\pm Q|}{\varepsilon_0 S} \quad \therefore E_{\pm} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

であるから, 極板間電場の大きさ E は,

$$E = 2E_{\pm} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

となる. ここで, 容量の公式 $C = \varepsilon_0 \frac{S}{y_0}$ から $\varepsilon_0 S$ を消去して*6,

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{C y_0} \quad \therefore C = \frac{Q}{E y_0}.$$

- 問 3 上側の極板に帯電する $+Q$ の電荷は, 下側の極板に帯電している $-Q$ の電荷の作る電場 E_- によって力を受ける (逆も然り). 向きに注意して,

$$F_1 = -(+Q|E_-|) = -\frac{1}{2}QE.$$

*6 このようにガウスの法則など使わず, もっと気楽に考えてよい. 電位差を 2 通りで表現して,

$$E y_0 = \frac{Q}{C} \quad \therefore C = \frac{Q}{E y_0}.$$

問4 左側, 右側それぞれのコンデンサの上側極板の帯電量を Q_L , Q_R とする. キルヒホッフ則, および電荷保存則より,

$$\begin{cases} Q_L + Q_R = Q, \\ \frac{Q_L}{\varepsilon_0 S / \ell} - \frac{Q_L}{\varepsilon_0 S / y} = 0 \end{cases} \quad \therefore Q_R = \frac{\ell}{\ell + y} Q, \quad Q_L = \frac{y}{\ell + y} Q.$$

また, 右側コンデンサの極板間電場はガウスの法則より,

$$E_R = \frac{Q_R}{\varepsilon_0 S} = \frac{\ell}{\ell + y} \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\ell}{\ell + y} E.$$

問5 y_0 のとき, y のとき, それぞれのつりあいより,

$$\begin{cases} k(2\ell - y_0) = \frac{1}{2}QE, \\ k\left(2\ell - \frac{7}{4}\ell\right) = \frac{1}{2}Q_R E_R \end{cases} \quad \therefore y_0 = \frac{7}{64}\ell.$$

5 熱あり過程, 熱なし過程

【メモ】

- ・問 1 は気体の状態決定, 問 3, 4, 5 は準静的 (むらのない) 断熱過程, 問 6, 7 は熱あり過程である.
- ・熱力学の基本的 (むらがなく熱あり) な過程の定石は以下の通り.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{状態決定: } \left\{ \begin{array}{ll} \text{可動部分のつりあい} & \rightarrow \text{圧力 } P \text{ の決定} \\ \text{状態方程式} & \rightarrow \text{温度 } T \text{ の決定 (モル数 } n \text{ の場合も)} \end{array} \right. \\ \text{第 1 法則: 熱の決定式} \end{array} \right.$$

熱力学第 1 法則は熱の決定式で, 内部エネルギー変化は公式, 気体のする仕事は $P-V$ 図の面積評価によって行う.

- ・むらのない断熱過程の定石は以下の通り.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{状態決定: } \left\{ \begin{array}{l} \text{ポアソンの公式} \\ \text{状態方程式} \end{array} \right. \\ \text{第 1 法則: 仕事の決定式} \end{array} \right.$$

断熱過程ゆえ熱力学第 1 法則は熱の決定式ではなくなる. 内部エネルギー変化を公式から計算し, 気体のする仕事を熱力学第 1 法則を通じて間接的に求めることとなる.

【解答】

問 1 状態方程式より,

$$p_0 V = nRT \quad \therefore V = \frac{nRT}{\underbrace{p_0}}$$

問 2 ピストンのつりあいより,

$$0 = p_0 S - \{p + \rho g(-y_0)\} S \quad \therefore y_0 = -\frac{p_0 - p}{\underbrace{\rho g}}$$

問 3 状態方程式, およびポアソンの公式より,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha p_0 V_1 = nRT_1, \\ \alpha p_0 V_1^{\frac{5}{3}} = p_0 \left(\frac{nRT}{p_0} \right)^{\frac{5}{3}} \end{array} \right. \quad \therefore V_1 = \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{5}}} \frac{nRT}{p_0}, \quad T_1 = \alpha^{\frac{2}{5}} T.$$

なお, ピストンのつりあいからは y_1 が求まる.

$$0 = \alpha p_0 S - \{p + \rho g(-y_1)\} S \quad \therefore y_1 = -\frac{\alpha p_0 - p}{\rho g}.$$

問 4 前問に示した.

問5 内部エネルギーは公式より,

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_1 - T) = \frac{3}{2}(\alpha^{\frac{2}{5}} - 1)nRT.$$

仕事は, 断熱過程ゆえ熱力学第1法則より逆算して,

$$W = -\Delta U = -\frac{3}{2}(\alpha^{\frac{2}{5}} - 1)nRT.$$

問6 ピストンのつりあい, および状態方程式より*7,

$$\begin{cases} 0 = p_2 S - \{p + \rho g(-y_1)\} S, \\ p_2 V_2 = nRT \end{cases} \quad \therefore V_2 = \frac{nRT}{p_2} = \frac{1}{\alpha} \frac{nRT}{p_0}.$$

よって,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{nRT/\alpha p_0}{nRT/\alpha^{\frac{3}{5}} p_0} = \alpha^{-\frac{2}{5}}.$$

問7 内部エネルギーは公式より,

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(1 - \alpha^{\frac{2}{5}})nRT.$$

仕事は pV 図の面積評価をして (図略),

$$W_{12} = \alpha p_0 (V_2 - V_1) = (1 - \alpha^{\frac{2}{5}})nRT.$$

よって, 熱力学第1法則より,

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + W_{12} = \frac{5}{2}(1 - \alpha^{\frac{2}{5}})nRT.$$

*7 容器と外界では熱のやりとりが自由なため, 容器内の気体の温度は T である.

6 A 光の干渉（回折格子）

【メモ】

・問 1 は公式，問 2, 3 は干渉条件の導出，問 4, 5 は干渉条件を用いた典型的な考察問題．・干渉条件は以下の通り（ m を整数）．

$$(\text{位相差}) = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強めあい}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱めあい}) \end{cases}$$

位相差は $\frac{2\pi}{\lambda}$ (経路差)，反射による位相差，初期位相差の 3 つを考える*8．

【解答】

問 1 波の基本式より，

$$f = \frac{c}{\lambda}.$$

問 2 経路差 $d_{A'B'} - d_{AB}$ は図より，

$$d_{A'B'} - d_{AB} = a(\sin \theta' - \sin \theta).$$

問 3 明線条件は，

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda} a(\sin \theta_m - \sin \theta) &= 2m\pi \\ a(\theta_m - \theta) &\doteq m\lambda \quad \therefore \theta_m = \theta + \underbrace{\frac{\lambda}{a} m}. \end{aligned}$$

問 4 スクリーン上の m 次の明線位置 y_m は $y_m = L \tan \theta_m$ と書けるから明線間隔は，

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_{m+1} - y_m = L \tan \theta_{m+1} - L \tan \theta_m \\ &\doteq L \left\{ \theta + \frac{\lambda}{a}(m+1) \right\} - L \left(\theta + \frac{\lambda}{a} m \right) \\ &= \frac{L\lambda}{a}. \end{aligned}$$

よって，与えられた数値より，

$$\lambda = \frac{a\Delta y}{L} = \frac{36 \times 24 \times 10^{-9}}{125 \times 10^{-2}} \text{ m} \doteq \underline{6.9 \times 10^{-7} \text{ m}}.$$

問 5 $m = 0$ の強め合う回折光は，明線条件より，

$$\theta_0 = \theta$$

*8 屈折率 n の媒質中では波長 λ を $\frac{\lambda}{n}$ とする．

と波長に依らず全ての波長の光が強め合う。よって、白色となる。

$m = \pm 1$ の強め合う回折光は、明線条件より、

$$\theta_0 = \theta \pm \frac{\lambda}{a}$$

と波長が大きいほど、強め合いの生じる角度が θ から離れる。よって、 θ から遠い側が赤色、近い側が青色となる。

以上から、(b) の選択肢が正しい。

B レンズ (フレネル帯)

【メモ】

- ・問 1 は干渉条件の導出, 問 2, 問 4 は干渉条件の利用と図形の考察 (長さ と 角の対応付けゆえ三角比の利用), 問 3, 問 5 は公式処理.
- ・レンズ・球面鏡の写像公式は以下の通り.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \begin{cases} +\frac{1}{f} & (\text{凸レンズ} \cdot \text{凹面鏡}) \\ -\frac{1}{f} & (\text{凹レンズ} \cdot \text{凸面鏡}) \end{cases}$$

【解答】

- 問 1 図より $\tan \theta = \frac{y}{p}$ であり, $y \ll p$ より θ は微小角であるから $\sin \theta \doteq \tan \theta \doteq \theta$ が成り立つ. m 次の回折光を観測する方向を ϕ_m とすれば, 同様に $\sin \phi \doteq \tan \phi \doteq \phi$ が成り立つ. このとき, 明線条件は,

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda_0} a(\sin \phi_m - \sin \theta) &= 2m\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda_0} a(\phi_m - \theta) &\doteq 2m\pi \quad \therefore \phi_m = \theta + \frac{\lambda_0}{a} m \end{aligned}$$

となる. $m = -1$ 次の回折光が x 軸と交わるには $\phi_{-1} < 0$ であればよいので,

$$\phi_{-1} = \theta - \frac{\lambda_0}{a} < 0 \quad \therefore \theta < \frac{\lambda_0}{a} (= \theta_c).$$

- 問 2 図より $\tan \phi_{-1} = -\frac{y}{q}$ であり, 近似 $\tan \phi_m \doteq \phi$, および明線条件 $\phi = \theta + \frac{\lambda_0}{a} m$ より,

$$-\frac{y}{q} = \tan \phi_{-1} \doteq \phi_{-1} = \theta - \frac{\lambda_0}{a} \doteq \frac{y}{p} - \frac{\lambda_0}{a} \quad \therefore a = \frac{pq}{p+q} \frac{\lambda_0}{y}.$$

- 問 3 レンズの写像公式より,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \therefore f = \frac{pq}{p+q}.$$

- 問 4 波長 λ の $m = -1$ 次の回折光を観測する方向を ϕ_{-1}^* , 観測位置座標を x とする. このとき, $\tan \phi_{-1}^* = -\frac{y}{x}$ であり, $\tan \phi_{-1}^* \doteq \phi_{-1}^* = -\frac{y}{x}$ である. 明線条件, および問 2 の $a = \frac{pq}{p+q} \frac{\lambda_0}{y}$ より,

$$\begin{aligned} \phi_{-1}^* - \theta &= \frac{\lambda}{a}(-1) \\ -\frac{y}{x} - \frac{y}{p} &= -\lambda \frac{p+q}{pq} \frac{y}{\lambda_0} \quad \therefore x = \frac{pq\lambda_0}{(p+q)\lambda - q\lambda_0}. \end{aligned}$$

なお、途中計算から

$$-\frac{y}{x} - \frac{y}{p} = -\frac{\lambda}{a} \quad \therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{x} = \frac{\lambda}{ay}$$

と波長 λ の場合の写像公式を得る.

問5 λ_0, λ それぞれの写像公式より,

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\lambda_0}{ay} = \frac{1}{f_1}, \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{x} = \frac{\lambda}{ay} = \frac{1}{f'} \end{cases} \quad \therefore f' = \underbrace{\frac{\lambda_0}{\lambda}} f.$$