

1 等加速度運動, 単振動, 非等速円運動, 衝突

【メモ】

・問 1, 問 2 は等加速度運動 (問 2 は時間追跡), 問 3 は非等速円運動, 問 4 は単振動, 問 5 は非等速円運動, 問 6, 問 7 は衝突. 問 8 はエネルギーを計算するだけである.

・等加速度運動, 単振動はともに時間追跡, エネルギーで論じることができる. 時刻 t を問われている場合は時間追跡的解法を選択する. 等加速度運動の公式は以下 2 式を押しさえれば十分*1.

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2, \\ v(t) = v(0) + at. \end{cases}$$

・非等速円運動の定石は以下の通り.

$$\begin{cases} \text{運動方程式 (中心成分)} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

・衝突の定石は以下の通り.

$$\begin{cases} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{cases}$$

固定面との衝突など外力制御がある場合の衝突では運動量保存則は成り立たないので注意.

【解答】

問 1 小球 A の時刻 t における位置, および速度はそれぞれ,

$$\begin{cases} y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2, \\ v = v_0 - gt \end{cases}$$

と書ける. $v = 0$ を満たすとき $y = h$ であるから*2,

$$\begin{cases} h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2, \\ 0 = v_0 - gt \end{cases} \quad \therefore v_0 = \sqrt{2gh}, \quad t = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

*1 加速度 a が t のべき乗で書ける場合, 単純に積分すれば (これもれっきとした微分方程式を解く操作である) その場合の速度 v と位置 x の公式を導出できる.

*2 小球のエネルギー収支: $\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = -mgh$

力学的エネルギー保存則: $0 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg \cdot 0$

問2 力学的エネルギー保存則より*3*4,

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}Mgl \cdot 0^2 = \frac{1}{2}M \cdot 0^2 + \frac{1}{2}Mgl\theta_1^2 \quad \therefore v_B = \theta_1 \sqrt{gl}.$$

問3 小球 B は微小角で触れる振り子ゆえ, 単振動と見做せる. 手を放してから Q に達するまで時間は単振動の $\frac{1}{4}$ 周期と等しく, これが小球 A が折り返す時間と等しくなれば良いので,

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\ell}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \therefore \ell = \frac{8}{\pi^2} h.$$

問4 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}M \cdot 0^2 + \frac{1}{2}Mgl\theta_2^2 = \frac{1}{2}MV_B^2 + \frac{1}{2}Mgl \cdot 0^2 \quad \therefore V_B = \theta_2 \sqrt{gl}.$$

問5 運動量保存則より,

$$mV_A + M\theta_2 \sqrt{gl} = m \cdot 0 + M\theta_1 \sqrt{gl} \quad \therefore V_A = (\theta_1 - \theta_2) \frac{M}{m} \sqrt{gl}.$$

問6 条件 (はね返り係数の式) より,

$$V_A - V_B = -e(0 - \theta_1 \sqrt{gl}) \quad \therefore e = \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right) \frac{M}{m} - \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

問7 力学的エネルギーの変化量 ΔE は,

$$\Delta E = \frac{1}{2}mV_A^2 + \frac{1}{2}MV_B^2 - \frac{1}{2}Mv_B^2$$

であり, ここに $M = m$, $\theta_2 = \frac{1-e}{2}\theta_1$ を代入して,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2}mgl \left(\theta_1 - \frac{1-e}{2}\theta_1\right)^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{1-e}{2}\theta_1\right)^2 - \frac{1}{2}mgl\theta_1^2 \\ &= -\frac{1-e^2}{4}mgl\theta_1^2 \end{aligned}$$

を得る. よって, 減少量 $|\Delta E|$ は,

$$|\Delta E| = \frac{1-e^2}{4}mgl\theta_1^2.$$

*3 位置エネルギーは題意に従う.

*4 通常通り立式した力学的エネルギー保存則は以下の通り (位置エネルギーの基準を P に取る).

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 + Mg(-\ell) = 0 + Mg(-\ell \cos \theta)$$

ここに $\cos \theta \doteq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ の近似を用いれば同様の結果を再現する.

2 等加速度運動, 単振動, 非等速円運動, 衝突

【メモ】

・問 1～問 7 は 1 と共通. 問 8, 10, 11 は等加速度運動 (時間追跡), 問 9 は衝突.

【解答】

問 8 問 7 より $\frac{M}{m}$ は,

$$\frac{M}{m} = \frac{e\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}$$

であり, 問 3 より $l = \frac{8}{\pi^2}h$ である. すると, 小球 B と衝突直後 (この瞬間を $t = 0$ とする) の小球 A の初速度の x 成分は,

$$v_x(0) = (\theta_1 - \theta_2) \frac{M}{m} \sqrt{gl} = \frac{2(e\theta_1 + \theta_2)}{\pi} \sqrt{2gh}$$

と書ける. よって, 衝突後から床面と衝突するまでの間の小球 A の位置は,

$$\begin{cases} x = \frac{2(e\theta_1 + \theta_2)}{\pi} \sqrt{2gh} t, \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

と表される. 落下時間は $y = 0$ を解いて

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \therefore t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

であり, この時刻における x 座標は,

$$x = \frac{2(e\theta_1 + \theta_2)}{\pi} \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{4(e\theta_1 + \theta_2)}{\pi} h.$$

問 9 小球 A の衝突直前の速度の y 成分 v_y は, 時間追跡の結果から,

$$v_y = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

である. 衝突直後の小球 A の速度の y 成分は, はね返り係数の式より,

$$v'_y - 0 = -e'(-\sqrt{2gh} - 0) \quad \therefore v'_y = e'\sqrt{2gh}$$

と求まる．床面との衝突時，小球 A が受ける力積は y 軸方向のみであるため，衝突の前後で小球 A の速度の x 成分は変化しない．よって，題意より，

$$\frac{v'_y}{v_x} = \frac{e'\sqrt{2gh}}{\frac{2(e\theta_1 + \theta_2)}{\pi}\sqrt{2gh}} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \therefore e' = \frac{2(e\theta_1 + \theta_2)}{\pi}$$

問 10 床面と衝突した時刻を再度 $t = 0$ とすると，衝突後の小球 A の位置，速度の y 成分は，

$$\begin{cases} y = e'\sqrt{2gh}t - \frac{1}{2}gt^2, \\ v_y = e'\sqrt{2gh} - gt \end{cases}$$

と書ける．最高点ゆえ $v_y = 0$ を考えて，

$$\begin{cases} y = e'\sqrt{2gh}t - \frac{1}{2}gt^2, \\ 0 = e'\sqrt{2gh} - gt \end{cases} \quad \therefore t = e'\sqrt{\frac{2g}{h}}, \quad \therefore y = e'^2h = \frac{4(e\theta_1 + \theta_2)^2}{\pi^2}h.$$

問 11 前問の式を用いて再度床面と衝突する（穴に入る）までの時間は $y = 0$ を計算すれば，

$$e'\sqrt{2gh}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \therefore t = 2e'\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

と求まる．よって，小球 B と衝突してから穴に入るまでの時間は $\sqrt{\frac{2h}{g}} + 2e'\sqrt{\frac{2h}{g}}$ であるから，この間の x 方向の運動を考えて，

$$d = \frac{2(e\theta_1 + \theta_2)}{\pi}\sqrt{2gh} \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} + 2e'\sqrt{\frac{2h}{g}} \right) \quad \therefore h = \frac{d}{2e'(1 + 2e')}.$$

3 vBl の電磁誘導

【メモ】

- ・問 1, 5, 6 は磁束の定義を答えるだけ, 問 2 は後述の電磁誘導の基本構成①, ②に, 問 3 は③, 問 4 は④, 問 7 は①に該当する.
- ・回路の一部が静磁場中を動く電磁誘導は, 誘導起電力の決定では vBl の公式が基本となる. 今回の問題はファラデーの法則を使うような誘導が付いているが, 起電力の決定だけであれば無視しても問題ない*5. 解答は誘導に従いファラデーの法則で作成した*6.
- ・電磁誘導の基本構成は, ①誘導起電力の決定, ②回路の議論, ③運動の議論, ④エネルギーの変換, という作りとなっている. これを知っているだけで見通しがよくなるので押さえておきたい.
- ・ジュール熱 J の計算は以下のように行う.

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I \text{ 一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I \text{ 一定でないとき}). \end{cases}$$

【解答】

問 1 磁束の定義より,

$$\Phi = B \cdot 2Lvt = \underline{\underline{2BLvt}}.$$

問 2 ファラデー則 (図の反時計回りを正) より*7,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \underline{\underline{-2vBL}}.$$

回路に流れる電流はキルヒホッフ則より,

$$\mathcal{E} - RI = 0 \quad \therefore I = \underline{\underline{-\frac{2vBL}{R}}}.$$

問 3 速度が一定なことから導体棒の加速度は 0 である. 大きさ F_{ex} の外力は正方向に仮定して, 運動方程式より,

$$m \cdot 0 = F_{\text{ex}} + IB \cdot 2L \quad \therefore F_{\text{ex}} = \underline{\underline{-2IBL}} = \underline{\underline{\frac{4(BL)^2}{R}v}}.$$

*5 【補足 1】を参照.

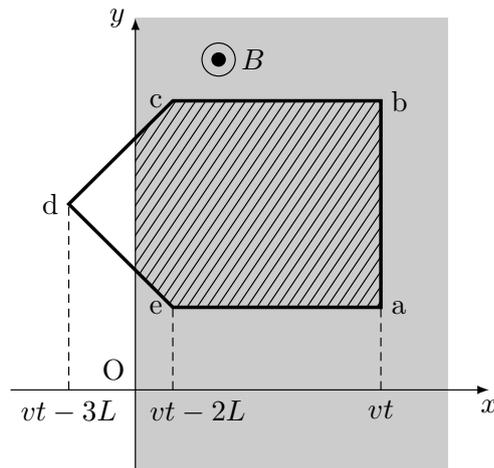
*6 理論の適用として適当なのはローレンツ力由来の公式である vBl の方である.

*7 ファラデーの法則の正方向は, 面を貫く B の垂直成分に右手親指を合わせ, 他 4 本の指が向く方と定めるのが国際的な慣例である.

問4 I 一定ゆえジュール熱は定義より,

$$J = RI^2 \cdot \frac{2L}{v} = \frac{8B^2L^3}{\underline{R}}v.$$

問5 よって, 磁束密度が貫く面積は以下の図の斜線部のようになる.



よって, 磁束の定義より,

$$\begin{aligned} \Phi &= B(2L^2) + \left\{ B \cdot 2L \cdot L \cdot \frac{1}{2} - B \cdot 2(vt - 3L) \cdot (vt - 3L) \cdot \frac{1}{2} \right\} \\ &= \underline{5BL^2 - B(vt - 3L)^2}. \end{aligned}$$

問6 題意に従い,

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 5BL^2 - B\{v(t + \Delta t) - 3L\}^2 - \{5BL^2 - B(vt - 3L)^2\} \\ &= \underline{-2vB(vt - 3L)\Delta t - B(v\Delta t)^2}. \end{aligned}$$

問7 $\Delta\Phi$ の結果から2次の微小量を見捨てるならば,

$$\Delta\Phi \approx -2vB(vt - 3L)\Delta t$$

となるので, ファラデー則より,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \approx -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \underline{2vB(vt - 3L)}.$$

【補足1】 vBl 公式で誘導起電力を決定する

上の解答では誘導によってファラデー則で誘導起電力を計算したが, 本来 vBl 公式で計算するのが適当である (し実際その方が楽である). ここでは, vBl 公式を使って誘導起電力を計算する*8. 誘導起電力性の向きは $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow a$ とする.

*8 入試本番ではこのように誘導を見捨てることも構わないし, 検算として用いるのも一つの手である.

$0 \leq t \leq \frac{2L}{v}$ のとき，辺 ab のみに誘導起電力が生じ，

$$V = V_{ab} = -vB \cdot 2L = -2vBL.$$

$\frac{2L}{v} \leq t \leq \frac{3L}{v}$ のとき，辺 ab，辺 cd（の一部分），辺 de（の一部分）に誘導起電力が生じ，

$$V = V_{ab} + V_{cd} + V_{de} = -vB \cdot 2L + \frac{1}{\sqrt{2}}vB \cdot \sqrt{2}(vt - 2L) \cdot 2 = 2vB(vt - 3L).$$

$\frac{3L}{v} \leq t \leq \frac{5L}{v}$ のとき，辺 cd，辺 de に誘導起電力が生じ，

$$V = V_{cd} + V_{de} = \frac{1}{\sqrt{2}}vB \cdot \sqrt{2}L \cdot 2 = 2vBL.$$

$\frac{5L}{v} \leq t \leq \frac{6L}{v}$ のとき，辺 cd（の一部分），辺 de（の一部分）に誘導起電力が生じ，

$$V = V_{cd} + V_{de} = \frac{1}{\sqrt{2}}vB \cdot \sqrt{2}\{3L - (vt - 3L)\} \cdot 2 = 2vB(6L - vt).$$

【補足 2】回路のエネルギー収支から外力を逆算する

導体棒の質量を m とし，一般に速度 v ，加速度 a の状況を考える．キルヒホッフ則，および運動方程式は以下の通り．

$$\begin{cases} RI = V, \\ ma = F_{\text{ex}} + IB \cdot 2L \end{cases}$$

キルヒホッフ則を I 倍，運動方程式を v 倍し 2 式の和を取ると，（具体的に計算してみればわかるが）各時刻において $IV = -2IBLv$ となることから*9，

$$\begin{aligned} mav + RI^2 &= F_{\text{ex}}v \\ \therefore \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)}_{\text{運動エネルギーの時間変化率}} + \underbrace{RI^2}_{\text{回路の消費電力}} &= \underbrace{F_{\text{ex}}v}_{\text{外力の仕事率}} \end{aligned}$$

ここで，今は速度が一定となるように外力を加えていることから運動エネルギーは定数値を取るなのでその時間変化率（微分）は 0 となる．よって，エネルギー収支は，

$$RI^2 = F_{\text{ex}}v$$

*9 誘導起電力の仕事率とアンペール力の仕事率は必ず相殺する．誘導起電力，アンペール力は導体内部のキャリアが受けるローレンツ力の分力に由来するものであり，これは磁場が仕事をしないことの帰結である（具体的に計算してみれば相殺することを確認できるので各自確認してみるとよいだろう）．

となり，外力の大きさ F_{ex} は，

$$F_{\text{ex}} = \frac{RI^2}{v}$$

と書ける．キルヒホッフ則から I を求めれば F_{ex} の関数形を求めることができる．

例えば，問 4 では $I = -\frac{2vBL}{R}$ であるから，

$$F_{\text{ex}} = \frac{RI^2}{v} = \frac{4B^2L^2}{R^2}v$$

と求めることができる．また，問 8 では $I = \frac{2vB(vt - 3L)}{R}$ であるから，

$$F_{\text{ex}} = \frac{RI^2}{v} = \frac{4B^2(vt - 3L)^2}{R^2}v$$

と求めることができる．

4 vBl の電磁誘導

【メモ】

・問 1～問 7 は 3 と共通。問 8 は②, ③に, 問 9 は①, ②, 問 10 は③に該当する。

【解答】

問 8 回路に流れる電流 I はキルヒホッフ則より,

$$\mathcal{E} - RI = 0 \quad \therefore I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2(vt - 3L)}{R}v.$$

よって, 運動方程式より,

$$0 = F_{\text{ex}} + IB \cdot 2L - 2 \cdot IB \cdot \sqrt{2}(vt - 2L) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore F_{\text{ex}} = \frac{4B^2(vt - 3L)^2}{R^2}v.$$

問 9 辺 ae が $x = 3L$ を通過している間 (時刻 t が $3L/v \leq t \leq 5L/v$ のとき) の誘導起電力は,

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \{5BL^2 - B(vt - 3L) \cdot 2L\} = 2vBL.$$

また, 辺 de が $x = 3L$ を通過している間 (時刻 t が $5L/v \leq t \leq 6L/v$ のとき) の誘導起電力は,

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \left\{ B \cdot 2(6L - vt) \cdot (6L - vt) \cdot \frac{1}{2} \right\} = 2vB(6L - vt).$$

以上より, 誘導起電力は

$$\mathcal{E} = \begin{cases} -2vBL & (0 \leq t \leq 2L/v, 3L/v \leq t \leq 5L/v) \\ 2vB(vt - 3L) & (2L/v \leq t \leq 3L/v) \\ 2vB(6L - vt) & (5L/v \leq t \leq 6L/v) \end{cases}$$

であり, 回路に流れる電流 I は,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \begin{cases} -\frac{2vBL}{R} & (0 \leq t \leq 2L/v, 3L/v \leq t \leq 5L/v) \\ \frac{2vB(vt - 3L)}{R} & (2L/v \leq t \leq 3L/v) \\ \frac{2vB(6L - vt)}{R} & (5L/v \leq t \leq 6L/v) \end{cases}$$

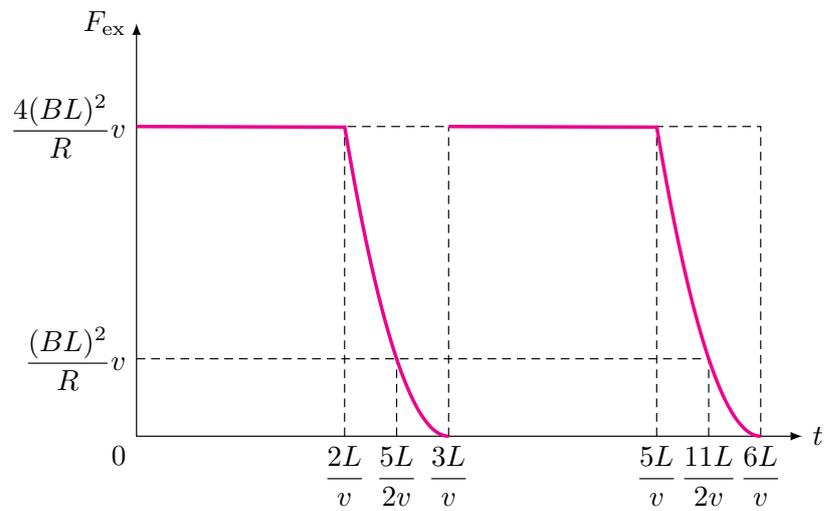
となる。よって, 回路に流れる電流の最大値は,

$$\max \{I\} = \frac{2vBL}{R}.$$

問 10 辺 de が $x = 3L$ を通過している間（時刻 t が $5L/v \leq t \leq 6L/v$ のとき）に加える外力も問 8 同様に考えれば，回路に加える外力は，

$$F_{\text{ex}} = \begin{cases} \frac{4(BL)^2}{R}v & (0 \leq t \leq 2L/v, 3L/v \leq t \leq 5L/v) \\ \frac{4B^2R}{v}(vt - 3L)^2 & (2L/v \leq t \leq 3L/v) \\ \frac{4B^2R}{v}(6L - vt)^2 & (5L/v \leq t \leq 6L/v) \end{cases}$$

となる．これを図示すれば以下のようなになる．



5 A 力学装置が与えられない熱機関

【メモ】

- ・問 1, 2, 4, 6 は (準静的) 断熱過程の状態決定, 問 3, 5 は熱あり過程の熱の計算である.
- ・熱力学の基本的 (むらがなく熱あり) な過程の定石は以下の通り.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{状態決定:} \left\{ \begin{array}{ll} \text{可動部分のつりあい} & \rightarrow \text{圧力 } P \text{ の決定} \\ \text{状態方程式} & \rightarrow \text{温度 } T \text{ の決定 (モル数 } n \text{ の場合も)} \end{array} \right. \\ \text{第 1 法則: 熱の決定式} \end{array} \right.$$

熱力学第 1 法則は熱の決定式で, 内部エネルギー変化は公式, 気体のする仕事は $P - V$ 図の面積評価によって行う.

- ・むらのない断熱過程の定石は以下の通り.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{状態決定:} \left\{ \begin{array}{l} \text{ポアソンの公式} \\ \text{状態方程式} \end{array} \right. \\ \text{第 1 法則: 仕事の決定式} \end{array} \right.$$

断熱過程ゆえ熱力学第 1 法則は熱の決定式ではなくなる. 内部エネルギー変化を公式から計算し, 気体のする仕事を熱力学第 1 法則を通じて間接的に求めることとなる.

- ・今回は具体的な力学装置が与えられていないので, 可動部分のつりあいから圧力の決定を行うことができない. そのため, 気体の状態決定は状態方程式, ポアソンの公式から行う.

【解答】

問 1 ポアソンの公式より,

$$p_B V_B^{\frac{5}{3}} = p_A V_A^{\frac{5}{3}} \quad \therefore p_B = \underbrace{\left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\frac{5}{3}}}_{\text{~~~~~}} p_A.$$

問 2 状態方程式より,

$$\left\{ \begin{array}{l} p_A V_A = RT_A, \\ p_B V_B = RT_B \end{array} \right. \quad \therefore T_B = \frac{p_B V_B}{p_A V_A} T_A = \underbrace{\left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\frac{2}{3}}}_{\text{~~~~~}} T_A.$$

問 3 B \rightarrow C 間の内部エネルギー変化 ΔU_{BC} は公式より,

$$\Delta U_{BC} = \frac{3}{2} R(T_C - T_B).$$

気体のする仕事 W_{BC} は $p - V$ 図より,

$$W_{BC} = p_B(V_C - V_B) = R(T_C - T_B).$$

よって、熱力学第1法則より、

$$Q_1 = \Delta U_{BC} + W_{BC} = \frac{5}{2}R(T_C - T_B) \quad \therefore T_C = \frac{2Q_1}{5R} + T_B.$$

問4 ポアソンの公式、および状態方程式より、

$$\begin{cases} p_B V_C^{\frac{5}{3}} = p_D V_A^{\frac{5}{3}}, \\ p_B V_C = RT_C, \\ p_D V_A = RT_D \end{cases} \quad \therefore T_B = \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\frac{2}{3}} T_C = \frac{2}{5R} \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\frac{2}{3}} Q_1 + \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\frac{2}{3}} T_A.$$

問5 D → A 間の内部エネルギー変化 ΔU_{BC} は公式より、

$$\Delta U_{DA} = \frac{3}{2}R(T_A - T_D) = -\frac{3}{5} \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\frac{2}{3}} Q_1 - \frac{3}{2}R \left\{ \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right\} T_A.$$

気体のする仕事 W_{DA} は $p - V$ 図より 0 であるから、熱力学第1法則より、

$$\begin{aligned} Q_{DA} &= \Delta U_{DA} + W_{DA} = -\frac{3}{5} \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\frac{2}{3}} Q_1 - \frac{3}{2}R \left\{ \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right\} T_A \\ \therefore Q_2 &= -Q_{DA} = \frac{3}{5} \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\frac{2}{3}} Q_1 + \frac{3}{2}R \left\{ \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right\} T_A. \end{aligned}$$

問6 ポアソンの公式、および状態方程式より、

$$\begin{cases} p_B V_B^{\frac{5}{3}} = p_A V_A^{\frac{5}{3}}, \\ p_B V_C^{\frac{5}{3}} = p_D V_A^{\frac{5}{3}}, \\ p_A V_A = RT_A, \\ p_B V_B = RT_B, \\ p_B V_C = RT_C, \\ p_D V_A = RT_D \end{cases} \quad \therefore T_D = \frac{p_D}{p_A} T_A = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\frac{5}{3}} T_A = \left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{\frac{5}{3}} T_A.$$

B 原子核崩壊

【メモ】

- ・問 1, 2, 4, 6 は (準静的) 断熱過程の状態決定, 問 3, 5 は熱あり過程の熱の計算である.
- ・ α 崩壊では, 原子核から α 粒子 (ヘリウム原子核) が放出される. つまり, 質量数は 4 減少し, 原子番号は 2 減少する.
- ・ β 崩壊では, 原子核から β 粒子 (速い電子) と反電子ニュートリノを放出し, 中性子が陽子へと変換される. つまり, 質量数は変化せず, 原子番号は 1 増加する.

【解答】

問 1 ア 陽子

イ 中性子

問 2 ウ 原子番号を見て 92.

エ 質量数から陽子数 (原子番号) を引いて $235 - 92 = \underline{143}$.

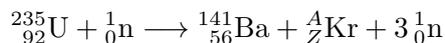
オ α 崩壊が 7 回, β 崩壊が 4 回行われることから, 質量数は $-4 \times 7 = -28$ と 28 だけ減少, 原子番号は $-2 \times 7 + 4 = -10$ と 10 だけ減少する. よって,

$$Z = 92 - 2 \times 7 + 4 = \underline{82}.$$

カ 中性子数は質量数から陽子数 (原子番号) を引いて,

$$A - Z = (235 - 4 \times 7) - 82 = \underline{125}.$$

キ 核反応は以下の通りである.



よって, 質量数, 原子番号 (陽子数 (正電荷)) それぞれについて両辺の合計を計算すれば,

$$\begin{cases} 141 + A + 3 = 235 + 1, \\ 56 + Z + 0 = 92 + 0 \end{cases} \quad \therefore A = \underline{92}, \quad Z = \underline{36}.$$

6 A 幾何光学

【メモ】

- ・スネルの法則を導出する問題のため，問 1~3 全て図形の考察から行う．
- ・幾何光学の定石は，以下の通り．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{スネルの法則} \\ \text{図形の性質} \end{array} \right.$$

図形の考察は，何が与えられているかを踏まえ，次の手順で行うようにする．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{角度のみ} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{三角形の内外角に注目（二等辺三角形に注意）} \\ \text{平行を利用（錯角・同位角）} \end{array} \right. \\ \text{長さのみ} \rightarrow \text{相似な三角形の相似比を利用} \\ \text{長さど角} \rightarrow \text{三角比を利用（正弦定理・余弦定理に注意）} \end{array} \right.$$

・屈折率 n の媒質中の波の速さは，基準となる媒質（屈折率 1 の媒質）中の速さの $\frac{1}{n}$ 倍となる．波長も同様である．

・媒質間で波が反射・屈折するとき，波の振動数は不変である．

【解答】

屈折率 n_1 の媒質を媒質 1，屈折率 n_2 の媒質を媒質 2 とし，図 1 の時刻における波面 S 上の点 A，B との交点を C，D とする．

問 1 屈折率 n_1 の媒質 1 中での波の速さは $\frac{c}{n_1}$ である．波面の一端 D が P と重なるとき $\overline{OC} = d \tan \alpha$ であるから，

$$\frac{c}{n_1} \Delta t = d \tan \alpha \quad \therefore \Delta t = \frac{n_1 d}{c} \tan \alpha .$$

問 2 媒質 1 中で波面の C が O に達する時間 Δt での媒質 2 中の伝播を考えればよいので，

$$\overline{PQ} = \frac{c}{n_2} \Delta t = \frac{n_1 d}{n_2} \tan \alpha .$$

問 3 $\triangle OPQ$ に注目して，

$$\overline{PQ} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} d .$$

なお，問 2，3 より，

$$\frac{\sin \beta}{\cos \alpha} d = \frac{n_1}{n_2} d \tan \alpha \quad \therefore n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

とスネルの法則を得る．

6

 B 幾何光学

【メモ】

- ・問 1, 2 はスネル則の利用 (と全反射条件), 問 3~7 は図形の考察である.
- ・全反射は屈折角が存在しない条件を考えればよい. すなわち, 数式においては屈折角を ϕ としたとき $\sin \phi > 1$ を考えればよい.
- ・光学的距離 (光路長) は実際の長さを屈折率倍したものである.

【解答】

屈折率 n_1 の媒質を媒質 1, 屈折率 n_2 の媒質を媒質 2 とする.

問 1 屈折角を ϕ とする. スネル則より,

$$n_2 \sin \phi = n_1 \sin \theta \quad \therefore \sin \phi = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta.$$

全反射すればよいので屈折角 ϕ が存在しない条件を考えて,

$$\begin{aligned} \sin \phi = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta > 1 \\ \sin \theta > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \underbrace{\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

ここで, 入射角ゆえ $\theta < \frac{\pi}{2}$ も考慮した.

問 2 媒質 1, 2 間の屈折角を ϕ , 媒質 2 と空気間の屈折角を δ とする. スネル則より,

$$\begin{cases} n_2 \sin \phi = n_1 \sin \theta, \\ 1 \cdot \sin \delta = n_2 \sin \phi, \end{cases} \quad \therefore \sin \phi = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sin \delta = \sqrt{2} \sin \theta.$$

媒質 1, 2 の境界では全反射せず, 媒質 2 と空気の境界で全反射する条件を考えればよいので,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 0 < \sin \phi < 1, \\ \sin \delta > 1 \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} 0 < \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta < 1, \\ \sqrt{2} \sin \theta > 1 \end{cases} \quad \therefore \underbrace{\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

問 3 図より,

$$\ell_1 = \underbrace{2kR \tan \theta}.$$

問 4 反射してから次に反射するまでに光が辿る長さ \tilde{L}_1 は,

$$\tilde{L}_1 = \frac{\ell_1}{\sin \theta} = \frac{2kR}{\cos \theta}.$$

よって、光学的距離に換算して、

$$L_1 = n_1 \tilde{L}_1 = \frac{2\sqrt{2}kR}{\cos \theta}.$$

問5 $\tan \theta = \sqrt{2}$ より, $\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である. スネル則より,

$$\sin \phi = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

であるから, $\cos \phi = \frac{1}{3}$, $\tan \phi = 2\sqrt{2}$ と求まる. よって, 図より,

$$\ell_2 = 2(1-k)R \tan \phi + 2kR \tan \theta = \underbrace{2\sqrt{2}(2-k)R}.$$

問6 反射してから次に反射するまでに光が迎える長さ \tilde{L}_2 は,

$$\tilde{L}_2 = \frac{2kR}{\cos \theta} + \frac{2(1-k)R}{\cos \phi}$$

である. 各区間で媒質の屈折率が異なることに留意すれば,

$$L_2 = n_1 \frac{2kR}{\cos \theta} + n_2 \frac{2(1-k)R}{\cos \phi} = \underbrace{\sqrt{6}(3-k)R}.$$

問7 題意より, $L_2 = n_1 \ell_2$ を考えて,

$$\sqrt{6}(3-k)R = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}(2-k)R \quad \therefore k = \frac{8-3\sqrt{3}}{4-\sqrt{6}} = \frac{7-2\sqrt{6}}{\underbrace{5}}.$$