I. 力学（天体が関与する運動（円軌道・非円軌道），分離）

【メモ】

・天体が絡む運動：

① 円軌道の場合：円運動ゆえ円運動と同様例外的に扱う．

$$\begin{cases} \text{運動方程式の中心成分} \\ \text{（力のつりあい）} \end{cases}$$

なお，運動の周期は，速さ v で円周 $2\pi\times$（半径）だけ進む時間を考えればよい．

② 円以外の軌道：

$$\begin{cases} \text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{面積速度保存則} \end{cases}$$

また，楕円軌道（長半径 a，短半径 b）の場合は周期 T が存在し，その決定は以下の 2 通り存在する（ケプラー第 3 法則を利用するのが一般的）．

$$\begin{cases} \dfrac{T^2}{a^3} = \text{const} = \text{（同一天体周りの別軌道での値）} \quad \leftarrow \quad \text{ケプラー第 3 法則} \\ \dfrac{\pi ab}{T} = \text{（ある地点での面積速度）} \end{cases}$$

・衝突/分裂時は力の詳細が不明なため，問題文で考えているモデル（平たく言えば条件）を与える必要がある．

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{問題文の条件} \end{cases}$$

なお，固定面など外力制御された面との衝突では運動量は保存しない．

【解答】

(1) 無限遠での運動エネルギー K_∞ が $K_\infty > 0$ であればよい．力学的エネルギー保存則より，

$$K_\infty + 0 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) > 0 \qquad \therefore v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

(2) 折り返し時，小物体 A の速さは 0 となる．力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) \qquad \therefore v_0 = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)}.$$

(3) 分裂後の物体 B にはたらくのは万有引力のみである．よって，キ が適当．

(4)　運動方程式（中心成分）より，

$$m'\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm'}{r^2} \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{r}}\,.$$

(5)　$2\pi r$ 進むのに要する時間ゆえ，

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{GM}}\,.$$

(6)　分裂するのは地球に対して静止した瞬間であり，分裂後の物体 B が図の右向きに動き出すこと，分裂の直前・直後の運動量保存則より オ と判断できる[*1]．

$$m\frac{v^2}{R+\ell} = \frac{GMm}{(R+\ell)^2} \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{R+\ell}}\,.$$

(7)　運動量保存則より，

$$m'\sqrt{\frac{GM}{r}} + (m-m')u = 0 \qquad \therefore |u| = \left|-\frac{m'}{m-m'}\sqrt{\frac{GM}{r}}\right| = \frac{m'}{m-m'}\sqrt{\frac{GM}{r}}\,.$$

(8)　楕円軌道の周期を T' とする．ケプラー第 3 法則より，

$$\frac{T'^2}{\left(\dfrac{R+r}{2}\right)^3} = \frac{\left(2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM}}\right)^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \qquad \therefore T' = \pi(R+r)\sqrt{\frac{R+r}{2GM}}\,.$$

求める時間は楕円軌道の半周期に相当し，

$$t = \frac{T'}{2} = \frac{\pi(R+r)}{2}\sqrt{\frac{R+r}{2GM}}\,.$$

(9)　Q での速さを V とする．面積速度保存則，および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}RV = \dfrac{1}{2}ru\,, \\ \dfrac{1}{2}(m-m')V^2 + \left\{-G\dfrac{M(m-m')}{R}\right\} = \dfrac{1}{2}(m-m')u^2 + \left\{-G\dfrac{M(m-m')}{r}\right\} \end{cases}$$

$$\therefore V = \sqrt{\frac{r}{R+r}\frac{2GM}{R}}\,, \quad u = \sqrt{\frac{R}{R+r}\frac{2GM}{r}}\,.$$

[*1] 衝突の直前・直後の運動量保存則に関して．分裂の際に物体間に生じる力のみが内力であるため，物体が地球から受ける万有引力は外力である．しかし，分裂に関する力（撃力（瞬間的に物体の運動方向を変えてしまうような力））が物体に及ぼす力積に比べて万有引力が物体に及ぼす力積は十分小さく無視でき，衝突の直前・直後では運動量は保存すると考えてよい．

(10) (7)，(9) と 2 通りで表された u の式より，

$$\sqrt{\frac{R}{R+r}\frac{2GM}{r}} = \frac{m'}{m-m'}\sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad \therefore \frac{m-m'}{m'} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{R}\right)}.$$

II. 電磁気（電気回路，無限回操作（漸化式を解く））

【メモ】

・・電気回路の状態決定は以下の 3 種類の式で一意に決まる．

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ第 2 法則} \\ \text{電荷保存則（キルヒホッフ第 1 法則も含む）} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

性質を暗記しない素子（電球やダイオードなど）については，問題文でその性質が与えられる．

・スイッチ切り替えの無限回操作では電荷が有限値に収束し，スイッチの切り替えによる電荷の変動が起こらなくなる．そのため，異なる回路の状態で同一の電荷を取ると考えればよい．

【解答】

(1) ①：コンデンサの性質より，十分時間経過後はコンデンサに流れ込む電流は $\underset{\sim}{0}$ である．

②：コンデンサ $\mathrm{C_1}$ の P 側の帯電量を x_1 とする．キルヒホッフの法則より，

$$V - R \cdot 0 - \frac{x_1}{C} = 0 \qquad \therefore x_1 = \underset{\sim\sim}{CV}\,.$$

③：公式より，

$$U = \frac{1}{2}\frac{{x_1}^2}{C} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}CV^2}\,.$$

(2) ④：コンデンサ $\mathrm{C_1}$ の P 側の帯電量を x_1'，コンデンサ $\mathrm{C_2}$ の P 側の帯電量を y_1 とする．キルヒホッフの法則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} V - R \cdot 0 + \frac{x_1'}{C} - \dfrac{y_1}{C} = 0\,, \\ x_1' + y_1 = CV + 0 \end{cases} \qquad \therefore y_1 = \underset{\sim\sim}{CV}\,(= q_1)\,, \quad x_1' = 0\,.$$

⑤：P の電位は $\phi_{\mathrm{P}} = +\dfrac{y_1}{C} = \underset{\sim}{V}$ である．

(3) ⑥：コンデンサ $\mathrm{C_1}$ の P 側の帯電量を x_2 とする．キルヒホッフの法則より，

$$V - R \cdot 0 - \frac{x_2}{C} = 0 \qquad \therefore x_2 = \underset{\sim\sim}{CV}\,.$$

(4) ⑦：コンデンサ $\mathrm{C_1}$ の P 側の帯電量を x_2'，コンデンサ $\mathrm{C_2}$ の P 側の帯電量を y_2 とする．キルヒホッフの法則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} V - R \cdot 0 + \dfrac{x_2'}{C} - \dfrac{y_2}{C} = 0\,, \\ x_2' + y_2 = CV + CV \end{cases} \qquad \therefore y_2 = \frac{3}{2}CV\,, \quad x_2' = \frac{1}{2}CV\,.$$

よって，新たに C_2 の P 側極板へ移動した電気量は $q_2 = y_2 - y_1 = \dfrac{1}{2}CV$ である．

⑧：P の電位は $\phi_{\mathrm{P}} = +\dfrac{y_2}{C} = \dfrac{3}{2}V$ である．

(5) ⑨：コンデンサ C_1 の P 側の帯電量を Q_3 とする．キルヒホッフの法則より，

$$V - R\cdot 0 - \frac{x_3}{C} = 0 \qquad \therefore x_3 = CV\,.$$

(6) ⑩：コンデンサ C_1 の P 側の帯電量を x_3'，コンデンサ C_2 の P 側の帯電量を y_3 とする．キルヒホッフの法則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} V - R\cdot 0 + \dfrac{x_3'}{C} - \dfrac{y_3}{C} = 0\,, \\ x_3' + y_3 = CV + \dfrac{3}{2}CV \end{cases} \qquad \therefore y_3 = \frac{7}{4}CV\,, \quad x_3' = \frac{3}{4}CV\,.$$

よって，新たに C_2 の P 側極板へ移動した電気量は $q_3 = y_3 - y_2 = \dfrac{1}{4}CV$ である．

⑪：P の電位は $\phi_{\mathrm{P}} = +\dfrac{y_3}{C} = \dfrac{7}{4}V$ である．

(7) ⑫：n 回目に a 側に繋ぎ，十分時間経過した後のコンデンサ C_1 の P 側の帯電量を x_n とする．キルヒホッフの法則より，

$$V - R\cdot 0 - \frac{x_n}{C} = 0 \qquad \therefore x_n = CV$$

である．

続いて，n 回目に b 側に繋ぎ，十分時間経過した後のコンデンサ C_1 の P 側の帯電量を x_n'，コンデンサ C_2 の P 側の帯電量を y_n とする．キルヒホッフの法則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} V - R\cdot 0 + \dfrac{x_n'}{C} - \dfrac{y_n}{C} = 0\,, \\ x_n' + y_n = x_n + y_{n-1} \end{cases}$$

であり，$x_n = CV$ を代入して整理すれば，

$$\begin{cases} -x_n' + y_n = CV\,, \\ x_n' + y_n = CV + y_{n-1} \end{cases}$$

を得る．x_n' を消去して y_n だけの漸化式とすれば，

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{2}y_{n-1} + CV \\ y_n - 2CV &= \frac{1}{2}(y_{n-1} - 2CV) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(y_{n-2} - 2CV) = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(y_1 - 2CV) \\ \therefore y_n &= \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}CV\,. \end{aligned}$$

ここで $y_1 = CV$ を用いた．よって，新たに C_2 の P 側極板へ移動した電気量は

$$y_n - y_{n-1} = \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} CV - \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} CV = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} CV\,.$$

⑬：無限回操作後の帯電量は $n \to \infty$ として $y_\infty = 2CV$ である．よって，このときの P の電位は

$$\phi_{\mathrm{P}} = +\frac{y_\infty}{C} = 2V\,.$$

(8) ⑭：誘電体挿入前のコンデンサの容量を $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$ とすると，誘電体挿入後のコンデンサの容量 C_1 は容量の合成則より，

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{\varepsilon_0 \dfrac{S}{d/2}} + \frac{1}{4\varepsilon_0 \dfrac{S}{d/2}} = \frac{5}{8}\underbrace{\frac{d}{\varepsilon_0 S}}_{=1/C} \qquad \therefore C_1 = \frac{8}{5}C\,.$$

⑮：無限回操作後，各コンデンサの電荷は収束するため a 側の回路の状態と b 側の回路の状態で帯電量が等しくなる．コンデンサ C_1 の P 側の帯電量を x，コンデンサ C_2 の P 側の帯電量を y とすると，キルヒホッフの法則より，

$$\begin{cases} \text{a 側：} V - R\cdot 0 - \dfrac{x}{C_1} = 0\,, \\ \text{b 側：} V - R\cdot 0 + \dfrac{x}{C_1} - \dfrac{y}{C} = 0 \end{cases} \qquad \therefore x = C_1 V = \frac{8}{5}CV\,, \quad y = 2CV\,.$$

よって，P の電位は $\phi_{\mathrm{P}} = +\dfrac{y}{C} = 2V$ である．

III. 熱力学（熱あり過程，準静的断熱過程）

【メモ】

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程の定石は以下の通り．

$$\begin{cases} \text{状態決定：}\begin{cases} \text{可動部分のつりあい} & \to \quad \text{圧力 } P \text{ の決定} \\ \text{状態方程式} & \to \quad \text{温度 } T \text{ の決定（モル数 } n \text{ の場合も）} \end{cases} \\ \text{第 1 法則：熱の決定式} \end{cases}$$

熱力学第 1 法則は熱の決定式で，内部エネルギー変化は公式，気体のする仕事は $P-V$ 図の面積評価によって行う．

・むらのない断熱過程の定石は以下の通り．

$$\begin{cases} \text{状態決定：}\begin{cases} \text{ポアソンの公式} \\ \text{状態方程式} \end{cases} \\ \text{第 1 法則：仕事の決定式} \end{cases}$$

断熱過程ゆえ熱力学第 1 法則は熱の決定式ではなくなる．内部エネルギー変化を公式から計算し，気体のする仕事を熱力学第 1 法則を通じて間接的に求めることとなる．

【解答】

〔A〕(1) 公式より，

$$\mathit{\Delta} U = nC_{\mathrm{v}}\mathit{\Delta} T = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}nR\mathit{\Delta} T}\,.$$

(2) 始状態の温度，体積をそれぞれ T_0，V_0，終状態の圧力，体積をそれぞれ p，$V_0+\mathit{\Delta} V$ とする．ピストンのつりあい，および状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = pS - p_0 S\,, \\ \begin{cases} \text{始：}p_0V_0 = nRT_0\,, \\ \text{終：}p(V_0+\mathit{\Delta} V) = nR(T_0+\mathit{\Delta} T) \end{cases} \end{cases} \qquad \therefore p_0\mathit{\Delta} V = nR\mathit{\Delta} T\,.$$

仕事 W は pV グラフの面積より（図略[*2]），

$$W = p_0(V+\mathit{\Delta}) - p_0V = p\mathit{\Delta} V = \underset{\sim\sim\sim\sim}{nR\mathit{\Delta} T}\,.$$

(3) 熱力学第 1 法則より，

$$Q = \mathit{\Delta} U + W = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{5}{2}nR\mathit{\Delta} T}\,.$$

[*2] ピストンのつりあいから圧力は $p=p_0$ で一定であり，底辺右向きの長方形となる．

(4) 始状態の温度を T_0，終状態の圧力を p とする．ピストンのつりあい，および状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = pS - p_0S - k\mathit{\Delta}L\,, \\ \begin{cases} 始：p_0SL = nRT_0\,, \\ 終：pS(L+\mathit{\Delta}L) = nR(T_0+\mathit{\Delta}T) \end{cases} \end{cases} \qquad \therefore p = p_0 + \frac{k}{S}\mathit{\Delta}L\,.$$

(5) 前問の状態方程式へ p を代入して，

$$\begin{cases} 始：p_0SL = nRT_0\,, \\ 終：\left(p_0 + \dfrac{k}{S}\mathit{\Delta}L\right)S(L+\mathit{\Delta}L) = nR(T_0+\mathit{\Delta}T) \end{cases}$$

$$\therefore \mathit{\Delta}T = \frac{\mathit{\Delta}L}{nR}\left\{p_0S + k(L+\mathit{\Delta}L)\right\}.$$

(6) 公式より，

$$\mathit{\Delta}U = \frac{3}{2}\mathit{\Delta}L\left\{p_0S + k(L+\mathit{\Delta}L)\right\}.$$

〔B〕 X 室，Y 室内の気体の圧力をそれぞれ p_{X}，p_{Y}，Y 室の気体のモル数を n_{Y}，両室の気体の温度を T_0 とする．始状態における仕切り・ピストンのつりあい，および状態方程式より，

$$\begin{cases} つりあい：\begin{cases} 0 = p_{\mathrm{X}}S - p_{\mathrm{Y}}S\,, \\ 0 = p_{\mathrm{Y}}S - p_0S\,, \end{cases} \\ 状態方程式：\begin{cases} \mathrm{X}：p_{\mathrm{X}}SL = nRT_0\,, \\ \mathrm{Y}：p_{\mathrm{Y}}SL = n_{\mathrm{Y}}RT_0 \end{cases} \end{cases} \qquad \therefore n_{\mathrm{Y}} = n\,.$$

(1) 仕切りのつりあい，および状態方程式より[*3]，

$$\begin{cases} 0 = p_{\mathrm{X}}S - p_{\mathrm{Y}}S\,, \\ \begin{cases} 始：p_0SL = nRT_0\,, \\ \mathrm{X}：p_{\mathrm{X}}S(L+a) = nR(T_0+\mathit{\Delta}T)\,, \\ \mathrm{Y}：p_{\mathrm{Y}}S(L-a) = n_{\mathrm{Y}}RT_0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\therefore p_{\mathrm{Y}} = p_{\mathrm{X}} = \frac{L}{L-a}p_0\,, \quad \mathit{\Delta}T = \frac{2a}{L-a}\frac{p_0SL}{nR}\,.$$

(2) 前問に示した．

(3) 仕切りのつりあい，ポアソンの公式，状態方程式より[*4]，

$$\begin{cases} つ：0 = p_{\mathrm{X}}S - p_{\mathrm{Y}}S\,, \\ ポ：p_{\mathrm{X}}\{S(L-b)\}^{\gamma} = p_0(SL)^{\gamma}\,, \\ 状：\begin{cases} 始：p_0SL = nRT_0\,, \\ \mathrm{X}：p_{\mathrm{X}}S(L-b) = nRT_{\mathrm{X}}\,, \\ \mathrm{Y}：p_{\mathrm{Y}}S(L-\ell+b) = n_{\mathrm{Y}}RT_0 \end{cases} \end{cases} \qquad \therefore \ell = L\left\{1 - \left(1 - \frac{b}{L}\right)^{\gamma}\right\} + b\,.$$

[*3] ピストンが熱をよく通すことから Y 室内の気体の温度は外界（始状態）の温度と等しい．
[*4] ピストンが熱をよく通すことから Y 室内の気体の温度は外界（始状態）の温度と等しい．