I. 電磁気（静電誘導，ガウスの法則）

【メモ】

・導体内部の電場は 0 となる[*1]．電場は電荷から湧き出すため，内部の電荷も 0 となり，帯電は表面にのみ起こる．

【解答】

〔A〕 誘電率を ε_0 とすると，クーロンの法則の比例定数 k は，

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

と関係付いている．ここでは，$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi k}$ を用いて文字消去する．

(1) ガウスの法則より，

$$E(S+S) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi kQ\,, \quad E = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2\pi kQ}{S}}\,.$$

(2) 導体内部の電荷は $Q_{\text{内部}} = \underset{\sim}{0}$ である．導体の上側表面に帯電する電荷を q_1，下側表面に帯電する電荷を q_2 とする．導体は電気的に孤立しているから，電荷保存則より，

$$q_1 + q_2 = 0\,.$$

また，導体内部の電場は 0 であるから，ガウスの法則より，

$$\frac{2\pi kQ}{S} - \frac{2\pi kq_1}{S} + \frac{2\pi kq_2}{S} = 0\,.$$

以上 2 式より，

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 0\,, \\ \dfrac{2\pi k}{S}(Q - q_1 + q_2) = 0 \end{cases} \qquad \therefore q_1 = \underset{\sim}{\frac{Q}{2}}\,, \quad q_2 = \underset{\sim\sim}{-\frac{Q}{2}}\,.$$

(3) 導体内部の電場は $E_{\text{内部}} = \underset{\sim}{0}$ である．また，導体上側の電場は前問の結果より，

$$E_{\text{上側}} = \frac{2\pi kQ}{S} + \frac{2\pi kQ/2}{S} + \frac{2\pi k(-Q/2)}{S} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2\pi kQ}{S}}\,.$$

(4) 導体の上側表面に帯電する電荷を q_3，下側表面に帯電する電荷を q_4 とする．導体をアースに繋いでいることから，導体上側の電位差は 0，すなわち電場も 0 である．よって，ガウスの法則より，

$$\begin{cases} \text{内部}：\dfrac{2\pi kQ}{S}(Q - q_1 + q_2) = 0\,, \\ \text{上側}：\dfrac{2\pi k}{S}(Q + q_1 + q_2) = 0 \end{cases} \qquad q_3 = \underset{\sim}{0}\,, \quad q_4 = \underset{\sim\sim}{-Q}\,.$$

[*1] 電流が流れているような場合は異なる．

(5)　導体に帯電している電荷 $-Q$ が誘電体の作る電場 $E=\dfrac{2\pi kQ}{S}$ から受ける力の大きさは，

$$F=|-Q|E=\frac{2\pi kQ^2}{S}$$

である（図の下向き）．よって，仕事の定義より，

$$W=\begin{pmatrix}0\\-\dfrac{2\pi kQ^2}{S}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\h\end{pmatrix}=-\frac{2\pi kQ^2h}{S}$$

であり，仕事の大きさは

$$|W|=\underline{\frac{2\pi kQ^2h}{S}}.$$

〔B〕(1)　ガウスの法則より，導体球内部の電場は，

$$E_{内部}\cdot 4\pi r^2=\frac{0}{\varepsilon_0}\qquad E_{内部}=\underline{0}.$$

同様に，外部電場は，

$$E_{外部}\cdot 4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}=4\pi kQ\qquad E_{外部}=\underline{\frac{kQ}{r^2}}.$$

(2)　電位の定義より，

$$V=-\int_{\infty}^{R}E_{外部}\,dr=-\int_{\infty}^{R}\frac{kQ}{r^2}\,dr=\underline{\frac{kQ}{R}}.$$

(3)　容量は定義より，

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{R}{k}$$

である．よって，公式より，

$$U_{\mathrm{e}}=\frac{Q^2}{2C}=\underline{\frac{kQ^2}{2R}}.$$

(4)　題意より，系のエネルギーは，

$$U(R)=U_{\mathrm{e}}+U_{\mathrm{s}}(R)=\frac{kQ^2}{2R}+8\pi aR^2$$

と書ける．R が十分小さい範囲では $\dfrac{1}{R}$ が支配的になり，R が十分大きい範囲では R^2 が支配的になる．以上を踏まえれば (e) が適当である．

(5) 半径 R の微小変化に伴う系のエネルギー変化は,

$$\begin{aligned}
\Delta U &= U(R+\Delta R) - U(R) \\
&= \frac{kQ^2}{2(R+\Delta R)} + 8\pi a(R+\Delta R)^2 - \frac{kQ^2}{2R} - 8\pi a R^2 \\
&= \frac{kQ^2}{2R}\left(1+\frac{\Delta R}{R}\right)^{-1} + 8\pi a R^2\left(1+\frac{\Delta R}{R}\right)^2 - \frac{kQ^2}{2R} - 8\pi a R^2 \\
&\fallingdotseq \frac{kQ^2}{2R}\left(1-\frac{\Delta R}{R}\right) + 8\pi a R^2\left(1+\frac{2\Delta R}{R}\right) - \frac{kQ^2}{2R} - 8\pi a R^2 \\
&= \underline{\left(-\frac{kQ^2}{2R^2} + 16\pi R a\right)\Delta R}\,.
\end{aligned}$$

(6) $\Delta U = 0$ を考えて[*2],

$$\left(-\frac{kQ^2}{2R^2} + 16\pi R a\right)\Delta R = 0 \qquad \therefore R = \underline{\left(\frac{kQ^2}{32\pi a}\right)^{\frac{1}{3}}}\,.$$

[*2] エネルギーが極小値を取るとき安定した状態が実現される．そのため $\dfrac{\Delta U}{\Delta R} = 0$ を考えればよい．

II. 力学（等加速度運動，等速円運動，衝突）

【メモ】

・等加速度運動は①時間追跡，②エネルギーの 2 通りで解くことができる．時刻 t を求める場合は①一択となる．

・等速円運動は以下 2 式の連立．

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{つりあい} \quad \leftarrow \quad \text{使わない場合もあり} \end{cases}$$

・衝突は以下 2 式の連立．

$$\begin{cases} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{cases}$$

ただし，固定面など外力制御された物体との衝突では運動量は保存しない．

【解答】

〔A〕(1)　運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = -mg\cos\theta\,, \\ m\cdot 0 = N - mg\sin\theta \end{cases} \qquad \therefore N = \underline{mg\sin\theta}\,, \quad a = -g\cos\theta\,.$$

(2)　物体のエネルギー収支より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 &= \begin{pmatrix} -mg\cos\theta \\ N - mg\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -mgL\cos\theta \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mgL\cos\theta > 0 \qquad \therefore \underline{v_0 > \sqrt{2gL\cos\theta}}\,. \end{aligned}$$

(3)　$a = -g\cos\theta$，$x(0) = 0$，$v(0) = v_0$ より，

$$\begin{cases} x = v_0 t - \dfrac{1}{2}g\cos\theta t^2\,, \\ v = v_0 - g\cos\theta\,. \end{cases}$$

$x = L$ を解いて，

$$v_0 t - \frac{1}{2}g\cos\theta t^2 = L$$

$$t^2 - \frac{2v_0}{g\cos\theta}t + \frac{2L}{g\cos\theta} = 0 \qquad \therefore t = \underline{\frac{v_0}{\cos\theta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gL\cos\theta}{{v_0}^2}}\right)}\,.$$

また，このとき，

$$v = v_0 - g\cos\theta\cdot\frac{v_0}{\cos\theta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gL\cos\theta}{{v_0}^2}}\right) = \underline{\sqrt{{v_0}^2 - 2gL\cos\theta}}\,.$$

〔B〕(1)　運動方程式（中心成分），つりあい（鉛直成分）より，

$$\begin{cases} m\dfrac{V^2}{R\sin\theta} = N\cos\theta\,, \\ m\cdot 0 = N\sin\theta - mg \end{cases} \qquad \therefore N = \frac{mg}{\sin\theta}\,, \quad V = \sqrt{gR\cos\theta}\,.$$

(2)　衝突直前の質点の速さ v は，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}\frac{m}{3}v^2 + \frac{1}{3}mgr\cos\theta = \frac{1}{2}\frac{m}{3}(3V)^2 \qquad \therefore v = \sqrt{9V^2 - 2gR\cos\theta} = \sqrt{7gR\cos\theta}$$

衝突直後の母線に沿った方向（r 方向と呼ぶ）の速度成分を v_r，小物体が衝突直前に運動していた円軌道方向（ϕ 方向と呼ぶ）の速度成分を v_ϕ とする．衝突ゆえ衝突の直前・直後の運動量保存則より，

$$\begin{cases} r\ \text{方向}：mv_r + \dfrac{m}{3}v_r = \dfrac{m}{3}\sqrt{7gR\cos\theta}\,, \\ \phi\text{方向}：mv_\phi + \dfrac{m}{3}v_\phi = mV \end{cases}$$

$$\therefore v_r = \frac{3}{4}\sqrt{gR\cos\theta}\,, \quad v_\phi = \frac{1}{4}\sqrt{7gR\cos\theta}\,.$$

(3)　衝突直後の力学的エネルギーは，

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}m\left({v_\theta}^2 + {v_r}^2\right) + \frac{4}{3}mgR\cos\theta \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{9}{16}gR\cos\theta + \frac{7}{16}\cos\theta\right) + \frac{4}{3}mgR\cos\theta \\ &= 2mgR\cos\theta\,. \end{aligned}$$

(4)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}mv^2 + \frac{4}{3}mgr\cos\theta = 2mgR\cos\theta \qquad \therefore v = \sqrt{(3R-2r)gR\cos\theta}\,.$$

III. 波動（レンズ，幾何光学）

【メモ】

・凹凸レンズ（球面鏡）の写像公式は凸レンズ・凹レンズの写像公式：

レンズと物体の距離を a（$a>0$ はレンズ前方），レンズと像の距離を b（$b>0$ は光線の進行方向に取る），レンズの焦点距離を f とする．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\begin{cases}\dfrac{1}{f} & \text{（凸レンズ，凹面鏡）}\\[2mm] -\dfrac{1}{f} & \text{（凹レンズ，凸面鏡）}\end{cases}$$

なお，レンズ前方に生じるような像（虚像）の場合 $b<0$ となり，組み合わせレンズを考える場合，1 つ目のレンズによって $a<0$ となる位置に仮想的に結像する像を虚光源という．また，レンズの倍率 m は，

$$m=\left|\frac{b}{a}\right|$$

となり，中身の符号が正であれば倒立，負であれば正立である．

・幾何光学の図形の考察は，与えられている量の組み合わせによって以下のように考える．

$$\begin{cases}\text{角度のみ} & \to \begin{cases}\text{三角形の内外角に注目（二等辺三角形に注意）}\\ \text{平行性の性質を利用（錯角・同位角）}\end{cases}\\ \text{長さのみ} & \to \text{相似な三角形の相似比を利用}\\ \text{角と長さ} & \to \text{三角比を利用（正弦定理・余弦定理に注意）}\end{cases}$$

〔C〕の (1) は角度と長さが与えられているので三角比を利用すればよい．

【解答】

(1) (a) 倒立実像が観測され，原点対称の像となる．よって，(エ) となる．

(b) 光量が減るだけだから像の形は変わらず (ウ)，像の明るさは暗くなる (ア)．

(c) $\dfrac{1}{a'}<\dfrac{1}{a}$ であることを踏まえ，写像公式より，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}-\dfrac{1}{a},\\[2mm] \dfrac{1}{b'}=\dfrac{1}{f}-\dfrac{1}{a'}\end{cases}\qquad \therefore \frac{1}{b'}>\frac{1}{b}\qquad \therefore b'<b\ \text{(ウ)}.$$

(d) $a<a'$，$b'<b$ より，

$$m=\frac{b}{a}>\frac{b}{a'}>\frac{b'}{a'}=m'\qquad \therefore m>m'\ \text{(ウ)}.$$

(e)　写像公式より，

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$
$$\therefore f=\frac{ab}{a+b}=\frac{60.0\times 36.0}{60.0+36.0}\,\mathrm{cm}=\underset{\sim\sim\sim}{22.5\,\mathrm{cm}}\,.$$

また，このときの倍率は，

$$m=\left|\frac{36.0}{60.0}\right|=0.600$$

であるから像の半径 r' は

$$r'=0.600\times 3.00\,\mathrm{cm}=\underset{\sim\sim\sim}{1.80\,\mathrm{cm}}\,.$$

(2)　$b=-24\,\mathrm{cm}$，$f=8.0\,\mathrm{cm}$ である．写像公式より，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{-24}=\frac{1}{8}\qquad \therefore a=\underset{\sim\sim}{6\,\mathrm{cm}}\,.$$

このときの倍率は，

$$m=\left|\frac{-24}{6.0}\right|=\underset{\sim\sim}{4.0}\,.$$

(3) (a)　物体の大きさを h_1，実像の大きさを h_2，虚像の大きさを h_3，対物レンズと物体の距離を a_1，接眼レンズと虚像の距離を a_2 とすると，図より，

$$\begin{cases} h_1=a_1\tan\theta_\mathrm{o}\,, \\ h_2=f_\mathrm{o}\tan\theta_\mathrm{o}=f_\mathrm{e}\tan\theta_\mathrm{e}\,, \\ h_3=a_2\tan\theta_\mathrm{e} \end{cases}$$

が成り立つ．各角度について $\tan\theta\fallingdotseq\theta$ と近似して，

$$\begin{cases} h_1\fallingdotseq a_1\theta_\mathrm{o}\,, \\ h_2\fallingdotseq f_\mathrm{o}\theta_\mathrm{o}=f_\mathrm{e}\theta_\mathrm{e}\,, \\ h_3\fallingdotseq a_2\theta_\mathrm{e}\,. \end{cases}$$

よって，題意に従って，

$$M=\frac{\theta_\mathrm{e}}{\theta_\mathrm{o}}\fallingdotseq\frac{h_2/f_\mathrm{o}}{h_2/f_\mathrm{e}}=\underset{\sim\sim}{\frac{f_\mathrm{o}}{f_\mathrm{e}}}\,.$$

なお，図では $a_2\fallingdotseq a_1+f_\mathrm{o}$ であるが像はいずれも無限遠にあり f_o は無視でき，$a_1\fallingdotseq a_2$ と考え，各レンズの倍率を求め総合倍率を求めれば，

$$M=m_\mathrm{o}m_\mathrm{e}=\frac{h_2}{h_1}\frac{h_3}{h_2}\fallingdotseq\frac{f_\mathrm{o}\theta_\mathrm{o}}{a_1\theta_\mathrm{o}}\frac{a_2\theta_\mathrm{e}}{f_\mathrm{e}\theta_\mathrm{e}}=\frac{a_2}{a_1}\frac{f_\mathrm{o}}{f_\mathrm{e}}\fallingdotseq\underset{\sim\sim}{\frac{f_\mathrm{o}}{f_\mathrm{e}}}\,.$$

(b) $M = \dfrac{f_\mathrm{o}}{f_\mathrm{e}}$ より，

$$f_\mathrm{e} = \frac{f_\mathrm{o}}{M} = \frac{800}{160}\,\mathrm{mm} = \underset{\sim\sim\sim}{5.0\,\mathrm{mm}}\,.$$

(c) 分散（波長による屈折率の違い）によるものである．